# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

## Nome Cognome: **Matricola:** **Corso:** A B

**1)** Ritiratosi a meditare nelle profondità di una caverna, *Aristocle* ha portato con sé i 10 tomi in cui sono raccolte le sue opere. Spaventato da ombre e da un'eco costante, decide di mettere al riparo i tomi dentro una cavità della parete, in cui però non possono entrare tutti. Aristocle stima in $U$ il volume della cavità e in $a_i$ il volume del tomo $i$, a cui attribuisce un valore $p_i$. Per agevolare la scelta decide inoltre che

- al più uno tra i tomi 1, 2 e 3 può venir inserito nella cavità
- almeno uno tra i tomi 3, 7 e 10 deve essere inserito nella cavità
- il tomo 5 può essere inserito solo se viene inserito anche il tomo 9,
- se il tomo 9 viene inserito, allora deve essere inserito almeno uno tra i tomi 2 e 7.

Aiuta Aristocle a decidere quali tomi inserire nella cavità nel rispetto della sua capacità e delle condizioni sopra elencate in modo da massimizzare il valore complessivo dei tomi selezionati. A tal fine si formuli il problema in termini di P.L.I.

### SVOLGIMENTO

Per formulare il problema introduciamo 10 variabili binarie $x_i$ con il seguente significato:

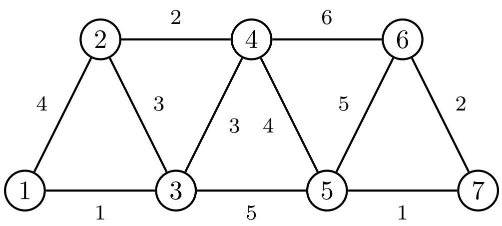
$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se il tomo } i \text{ viene inserito nella cavità} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

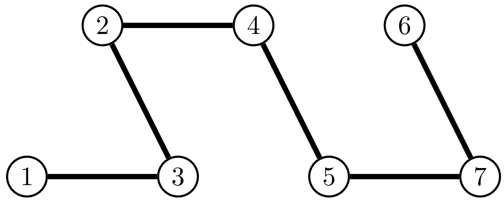
Il problema può essere formulato come segue:

$$\begin{array}{ll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{10} p_i x_i \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{10} a_i x_i \leq U \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\
& x_3 + x_7 + x_{10} \geq 1 \\
& x_5 \leq x_9 \\
& x_2 + x_7 \geq x_9 \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, \ldots, 10
\end{array}$$

Il primo vincolo garantisce che il volume complessivo dei tomi selezionati non ecceda la capacità della cavità. I vincoli successivi sono vincoli di tipo logico e garantiscono il soddisfacimento dei quattro requisiti addizionali. Infine la funzione obiettivo rappresenta il valore complessivo dei tomi selezionati.

**2)** Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:




Dire se l'albero a destra è un albero di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per cicli. Supponendo che i costi degli archi (3,5), (4,5) e (4,6) siano rispettivamente $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, dire per quali valori di $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ lo stesso albero è di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per tagli. Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Per ogni arco $(i, j)$ non appartenente all'albero la tabella seguente riporta il suo costo, il ciclo $P$ che si crea con la sua aggiunta all'albero, l'insieme $P_{ij}$ degli altri archi del ciclo, i loro costi ed il massimo $c_{max}$ di tali costi.

| $(i,j)$ | $c_{ij}$ | $P$ | $P_{ij}$ | costi | $c_{max}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1,2)$ | 4 | $\{1,2,3\}$ | $(2,3),(1,3)$ | $3,1$ | 3 |
| $(3,4)$ | 3 | $\{3,4,2\}$ | $(2,4),(2,3)$ | $2,3$ | 3 |
| $(3,5)$ | 5 | $\{3,5,4,2\}$ | $(4,5),(2,4),(2,3)$ | $4,2,3$ | 4 |
| $(4,6)$ | 6 | $\{4,6,7,5\}$ | $(6,7),(5,7),(5,4)$ | $2,1,4$ | 4 |
| $(5,6)$ | 5 | $\{5,6,7\}$ | $(6,7),(5,7)$ | $2,1$ | 2 |

