RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome: **Matricola:** **Corso:** A B

1) Ritiratosi a meditare nelle profondità di una caverna, *Aristocle* ha portato con sé i 10 tomi in cui sono raccolte le sue opere. Spaventato da ombre e da un'eco costante, decide di mettere al riparo i tomi dentro una cavità della parete, in cui però non possono entrare tutti. Aristocle stima in U il volume della cavità e in a_i il volume del tomo i, a cui attribuisce un valore p_i. Per agevolare la scelta decide inoltre che

- al più uno tra i tomi 1, 2 e 3 può venir inserito nella cavità
- almeno uno tra i tomi 3, 7 e 10 deve essere inserito nella cavità
- il tomo 5 può essere inserito solo se viene inserito anche il tomo 9
- se il tomo 9 viene inserito, allora deve essere inserito almeno uno tra i tomi 2 e 7.

Aiuta Aristocle a decidere quali tomi inserire nella cavità nel rispetto della sua capacità e delle condizioni sopra elencate in modo da massimizzare il valore complessivo dei tomi selezionati. A tal fine si formuli il problema in termini di P.L.I.

SVOLGIMENTO

Per formulare il problema introduciamo 10 variabili binarie x_i con il seguente significato:

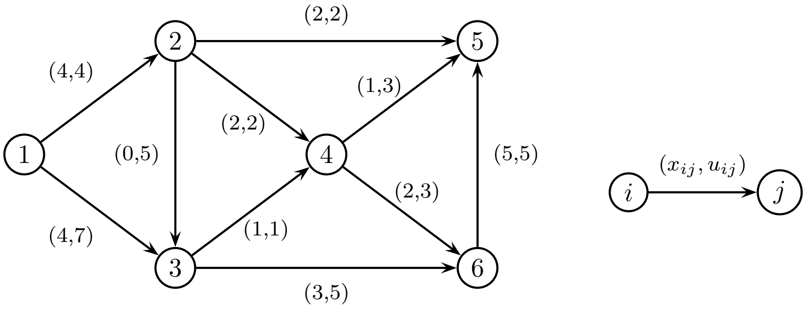
$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se il tomo } i \text{ viene inserito nella cavità} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Il problema può essere formulato come segue:

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{10} p_i x_i \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{10} a_i x_i \le U \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ & x_3 + x_7 + x_{10} \ge 1 \\ & x_5 \le x_9 \\ & x_2 + x_7 \ge x_9 \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, 10 \end{array}$$

Il primo vincolo garantisce che il volume complessivo dei tomi selezionati non ecceda la capacità della cavità. I vincoli successivi sono vincoli di tipo logico e garantiscono il soddisfacimento dei quattro requisiti addizionali. Infine la funzione obiettivo rappresenta il valore complessivo dei tomi selezionati.

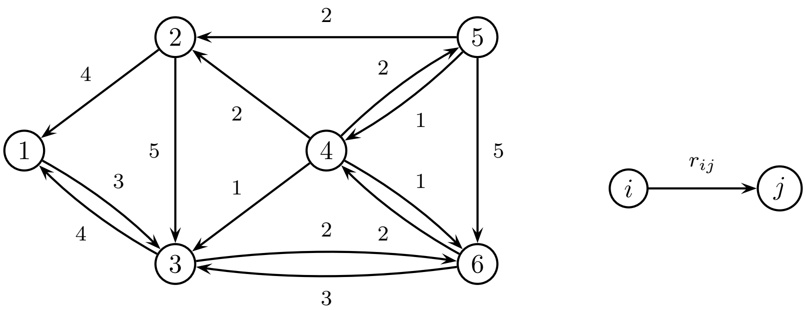
2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sul grafo seguente:



Dire se il flusso riportato in figura è massimo. Qualora non lo fosse, applicare un algoritmo per trovare un flusso massimo ed un taglio di capacità minima. Il taglio individuato è l'unico di capacità minima? Giustificare tutte le risposte.

