Programmazione lineare

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2019/20

Problema del contadino

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi e 160 t di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 t di concime per ettaro di lattuga, 3 t di tuberi e 20 t di concime per ettaro di patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

Problema del contadino - modello di PL

Variabili decisionali:
x_L = numero di ettari da coltivare a lattuga
x_P = numero di ettari da coltivare a patate

Modello di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 3000x_L + 5000x_P \\ x_L + x_P \leq 12 \\ 7x_L \leq 70 \\ 3x_P \leq 18 \\ 10x_L + 20x_P \leq 160 \\ x_L \geq 0 \\ x_P \geq 0 \end{cases}$$

Forma matriciale

$$\begin{array}{rl} \max\ 3x_L + 5x_P & \\ x_L + x_P & \leq 12 \\ x_L & \leq 10 \\ x_P & \leq 6 \\ x_L + 2x_P & \leq 16 \\ -x_L & \leq 0 \\ -x_P & \leq 0 \end{array}$$

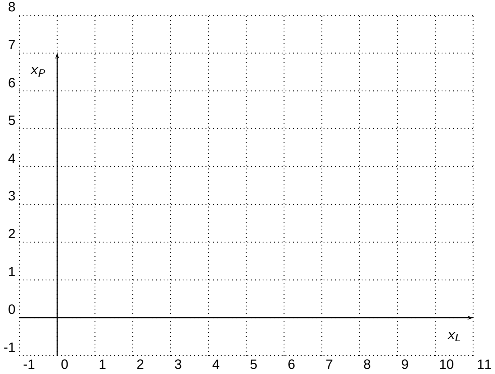
$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \quad \text{dove } x = \begin{pmatrix} x_L \\ x_P \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

m = numero di vincoli
n = numero di variabili
A matrice $m \times n$
b vettore con m componenti
c vettore con n componenti

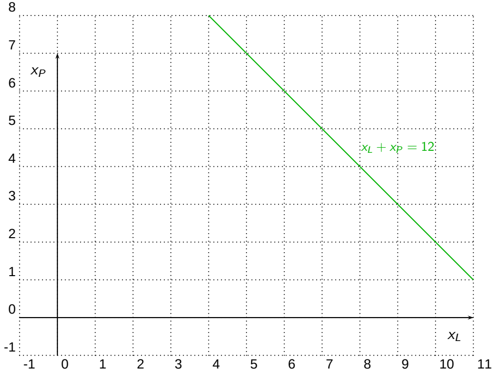
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \le 12 \\
& x_L \le 10 \\
& x_P \le 6 \\
& x_L + 2x_P \le 16 \\
& -x_L \le 0 \\
& -x_P \le 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{aligned}
\max\ 3x_L + 5x_P & \\
x_L + x_P & \leq 12 \\
x_L & \leq 10 \\
x_P & \leq 6 \\
x_L + 2x_P & \leq 16 \\
-x_L & \leq 0 \\
-x_P & \leq 0
\end{aligned}
$$

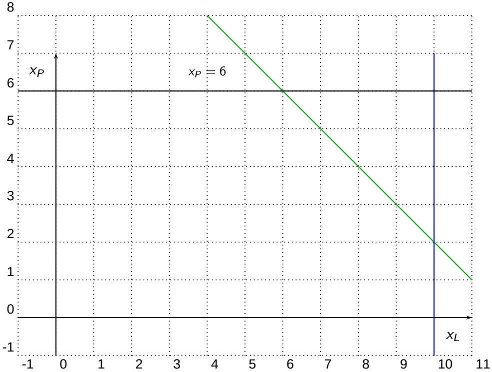


Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{aligned}
\max\ 3x_L + 5x_P & \\
x_L + x_P & \le 12 \\
x_L & \le 10 \\
x_P & \le 6 \\
x_L + 2x_P & \le 16 \\
-x_L & \le 0 \\
-x_P & \le 0
\end{aligned}
$$

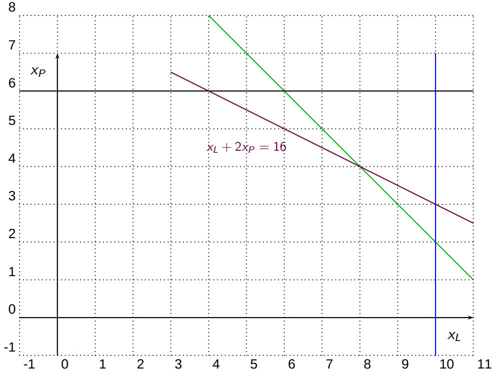
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



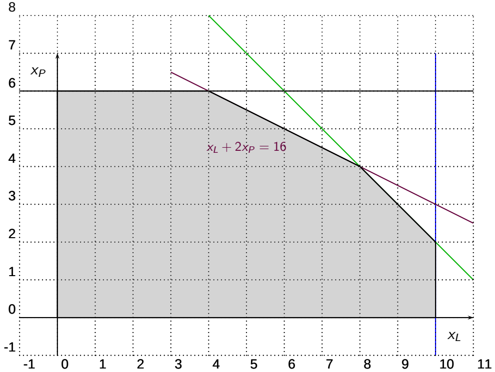
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
x_L + x_P & \leq 12 \\
x_L & \leq 10 \\
x_P & \leq 6 \\
x_L + 2x_P & \leq 16 \\
-x_L & \leq 0 \\
-x_P & \leq 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

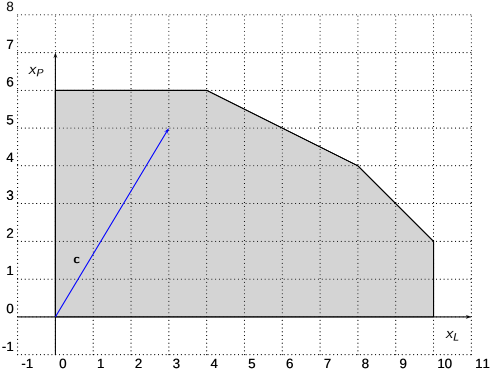
$$
\begin{aligned}
\max\ 3x_L + 5x_P & \\
x_L + x_P &\leq 12 \\
x_L &\leq 10 \\
x_P &\leq 6 \\
x_L + 2x_P &\leq 16 \\
-x_L &\leq 0 \\
-x_P &\leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

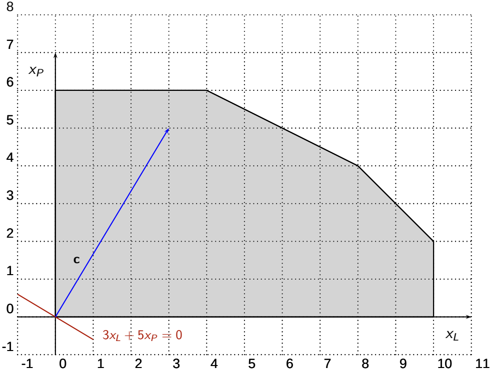
$$\begin{aligned} \max \ & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