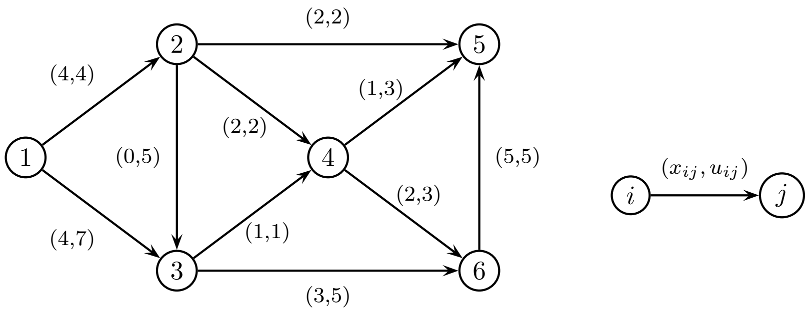
L'albero è di costo minimo in quanto il costo $c_{ij}$ è maggiore od uguale al corrispondente $c_{max}$ per ogni arco $(i, j)$ non appartenete all'albero.

Per ogni arco $(i, j)$ dell'albero la tabella seguente riporta il suo costo, il taglio $(N', N'')$ che si crea con la sua rimozione dall'albero, l'insieme $A_{ij}(N', N'')$ degli altri archi nel taglio, i loro costi ed il minimo $c_{min}$ di tali costi.

| $(i,j)$ | $c_{ij}$ | $(N',N'')$ | $A_{ij}(N',N'')$ | costi | $c_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1,3)$ | 1 | $(\{1\},\{2,3,4,5,6,7\})$ | $(1,2)$ | 4 | 4 |
| $(2,3)$ | 3 | $(\{1,3\},\{2,4,5,6,7\})$ | $(1,2),(3,4),(3,5)$ | $4,3,\alpha$ | $\min\{3,\alpha\}$ |
| $(2,4)$ | 2 | $(\{1,2,3\},\{4,5,6,7\})$ | $(3,4),(3,5)$ | $3,\alpha$ | $\min\{3,\alpha\}$ |
| $(4,5)$ | $\beta$ | $(\{1,2,3,4\},\{5,6,7\})$ | $(3,5),(4,6)$ | $\alpha,\gamma$ | $\min\{\alpha,\gamma\}$ |
| $(5,7)$ | 1 | $(\{1,2,3,4,5\},\{6,7\})$ | $(4,6),(5,6)$ | $\gamma,5$ | $\min\{\gamma,5\}$ |
| $(6,7)$ | 2 | $(\{1,2,3,4,5,7\},\{6\})$ | $(4,6),(5,6)$ | $\gamma,5$ | $\min\{\gamma,5\}$ |

L'albero è di costo minimo se e solo se il costo $c_{ij}$ è minore od uguale al corrispondente $c_{min}$ per ogni arco $(i, j)$ appartenente all'albero, pertanto se e solo se $3 \le \min\{3, \alpha\}$, $2 \le \min\{3, \alpha\}$, $\beta \le \min\{\alpha, \gamma\}$, $1 \le \min\{\gamma, 5\}$ e $2 \le \min\{\gamma, 5\}$, che equivalgono a richiedere $\alpha \ge 3$, $\gamma \ge 2$, $\beta \le \alpha$ e $\beta \le \gamma$.

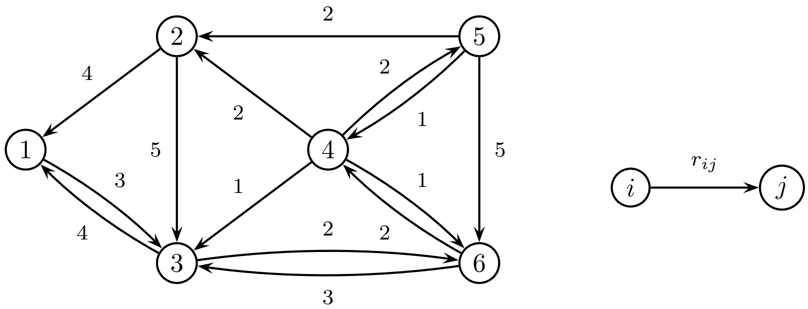
**3)** Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sul grafo seguente:




Dire se il flusso riportato in figura è massimo. Qualora non lo fosse, applicare un algoritmo per trovare un flusso massimo ed un taglio di capacità minima. Il taglio individuato è l'unico di capacità minima? Giustificare tutte le risposte.