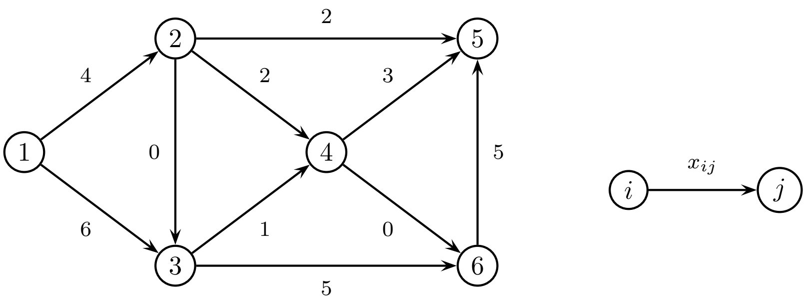
SVOLGIMENTO

Il flusso dato è massimo se e solo se non ammette cammini aumentanti. Il grafo residuo corrispondente al flusso dato è il seguente:

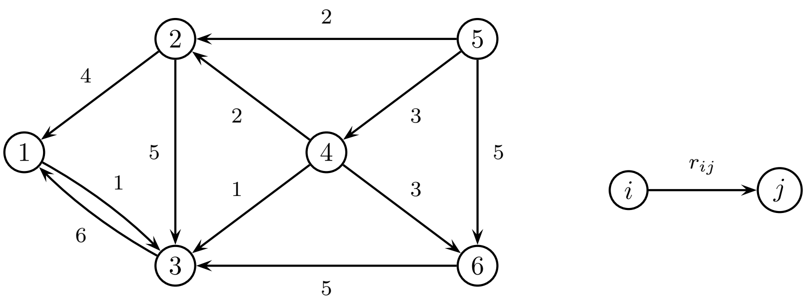


Poiché esiste il cammino aumentante $1-3-6-4-5$ di capacità $\delta = \min\{3, 2, 2, 2\} = 2$, il flusso dato non è massimo.

Inviando due unità di flusso lungo il cammino aumentante trovato, si ottiene il flusso di valore $v = 10$ riportato nella figura sottostante:



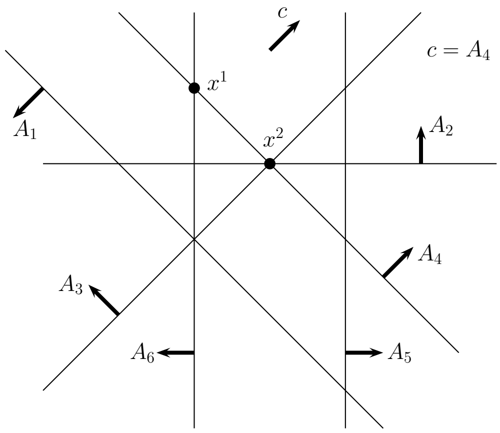
Il grafo residuo corrispondente al nuovo flusso è



Non esistono cammini aumentanti perché il solo nodo raggiungibile da 1 con un cammino orientato è il nodo 3. Pertanto, il flusso ottenuto è massimo ed il taglio $N_s = \{1, 3\}$, $N_t = \{2, 4, 5, 6\}$ è di capacità minima, infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{34} + u_{36} = 4 + 1 + 5 = 10$.

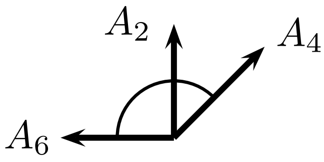
Un altro taglio di capacità minima è dato da $N_s = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (nodi dai quali non è possibile raggiungere il nodo 5), $N_t = \{5\}$ (nodi dai quali è possibile raggiungere il nodo 5), infatti $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{45} + u_{65} = 2 + 3 + 5 = 10$. Pertanto il taglio di capacità minima non è unico.

3) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Successivamente, si consideri il caso in cui $c = A_5$: la soluzione ottima trovata in precedenza resta tale? Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO

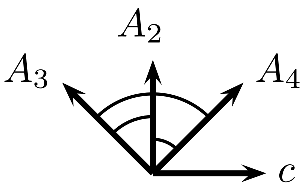
it. 1) $B = \{4, 6\}$, x^1 viola i vincoli 2 e 3 da cui $k = \min\{2, 3\} = 2$, $y_4 = 1$, $y_6 = 0$ in quanto $c = A_4$. La base è duale degenere ($y_6 = 0$) e primale non degenere ($I(x^1) = \{4, 6\}$). Poiché $A_2 \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(A_4, A_6)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_4 > 0$, $\eta_6 > 0$ e quindi $h = 6$ in quanto $y_6/\eta_6 < y_4/\eta_4$.