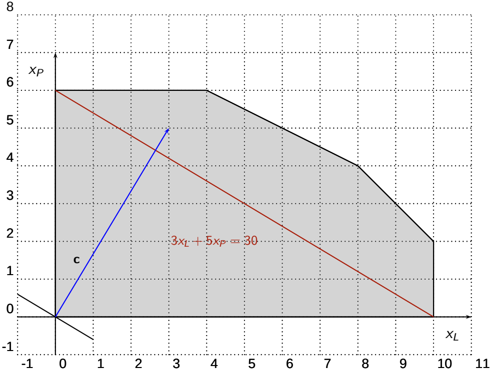
$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

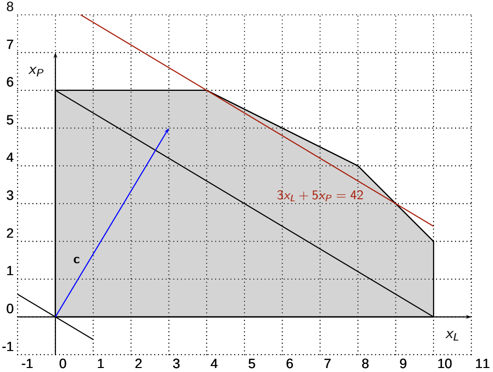
$$
\begin{aligned}
\max \; & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

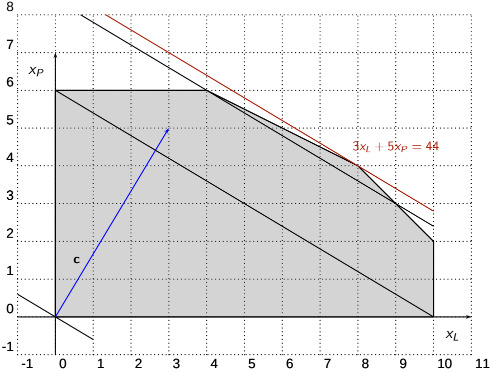
$$
\begin{aligned}
\max \; & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

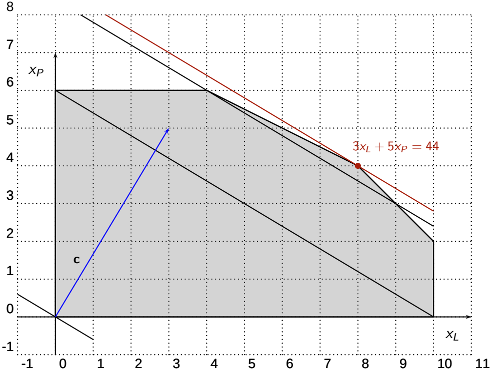
$$
\begin{aligned}
\max \; & 3x_L + 5x_P \\
x_L + x_P & \le 12 \\
x_L & \le 10 \\
x_P & \le 6 \\
x_L + 2x_P & \le 16 \\
-x_L & \le 0 \\
-x_P & \le 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

$$
\begin{array}{rl}
\max \ 3x_L + 5x_P & \\
x_L + x_P & \leq 12 \\
x_L & \leq 10 \\
x_P & \leq 6 \\
x_L + 2x_P & \leq 16 \\
-x_L & \leq 0 \\
-x_P & \leq 0
\end{array}
$$



Soluzione ottima: $x_L = 8, x_P = 4$ (8 ettari di lattuga, 4 ettari di patate)
Valore ottimo $= 44$ (ricavo massimo 44000 €)

Forma generale e forma canonica

Definizione

Un problema di Programmazione Lineare (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare di n variabili soggette a vincoli lineari di uguaglianza o di disuguaglianza, cioè

$$\begin{cases} \max(\text{o } \min)\ c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{cases}$$

Forma generale e forma canonica

Definizione

Un problema di Programmazione Lineare (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare di n variabili soggette a vincoli lineari di uguaglianza o di disuguaglianza, cioè

$$\begin{cases} \max(\text{o } \min)\ c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{cases}$$

Definizione

Un problema nella forma

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

è chiamato problema di PL in forma canonica.

Forma generale e forma canonica

Teorema

Ogni problema di PL può essere riscritto in modo equivalente in forma canonica.

Dim. $\min\ c^T x = -\max\ (-c^T x)$

$a^T x \geq b$ è equivalente a $-a^T x \leq -b$

$a^T x = b$ è equivalente a $\begin{cases} a^T x \leq b \\ -a^T x \leq -b \end{cases}$

Esercizio

Scrivere in forma canonica il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min\ 2x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 9x_2 = 17 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Esempio. $(2,2)$ è combinazione convessa di $(4,0)$ e $(1,3)$. Infatti:
$(2,2) = \frac{1}{3}(4,0) + \frac{2}{3}(1,3)$.

Esempio. $(2,2)$ è combinazione convessa di $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$. Infatti:
$(2,2) = \frac{1}{4}(1,1) + \frac{1}{4}(3,1) + \frac{1}{2}(2,3)$.

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Esempio. $(2,2)$ è combinazione convessa di $(4,0)$ e $(1,3)$. Infatti:
$(2,2) = \frac{1}{3}(4,0) + \frac{2}{3}(1,3)$.

Esempio. $(2,2)$ è combinazione convessa di $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$. Infatti:
$(2,2) = \frac{1}{4}(1,1) + \frac{1}{4}(3,1) + \frac{1}{2}(2,3)$.

Definizione

L'involucro convesso di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di punti di K.

Esercizio. Qual è l'involucro convesso dei punti $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$?

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$.

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(4, 0)$ e $(1, 3)$. Infatti:
$(2, 2) = \frac{1}{3}(4, 0) + \frac{2}{3}(1, 3)$.

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$. Infatti:
$(2, 2) = \frac{1}{4}(1, 1) + \frac{1}{4}(3, 1) + \frac{1}{2}(2, 3)$.

Definizione

L'involucro convesso di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di punti di K.

Esercizio. Qual è l'involucro convesso dei punti $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$?

Definizione

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto convesso se per ogni $x, y \in K$ il vettore $\alpha x + (1 - \alpha)y \in K$ per ogni $\alpha \in [0, 1]$.

Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione conica dei vettori $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione conica dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Esempio. $(4,4)$ è combinazione conica di $(2,3)$ e $(3,1)$. Infatti:
$(4,4) = \frac{8}{7}(2,3) + \frac{4}{7}(3,1)$.

Combinazioni coniche

Definizione
Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione conica dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$.

Esempio. $(4,4)$ è combinazione conica di $(2,3)$ e $(3,1)$. Infatti:
$(4,4) = \frac{8}{7}(2,3) + \frac{4}{7}(3,1)$.

Definizione
L'involucro conico di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con cono(K), è l'insieme di tutte le combinazioni coniche di punti di K.

Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione conica dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Esempio. $(4,4)$ è combinazione conica di $(2,3)$ e $(3,1)$. Infatti:
$(4,4) = \frac{8}{7}(2,3) + \frac{4}{7}(3,1)$.