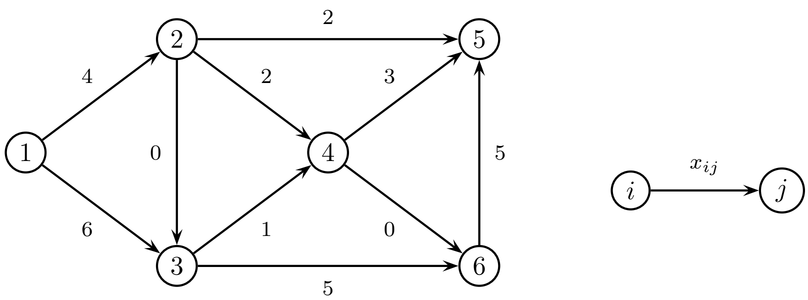
**SVOLGIMENTO**

Il flusso dato è massimo se e solo se non ammette cammini aumentanti. Il grafo residuo corrispondente al flusso dato è il seguente:

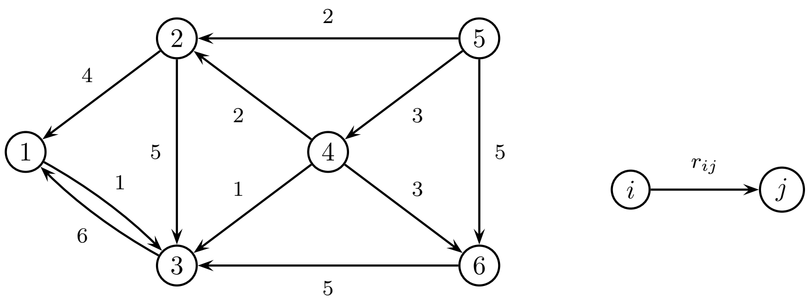



Poiché esiste il cammino aumentante $1-3-6-4-5$ di capacità $\delta = \min\{3, 2, 2, 2\} = 2$, il flusso dato non è massimo.

Inviando due unità di flusso lungo il cammino aumentante trovato, si ottiene il flusso di valore $v = 10$ riportato nella figura sottostante:



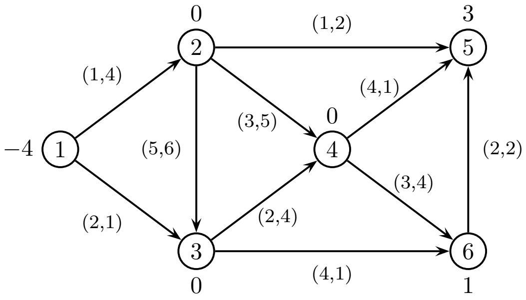

Il grafo residuo corrispondente al nuovo flusso è

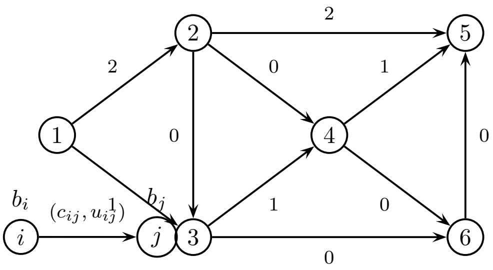



Non esistono cammini aumentanti perché il solo nodo raggiungibile da 1 con un cammino orientato è il nodo 3. Pertanto, il flusso ottenuto è massimo ed il taglio $N_s = \{1, 3\}$, $N_t = \{2, 4, 5, 6\}$ è di capacità minima, infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{34} + u_{36} = 4 + 1 + 5 = 10$.

Un altro taglio di capacità minima è dato da $N_s = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (nodi dai quali non è possibile raggiungere il nodo 5), $N_t = \{5\}$ (nodi dai quali è possibile raggiungere il nodo 5), infatti $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{45} + u_{65} = 2 + 3 + 5 = 10$. Pertanto il taglio di capacità minima non è unico.