(a)

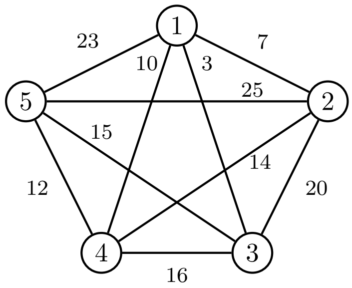
it. 2) $B = \{2, 4\}$, x^2 è una soluzione ammissibile per il problema primale e quindi ottima. La base è primale degenere ($I(x^2) = \{2, 3, 4\}$) e duale degenere in quanto $c = A_4$ fornisce $y_2 = 0$ e $y_4 = 1$.

Scegliendo $c = A_5$, x^2 non è più una soluzione ottima. Infatti, $I(x^2) = \{2, 3, 4\}$ garantisce che x^2 è la soluzione di base corrispondente alle basi $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ e $\{3, 4\}$ ma nessuna di queste basi è duale ammissibile in quanto $c \notin \operatorname{cono}(A_2, A_3, A_4) = \operatorname{cono}(A_3, A_4) \cup \operatorname{cono}(A_2, A_3) \cup \operatorname{cono}(A_2, A_4)$, come mostrato in figura (b).



(b)

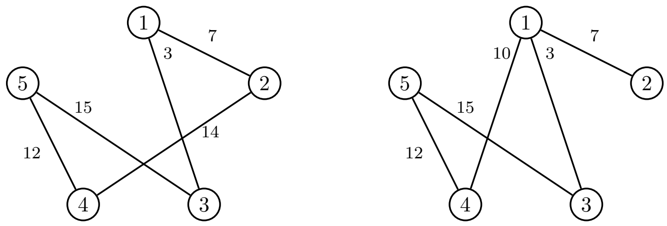
4) Si consideri il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo:



Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo “Branch and Bound”: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita istanziando nell’ordine le variabili x_{23}, x_{24}, x_{25}, e l’albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

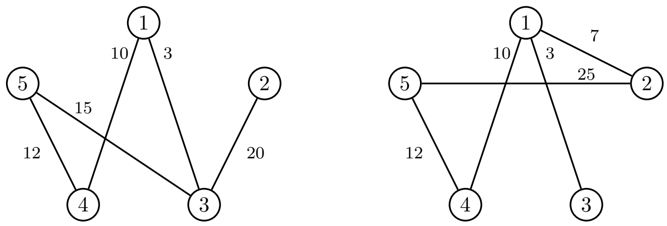
SVOLGIMENTO

L’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2 fornisce la soluzione ammissibile di figura (a) di valore 51 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = 51$. Il 5-albero di costo minimo è quello in figura (b) di valore 47 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 47$.



(a) (b)

Iniziamo l’esplorazione dell’albero di enumerazione ramificando sulla variabile x_{23}. Il 5-albero di costo minimo per P$_1$ è quello di figura (b) ed il nodo rimane aperto. Il 5-albero di costo minimo per P$_2$ è quello di figura (c) di valore $60 = v_I(P_2)$. Poiché $v_I(P_1) > v_S(P)$, possiamo chiudere il nodo P$_2$.



(c) (d)

Ramificando sulla variabile x_{24}, il 5-albero di costo minimo per P$_3$ è lo stesso di P (figura (b)) e non possiamo chiudere il nodo, mentre quello per P$_4$ è la soluzione ammissibile di figura (a) di valore 51 e possiamo chiudere il nodo poiché $v_I(P_4) = 51 = v_S(P)$.

Ramificando sulla variabile x_{25}, il problema P$_5$ non ammette cicli hamiltoniani perché sul nodo 2 può incidere solo l’arco $(1, 2)$ e quindi possiamo chiudere il nodo P$_5$. Il 5-albero di costo minimo per P$_6$ è quello di figura (d) di valore $57 = v_I(P_6)$. Poiché $v_I(P_6) > v_S(P)$, possiamo chiudere anche il nodo P$_6$ e l’algoritmo termina individuando il ciclo hamiltoniano di costo minimo di figura (a). La figura seguente riassume l’esplorazione dell’albero di enumerazione eseguita dall’algoritmo.