Definizione

L'involucro conico di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con cono(K), è l'insieme di tutte le combinazioni coniche di punti di K.

Esercizio. Qual è l'involucro conico di $(2,3)$ e $(3,1)$?

Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione conica dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$.

Esempio. $(4,4)$ è combinazione conica di $(2,3)$ e $(3,1)$. Infatti:
$(4,4) = \frac{8}{7}(2,3) + \frac{4}{7}(3,1)$.

Definizione

L'involucro conico di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con cono(K), è l'insieme di tutte le combinazioni coniche di punti di K.

Esercizio. Qual è l'involucro conico di $(2,3)$ e $(3,1)$?

Definizione

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto cono se per ogni $x \in K$ il vettore $\alpha x \in K$ per ogni $\alpha \geq 0$.

Poliedri

L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x \leq b\}$ è un semispazio chiuso di $\mathbb{R}^n$.

Definizione
Un poliedro in $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi oppure, in modo equivalente, è l'insieme delle soluzioni di un sistema di disequazioni lineari $Ax \leq b$.

La regione ammissibile di ogni problema di PL è un poliedro.

Esempi.

$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_2 \leq 3\}$ è un poliedro limitato.

$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$ è un poliedro illimitato.

Direzioni di recessione

Definizione
Una direzione di recessione di un poliedro P è un vettore d tale che $x + \alpha d \in P$ per ogni $x \in P$ e $\alpha > 0$.
L'insieme di tutte le direzioni di recessione di un poliedro P è un cono convesso ed è denotato con $\text{rec}(P)$.

Esempio. $(1, 1)$ è una direzione di recessione del poliedro

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 1, \qquad x_2 \geq 1, \qquad x_1 + x_2 \geq 3\}.$$

Direzioni di recessione

Definizione

Una direzione di recessione di un poliedro P è un vettore d tale che $x + \alpha d \in P$ per ogni $x \in P$ e $\alpha > 0$.
L'insieme di tutte le direzioni di recessione di un poliedro P è un cono convesso ed è denotato con $\text{rec}(P)$.

Esempio. $(1, 1)$ è una direzione di recessione del poliedro

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \geq 1, \qquad x_2 \geq 1, \qquad x_1 + x_2 \geq 3\}.$$

Teorema

Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$, allora $\text{rec}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq 0\}$.

Direzioni di linealità

Definizione

Una direzione di linealità di un poliedro P è un vettore d tale che $x + \alpha d \in P$ per ogni $x \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'insieme di tutte le direzioni di linealità di un poliedro P è un sottospazio vettoriale ed è denotato con $\text{lineal}(P)$.

Esempio. $(1, 0)$ è una direzione di linealità del poliedro

$$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_2 \leq 2\}.$$

Direzioni di linealità

Definizione

Una direzione di linealità di un poliedro P è un vettore d tale che $x + \alpha d \in P$ per ogni $x \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'insieme di tutte le direzioni di linealità di un poliedro P è un sottospazio vettoriale ed è denotato con $\text{lineal}(P)$.

Esempio. $(1, 0)$ è una direzione di linealità del poliedro

$$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_2 \leq 2\}.$$

Teorema

Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\}$, allora $\text{lineal}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$.

Vertici

Definizione

Un punto x di un poliedro P è chiamato vertice se non esistono due punti $y, z \in P$ diversi da x tali che x è combinazione convessa di y e z.

Esempi.

I vertici di $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_1 \leq 4, \ 1 \leq x_2 \leq 3\}$ sono $(1,1)$, $(1,3)$, $(4,1)$ e $(4,3)$.
I vertici di $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$ sono $(1,2)$ e $(2,1)$.
Il poliedro $P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_2 \leq 2\}$ non ha vertici.

Teorema

Un poliedro P ha vertici se e solo se $\text{lineal}(P) = \{0\}$.

Teorema di decomposizione dei poliedri

Teorema

Se P è un poliedro, allora esistono un sottoinsieme finito $\{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $\{d^1, \dots, d^q\}$ di direzioni di recessione di P tali che

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \underbrace{\text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}}_{\text{rec}(P)}.$$

Teorema di decomposizione dei poliedri

Teorema

Se P è un poliedro, allora esistono un sottoinsieme finito $\{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $\{d^1, \dots, d^q\}$ di direzioni di recessione di P tali che

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \underbrace{\text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}}_{\text{rec}(P)}.$$

Corollario 1. Se $\text{lineal}(P) = \{0\}$, allora $v^1, \dots, v^m$ sono i vertici di P.
Corollario 2. Se P è un poliedro limitato, allora $P = \text{conv}(V)$, dove V è l'insieme dei suoi vertici.

Teorema di decomposizione dei poliedri

Teorema

Se P è un poliedro, allora esistono un sottoinsieme finito $\{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $\{d^1, \dots, d^q\}$ di direzioni di recessione di P tali che

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \underbrace{\text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}}_{\text{rec}(P)}.$$

Corollario 1. Se lineal$(P) = \{0\}$, allora $v^1, \dots, v^m$ sono i vertici di P.
Corollario 2. Se P è un poliedro limitato, allora $P = \text{conv}(V)$, dove V è l'insieme dei suoi vertici.

Esercizio. Scrivere la decomposizione dei seguenti poliedri:
$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_2 \leq 3\}$
$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$
$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_2 \leq 2\}$

Teorema fondamentale della PL

Consideriamo un problema di PL in forma canonica

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\} \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

Teorema fondamentale della PL

Supponiamo che la regione ammissibile $P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}$.

- Il valore ottimo di $(\mathcal{P})$ è finito se e solo se $c^T d^j \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, q$, cioè nessuna direzione di recessione di P è una direzione di crescita.
- Se il valore ottimo di $(\mathcal{P})$ è finito, allora esiste un indice $i \in \{1, \dots, m\}$ tale che v^i è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$.

Corollario. Se il poliedro P è limitato, allora un suo vertice è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$.

Teorema fondamentale della PL

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Sappiamo che $P = \text{conv}\{(1,2),(2,1)\} + \text{cono}\{(1,0),(0,1)\}$.
Il valore ottimo è $+\infty$ poiché la direzione di recessione $d = (1,0)$ è una direzione di crescita, cioè $(2,-3)^T(1,0) = 2 > 0$.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ -2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Il valore ottimo è finito perché nessuna delle due direzioni di recessione $(1,0)$ e $(0,1)$ è di crescita, cioè $(-2,-3)^T(1,0) = -2$ e $(-2,-3)^T(0,1) = -3$.
La soluzione ottima è il vertice $(2,1)$.

Problema duale

Consideriamo un problema di PL forma camonica

$$\begin{cases} \max \; c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\} \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

che d'ora in poi sarà chiamato problema primale.

Definizione

Il problema di PL definito come

$$\begin{cases} \min \; y^T b \\ y \in D = \{y \in \mathbb{R}^m : \; y^T A = c^T, \quad y \geq 0\} \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

è chiamato problema duale di $(\mathcal{P})$.