**4)** Si consideri il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra.



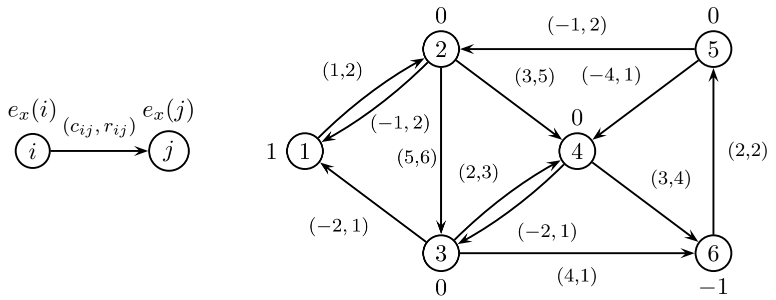




Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo dei cammini minimi successivi a partire dallo pseudoflusso minimale riportato sul grafo a destra. Ad ogni iterazione si forniscano l'albero dei cammini minimi con le relative etichette, il cammino aumentante selezionato con la quantità di flusso inviata, lo pseudoflusso ottenuto con il suo costo, i relativi sbilanciamenti dei nodi e lo sbilanciamento complessivo. Al termine si fornisca la soluzione ottima trovata.

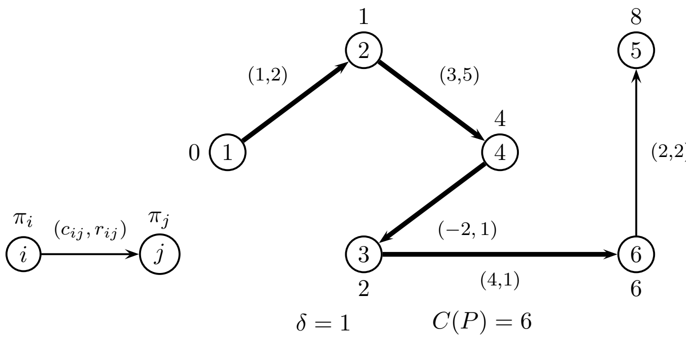
Si modifichi il costo di almeno due archi in modo tale che la soluzione trovata rimanga comunque un flusso di costo minimo, giustificando la risposta.

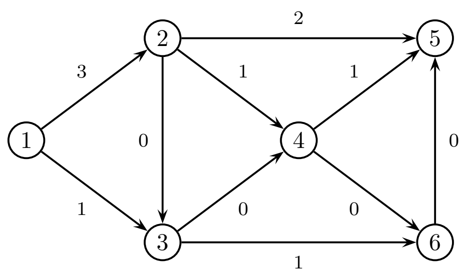
**SVOLGIMENTO**

Lo pseudoflusso dato $x$ ha costo 12 con vettore degli sbilanciamenti $e_x = (1, 0, 0, 0, 0, -1)$ e sbilanciamento complessivo $g(x) = 1$. Il grafo residuo relativo ad $x$ (con costi e capacità residue sugli archi e sbilanciamento sui nodi) è il seguente:

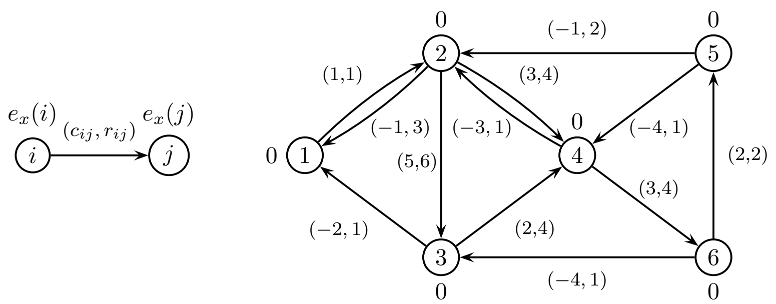



Nella figura seguente è rappresentato (a sinistra) l'albero dei cammini minimi di radice 1 (con le etichette sui nodi) con il cammino aumentante P da 1 a 6 e (a destra) lo pseudoflusso ottenuto in seguito all'invio di $\delta$ unità di flusso lungo P.




Poiché lo sbilanciamento complessivo risulta nullo, lo pseudoflusso in figura di costo $cx + \delta C(P) = 12 + 6 = 18$ è ammissibile e pertanto è un flusso di costo minimo. Come ulteriore verifica della sua ottimalità, si può osservare che il grafo residuo associato non contiene cicli orientati di costo negativo.




Modificando i costi degli archi $(3, 4)$ e $(6, 5)$ in $c_{34} = c_{65} = 3$, l'ultimo grafo residuo continua a non avere cicli orientati di costo negativo e conseguentemente il flusso rimane di costo minimo.