	Primale	Duale
Obiettivo	max	min
Variabili	n	m
Vincoli	m	n

Problema duale

Esempio. Il problema duale di

$$\begin{cases} \max \ 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (\mathcal{P})$$

è il problema

$$\begin{cases} \min \ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + y_3 = 4 \\ y_2 + y_3 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

Proprietà del problema duale

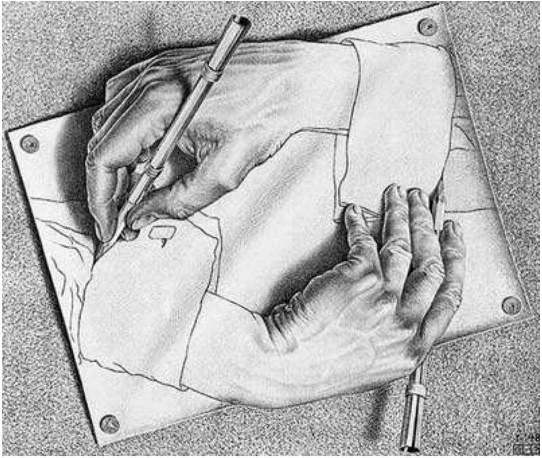
Perché è chiamato duale?

Proprietà del problema duale

Perché è chiamato duale?

Teorema

Il duale di $(\mathcal{D})$ è equivalente al problema $(\mathcal{P})$.



M.C. Escher, Drawing Hands, 1948.

Proprietà del problema duale

Lemma di Farkas

I sistemi

$$\begin{cases} c^T x > 0 \\ Ax \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

sono in alternativa, cioè se uno ammette soluzioni allora l'altro non ha soluzioni.

In termini di PL, il Lemma di Farkas equivale a dire che nel problema primale esiste una direzione di recessione che è anche di crescita se e solo se la regione ammissibile del problema duale è vuota.

Proprietà del problema duale

Esempio. Consideriamo il problema primale

$$\begin{cases} \max \ 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 \leq -1 \\ -x_2 \leq -1 \\ -x_1 - x_2 \leq -3 \end{cases}$$

Sappiamo che esiste una direzione di recessione che è di crescita. Verifichiamo ora che il suo problema duale ha la regione ammissibile vuota. Il duale è

$$\begin{cases} \min \ -y_1 - y_2 - 3y_3 \\ -y_1 - y_3 = 2 \\ -y_2 - y_3 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Il primo vincolo di uguaglianza implica che $y_3 = -y_1 - 2 \leq -2$ che non è compatibile con la condizione $y_3 \geq 0$, quindi non esistono soluzioni ammissibili del problema duale.

Proprietà del problema duale

Esempio. Consideriamo il problema primale

$$\begin{cases} \max \ -2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 \leq -1 \\ -x_2 \leq -1 \\ -x_1 - x_2 \leq -3 \end{cases}$$

Sappiamo che non esistono direzioni di recessione che sono di crescita. Verifichiamo ora che il suo problema duale ha la regione ammissibile non vuota. Il duale è

$$\begin{cases} \min \ -y_1 - y_2 - 3y_3 \\ -y_1 - y_3 = -2 \\ -y_2 - y_3 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dai due vincoli di uguaglianza si ottiene che $y_2 = y_1 + 1$ e $y_3 = 2 - y_1$. Esistono infinite soluzioni ammissibili del duale, ad esempio $y = (0, 1, 2)$.

Proprietà del problema duale

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\} \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

in cui la regione ammissibile $P \neq \emptyset$.

Teorema di dualità forte

- Se il poliedro duale $D = \emptyset$, allora il valore ottimo del primale $v(\mathcal{P}) = +\infty$.
- Se il poliedro duale $D \neq \emptyset$, allora $v(\mathcal{P})$ è finito e $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D})$.

Proprietà del duale

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \min \; y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Qual è il suo valore ottimo?

Proprietà del duale

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \min \; y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{*}$$

Qual è il suo valore ottimo? Questo problema è il duale di

$$\begin{cases} \max \; 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \end{cases}$$

che è facile da risolvere graficamente: la soluzione ottima è $(1, 0)$ ed il valore ottimo è 2.
Il teorema di dualità forte garantisce che anche il valore ottimo di (*) è 2.

Condizioni di ottimalità

Come riconoscere una soluzione ottima?

Condizioni di ottimalità

Come riconoscere una soluzione ottima?

Teorema (degli scarti complementari)

Supponiamo che $\bar{x}$ sia una soluzione ammissibile del primale $(\mathcal{P})$.
Allora $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ del sistema

$$\begin{cases} \bar{y}^T A = c^T & \text{(ammissibilità} \\ \bar{y} \geq 0 & \text{duale)} \\ \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 & \text{(scarti complementari)} \end{cases}$$

Qualunque soluzione $\bar{y}$ di questo sistema è una soluzione ottima del duale $(\mathcal{D})$.

Scarti complementari

Esempio. Dire se $\bar{x} = (1, 1)$ è ottima per il problema

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y \geq 0 \\ y^T(0, 0, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y_3 = y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 = 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Poiché $\bar{y} = (2/3, 5/3, 0, 0)$ è una soluzione del sistema, $\bar{x}$ è ottima.

Scarti complementari

Esempio. Dire se $\bar{x} = (0,0)$ è ottima per il problema

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y \geq 0 \\ y^T(3,3,0,0) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = 0 \\ y_3 = -3 \\ y_4 = -4 \\ y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

che è impossibile, quindi $\bar{x}$ non è ottima.

Scarti complementari

Esercizio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ \alpha x_1 + 4x_2 \\ 2x1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Per quali valori di α il vettore $\bar{x} = (1, 1)$ è ottimo?

Esercizio. Trovare tutte le soluzioni ottime del problema

$$\begin{cases} \max\ 4x_1 + 7x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 \leq -1 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq -3 \end{cases}$$

e del suo duale utilizzando il teorema degli scarti complementari.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se $P \neq \emptyset$ e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale.
I vertici di un poliedro sono definiti in modo geometrico $\rightarrow$ abbiamo bisogno di proprietà algebriche dei vertici.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se $P \neq \emptyset$ e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale.
I vertici di un poliedro sono definiti in modo geometrico $\rightarrow$ abbiamo bisogno di proprietà algebriche dei vertici.
Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

dove A è una matrice $m \times n$ con $\text{rank}(A) = n$ (e quindi $\text{lineal}(P) = \{0\}$).
[Questa ipotesi non è restrittiva perché ogni problema di PL è equivalente ad uno in cui le variabili $x \geq 0$, ponendo eventualmente $x = y - z$ con $y, z \geq 0$.]

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se $P \neq \emptyset$ e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale.
I vertici di un poliedro sono definiti in modo geometrico $\rightarrow$ abbiamo bisogno di proprietà algebriche dei vertici.
Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

dove A è una matrice $m \times n$ con $\text{rank}(A) = n$ (e quindi $\text{lineal}(P) = \{0\}$).
[Questa ipotesi non è restrittiva perché ogni problema di PL è equivalente ad uno in cui le variabili $x \geq 0$, ponendo eventualmente $x = y - z$ con $y, z \geq 0$.]

Definizione

Una base è un insieme B di n indici di riga tali che la sottomatrice A_B sia invertibile, cioè $\det(A_B) \neq 0$. Indichiamo con N l'insieme degli indici non in base.

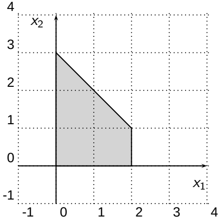
$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}$$

Data una base B, il vettore $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ è chiamato soluzione di base primale.
$\bar{x}$ è ammissibile se $A_N \bar{x} \leq b_N$. $\bar{x}$ è degenere se esiste $i \in N$ tale che $A_i \bar{x} = b_i$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

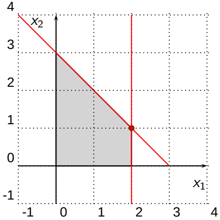
Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max \ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo



$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

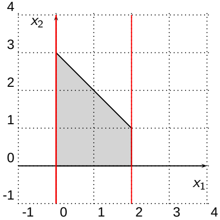
$\bar{x}$ è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

e non degenere perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{x}$ è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

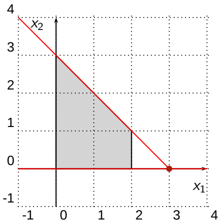
e non degenere perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

$B = \{1, 3\}$ non è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile: $\det(A_B) = 0$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{x}$ è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

e non degenere perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

$B = \{1, 3\}$ non è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile: $\det(A_B) = 0$.

$B = \{2, 4\}$ è una base e la relativa soluzione di base primale non è ammissibile:

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$ e non degenere.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Perché le soluzioni di base sono importanti?

Teorema

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$.
$\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ammissibile.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Perché le soluzioni di base sono importanti?

Teorema

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$.
$\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ammissibile.

Come riconoscere un vertice ottimo?

Definizione

Data una base B, il vettore $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0$

è chiamato soluzione di base duale.
$\bar{y}$ è ammissibile se $\bar{y}_B \geq 0$. $\bar{y}$ è degenere se esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i = 0$.

Teorema (condizione sufficiente di ottimalità)

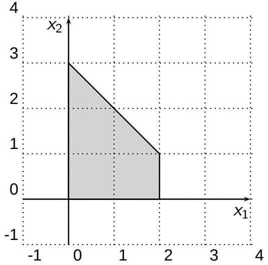
Sia $\bar{x}$ una soluzione di base primale ammissibile relativa alla base B.
Se la soluzione di base duale $\bar{y}$ relativa alla stessa base è ammissibile, allora $\bar{x}$ è ottima per il problema primale (e $\bar{y}$ è ottima per il duale).

Dim. $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono in scarti complementari, cioè $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

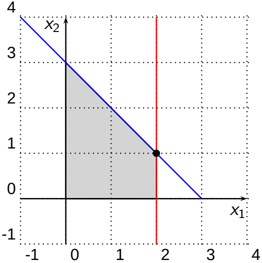
$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

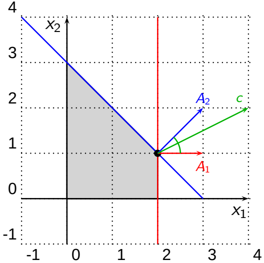


$\bar{x} = (2, 1)$ è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 2\}$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\bar{x} = (2, 1)$ è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 2\}$.
La soluzione di base duale relativa a B è

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \qquad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1), \qquad \bar{y}_N = 0.$$

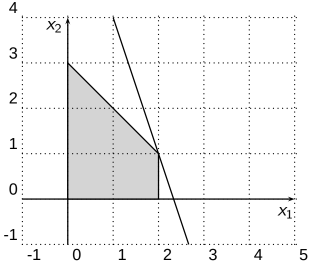
$\bar{y}$ è ammissibile perché $\bar{y}_B \geq 0$, ossia $c \in cono(A_1, A_2)$, quindi $\bar{x}$ è ottima.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

La condizione di ottimalità basata sull'ammissibilità della soluzione di base duale è sufficiente ma non necessaria.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

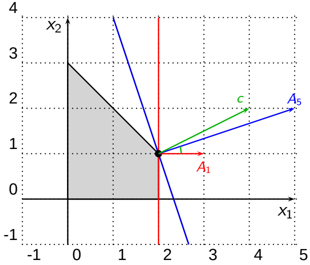


Caratterizzazione algebrica dei vertici

La condizione di ottimalità basata sull'ammissibilità della soluzione di base duale è sufficiente ma non necessaria.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\bar{x} = (2, 1)$ è ottima ed è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 5\}$. La soluzione di base duale relativa a B è

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \qquad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 1), \quad \bar{y}_N = 0.$$

$\bar{y}$ non è ammissibile perché $\bar{y}_1 < 0$, ossia $c \notin cono(A_1, A_5)$, ma $\bar{x}$ è ottima.

Algoritmo del simplesso primale

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

in cui $\text{rank}(A) = n$ e quindi esistono vertici (soluzioni di base ammissibili) del poliedro primale.

L'algoritmo del simplesso primale parte da un vertice del poliedro primale.

Se il vertice del poliedro duale corrispondente alla stessa base è ammissibile, allora il vertice primale è ottimo e l'algoritmo si ferma. Altrimenti l'algoritmo trova una direzione di crescita per il primale.

Se tale direzione è di recessione per il poliedro primale, allora il valore ottimo del primale è $+\infty$ e l'algoritmo si ferma.
Altrimenti l'algoritmo trova una nuova base, cambiando un solo indice rispetto alla vecchia base, in modo che la nuova soluzione di base primale rimanga ammissibile (il nuovo vertice primale è adiacente al vertice precedente).

E così via ...

Algoritmo del simplesso primale

1. Trova una base B tale che la relativa soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1}\, b_B$ sia ammissibile.
2. Calcola la soluzione di base duale

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$

3. **Se** $\bar{y}_B \geq 0$ **allora** STOP, $\bar{x}$ è ottima.
   altrimenti trova l'indice uscente

$$h = \min\{i \in B :\ \bar{y}_i < 0\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

   poni $W = -A_B^{-1}$ e denota W^h la h–esima colonna di W.
4. **Se** $A_i\, W^h \leq 0$ per ogni $i \in N$ **allora** STOP, valore ottimo del primale $= +\infty$.
   altrimenti calcola $\vartheta := \min \left\{ \dfrac{b_i - A_i\, \bar{x}}{A_i\, W^h} : \quad i \in N,\ A_i\, W^h > 0 \right\}$,
   trova l'indice entrante

$$k = \min \left\{ i \in N :\ A_i\, W^h > 0,\ \frac{b_i - A_i\, \bar{x}}{A_i\, W^h} = \vartheta \right\} \quad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

   aggiorna la base $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, calcola $\bar{x} = A_B^{-1}\, b_B$ e torna al passo 2.

Algoritmo del simplesso primale

Teorema

L'algoritmo del simplesso primale termina dopo un numero finito di iterazioni.

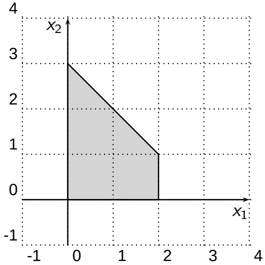
- Se il valore ottimo del problema è $+\infty$, l'algoritmo trova una direzione di recessione che è anche di crescita.
- Se il valore ottimo del problema è finito, l'algoritmo trova un vertice ottimo.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

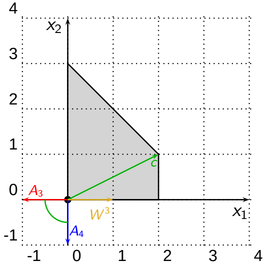
partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.



Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

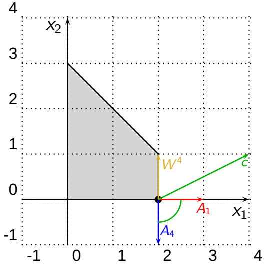
Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = 1$, $A_2 W^3 = 1$,

$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $k = 1$.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema



$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = 1$, $A_2 W^3 = 1$,
$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $k = 1$.

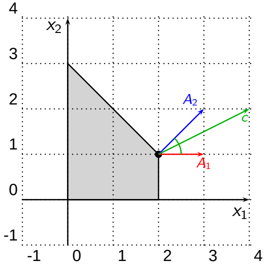
Iterazione 2. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1)$, $h = 4$, $W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_2 W^4 = 1$, $A_3 W^4 = 0$, $k = 2$.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = 1$, $A_2 W^3 = 1$,
$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $k = 1$.

Iterazione 2. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1)$, $h = 4$, $W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_2 W^4 = 1$, $A_3 W^4 = 0$, $k = 2$.

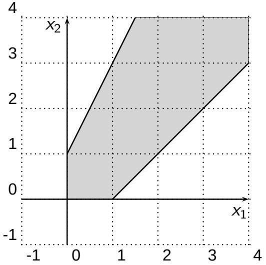
Iterazione 3. $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (1, 1) \geq 0$ stop, $\bar{x}$ è ottimo.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

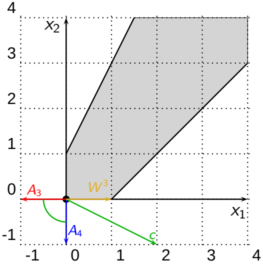
partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.



Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



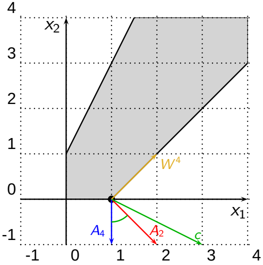
partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, -1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, 1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = -2$, $A_2 W^3 = 1$, $k = 2$.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema



$$\begin{cases} \max\ 2x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, -1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, 1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = -2$, $A_2 W^3 = 1$, $k = 2$.

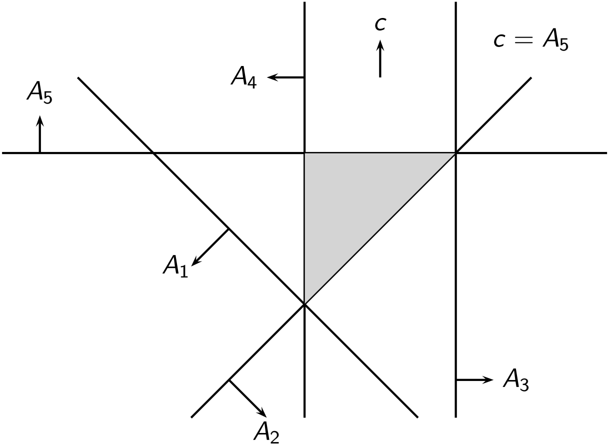
Iterazione 2. $B = \{2, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{y}_B^T = (2, -1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1)$, $h = 4$, $W^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_1 W^4 = -1$, $A_3 W^4 = -1$ stop, il valore ottimo è $+\infty$.

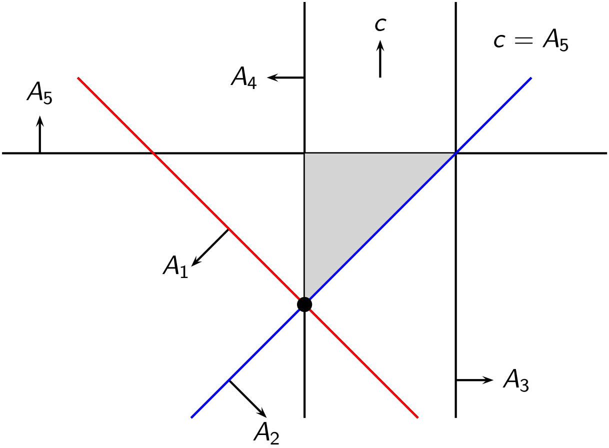
Esercizio. Verificare che il problema duale ha la regione ammissibile vuota.

Algoritmo del simplesso primale

Esercizio. Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del simplesso primale il problema di PL in figura, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione, trovare la base, la soluzione di base primale, il segno delle componenti della soluzione di base duale, l'indice uscente, la direzione di spostamento, l'indice entrante.

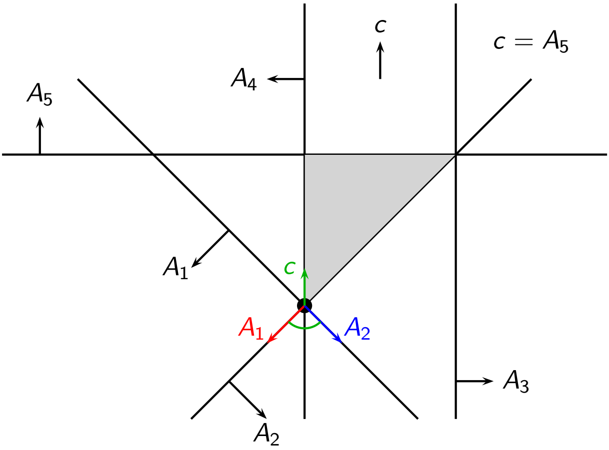


Algoritmo del simplesso primale



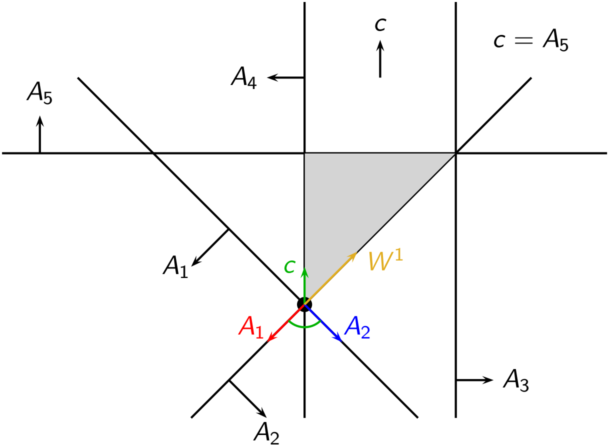
Iterazione 1. $B = \{1, 2\}$, $\bar{x}$ indicata in figura,

Algoritmo del simplesso primale



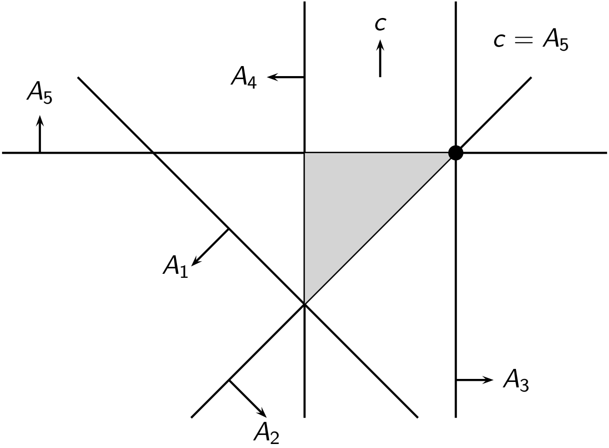
Iterazione 1. $B = \{1, 2\}$, $\bar{x}$ indicata in figura, $c \in \operatorname{int} \operatorname{cono}(-A_1, -A_2)$, quindi $\bar{y}_1 < 0$, $\bar{y}_2 < 0$.

Algoritmo del simplesso primale



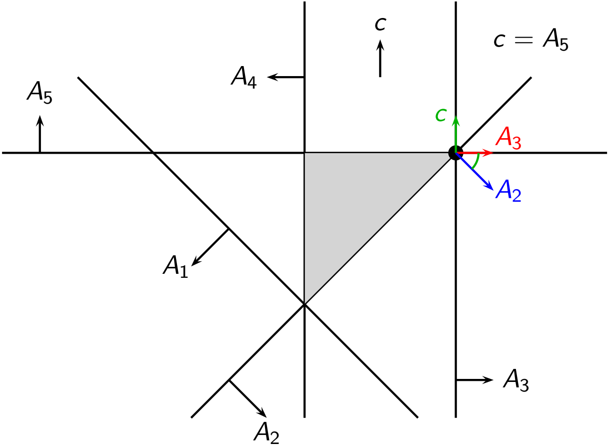
Iterazione 1. $B = \{1, 2\}$, $\bar{x}$ indicata in figura, $c \in \operatorname{int} \operatorname{cono}(-A_1, -A_2)$, quindi $\bar{y}_1 < 0$, $\bar{y}_2 < 0$. Indice uscente $h = 1$, W^1 indicata in figura, indice entrante $k = \min\{3, 5\} = 3$.

Algoritmo del simplesso primale



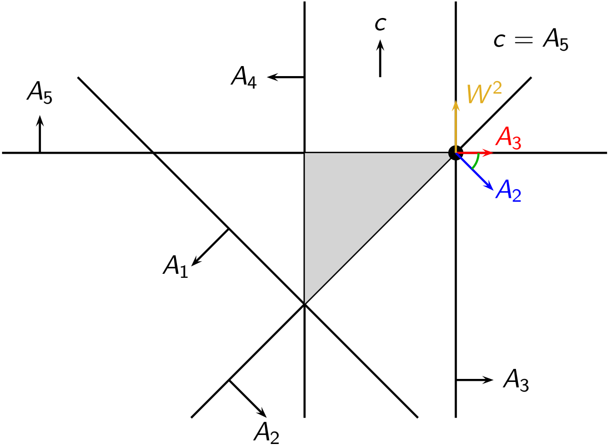
Iterazione 2. $B = \{2, 3\}$, $\bar{x}$ indicata in figura,

Algoritmo del simplesso primale



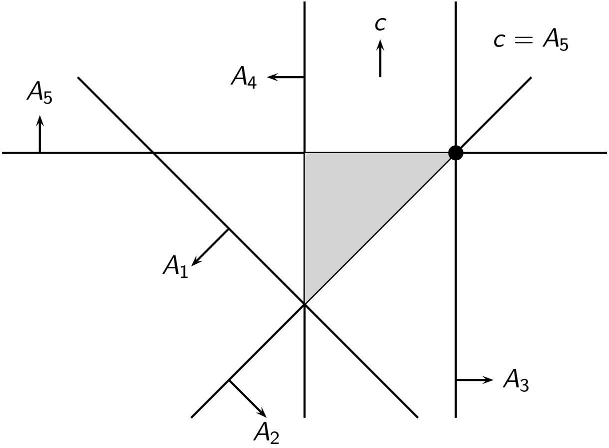
Iterazione 2. $B = \{2, 3\}$, $\bar{x}$ indicata in figura, $c \in \operatorname{int} \text{cono}(-A_2, A_3)$, quindi $\bar{y}_2 < 0$, $\bar{y}_3 > 0$.

Algoritmo del simplesso primale



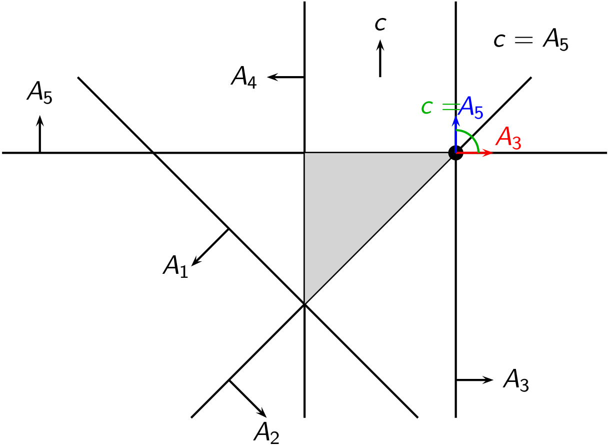
Iterazione 2. $B = \{2, 3\}$, $\bar{x}$ indicata in figura, $c \in \operatorname{int} \operatorname{cono}(-A_2, A_3)$, quindi $\bar{y}_2 < 0$, $\bar{y}_3 > 0$. Indice uscente $h = 2$, W^2 indicata in figura, indice entrante $k = 5$.

Algoritmo del simplesso primale



Iterazione 3. $B = \{3, 5\}$, $\bar{x}$ indicata in figura,

Algoritmo del simplesso primale



Iterazione 3. $B = \{3, 5\}$, $\bar{x}$ indicata in figura, $c = A_5$, quindi $\bar{y}_3 = 0$, $\bar{y}_5 = 1$, stop $\bar{x}$ è ottima.

Algoritmo del simplesso duale

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

in cui $\text{rank}(A) = n$ e quindi esistono vertici del poliedro primale.

L'algoritmo del simplesso duale parte da un vertice del poliedro duale.

Se il vertice del poliedro primale corrispondente alla stessa base è ammissibile, allora il vertice primale è ottimo e l'algoritmo si ferma. Altrimenti l'algoritmo trova una direzione di decrescita per il duale.

Se tale direzione è di recessione per il poliedro duale, allora la regione ammissibile del primale è vuota e l'algoritmo si ferma.
Altrimenti l'algoritmo trova una nuova base, cambiando un solo indice rispetto alla vecchia base, in modo che la nuova soluzione di base duale rimanga ammissibile (il nuovo vertice duale è adiacente al vertice precedente).

E così via ...

Algoritmo del simplesso duale

1. Trova una base B tale che la relativa soluzione di base duale

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0,$$

sia ammissibile.

2. Calcola la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1}\, b_B$.
3. **Se** $A_N \bar{x} \leq b_N$ **allora** STOP, $\bar{x}$ è ottima.
altrimenti trova l'indice entrante

$$k = \min\{i \in N : \ A_i \bar{x} > b_i\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

poni $\eta_B := A_k A_B^{-1}$.

4. **Se** $\eta_B \leq 0$ **allora** STOP, la regione ammissibile del primale è vuota.
altrimenti calcola $\vartheta = \min\left\{ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : \quad i \in B,\ \eta_i > 0 \right\}$,
trova l'indice uscente

$$h = \min\left\{ i \in B : \ \eta_i > 0,\ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} = \vartheta \right\} \quad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

aggiorna la base $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, calcola $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$ e torna al passo 2.

Algoritmo del simplesso duale

Teorema

L'algoritmo del simplesso duale termina dopo un numero finito di iterazioni.

- Se la regione ammissibile del primale è vuota, l'algoritmo trova una direzione di recessione per il duale che è anche di decrescita.
- Se la regione ammissibile del primale non è vuota, l'algoritmo trova un vertice ottimo.

Algoritmo del simplesso duale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ x_2 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con l'algoritmo del simplesso duale partendo dalla base $B = \{1, 2\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (0,1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0)$ quindi $\bar{y}$ è ammissibile. $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N,$$

$k = \min\{3,4,5\} = 3$, $\eta_B = A_3 A_B^{-1} = (-1,0)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-2,1)$, $h = 2$.

Algoritmo del simplesso duale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ x_2 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con l'algoritmo del simplesso duale partendo dalla base $B = \{1, 2\}$.

Iterazione 2. $B = \{1, 3\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{y}_B^T = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$k = \min\{4, 5\} = 4$, $\eta_B = A_4 A_B^{-1} = (-2, 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 2)$, $\vartheta = \min\{1, 0\} = 0$,

$h = 3$.

Algoritmo del simplesso duale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ x_2 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con l'algoritmo del simplesso duale partendo dalla base $B = \{1, 2\}$.

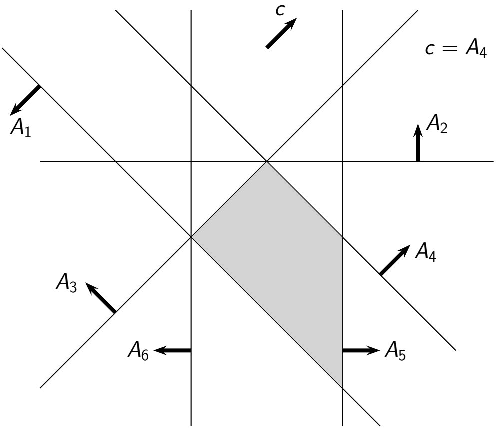
Iterazione 3. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$\bar{y}_B^T = (0, 1) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

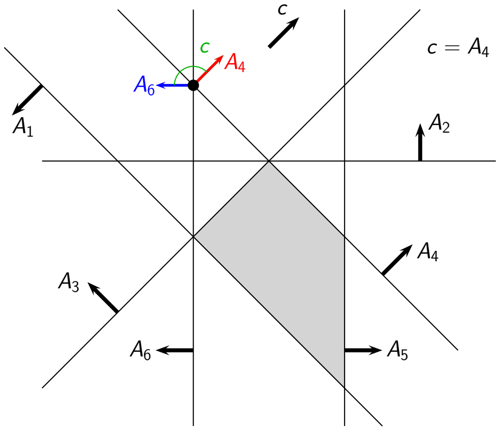
stop. $\bar{x} = (0, 4)$ è una soluzione ottima del primale e $\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 0)$ una soluzione ottima del duale.

Algoritmo del simplesso duale

Esercizio. Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del simplesso duale il problema di PL in figura, partendo dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione, trovare la base, la soluzione di base primale, l'indice entrante, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B, l'indice uscente.

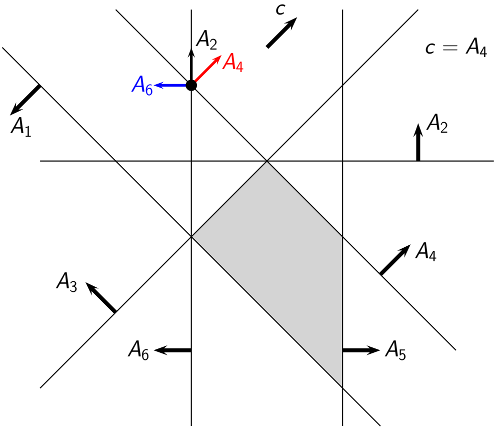


Algoritmo del simplesso duale



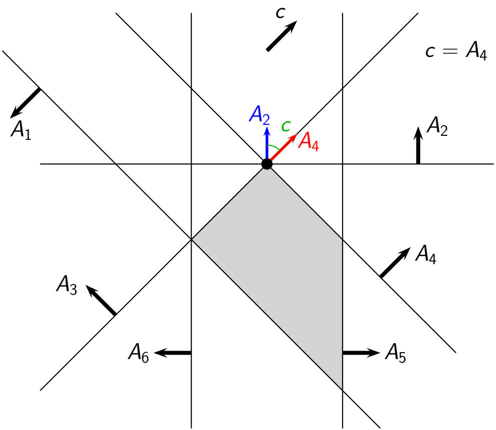
Iterazione 1. $B = \{4, 6\}$, $c = A_4$, quindi $\bar{y}_4 = 1$ e $\bar{y}_6 = 0$. $\bar{x}$ indicata in figura viola i vincoli 2 e 3, $k = \min\{2, 3\} = 2$.

Algoritmo del simplesso duale



Iterazione 1. $B = \{4, 6\}$, $c = A_4$, quindi $\bar{y}_4 = 1$ e $\bar{y}_6 = 0$. $\bar{x}$ indicata in figura viola i vincoli 2 e 3, $k = \min\{2, 3\} = 2$.
$A_2 \in \text{int cono}(A_4, A_6)$, quindi $\eta_4 > 0$, $\eta_6 > 0$. Poiché $0 = y_6/\eta_6 < y_4/\eta_4$, si ottiene $h = 6$.

Algoritmo del simplesso duale



Iterazione 2. $B = \{2, 4\}$, $c = A_4$, quindi $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_4 = 1$. $\bar{x}$ indicata in figura è ammissibile e quindi è ottima.