

RICERCA OPERATIVA - Modelli

1) Il capo della polizia privata SempreSecur deve decidere quanti poliziotti assegnare ai 24 turni di guardia nell'arco della giornata, sapendo che nell'ora j occorrono almeno $p(j)$ poliziotti in servizio, $j = 1, \dots, 24$. Ogni turno dura 8 ore, con la quinta ora di riposo. I 24 turni si distinguono per l'ora di inizio. Inoltre, per equilibrare le risorse, egli intende assegnare i poliziotti ai turni in modo che la differenza tra il numero di poliziotti assegnati al turno i e al turno $i + 1$ sia in valore assoluto non superiore ad una data soglia v , per $i = 1, \dots, 23$.

Si formuli il problema del capo della polizia in termini di P.L.I., con l'obiettivo di minimizzare il numero totale di poliziotti assegnati ai turni.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili intere x_i che indicano il numero di poliziotti assegnati al turno i , $i = 1, \dots, 24$. La relazione tra i turni e le ore in cui i poliziotti sono effettivamente in servizio è data dalla matrice 24×24 i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se i poliziotti assegnati al turno } i \text{ sono in servizio all'ora } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, 24.$$

Il numero totale di poliziotti assegnati ai turni (che deve essere minimizzato) è quindi: $\sum_{i=1}^{24} x_i$.

I vincoli che garantiscono la copertura minima richiesta sono: $\sum_{i=1}^{24} a_{ij}x_i \geq p(j)$, $j = 1, \dots, 24$.

I vincoli sulla distribuzione $|x_i - x_{i+1}| \leq v$, $i = 1, \dots, 23$, non lineari, possono venire equivalentemente espressi tramite l'insieme di vincoli lineari

$$x_i - x_{i+1} \leq v, \quad i = 1, \dots, 23$$

$$x_{i+1} - x_i \leq v, \quad i = 1, \dots, 23.$$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$(P) \quad \min \quad \sum_{i=1}^{24} x_i$$
$$\sum_{i=1}^{24} a_{ij}x_i \geq p(j) \quad j = 1, \dots, 24$$
$$x_i - x_{i+1} \leq v \quad i = 1, \dots, 23$$
$$x_{i+1} - x_i \leq v \quad i = 1, \dots, 23$$
$$x_i \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, \dots, 24$$

2) In seguito alla chiusura delle scuole, gli n bambini di un distretto scolastico devono essere assegnati a m campi estivi per trascorrere il periodo delle vacanze. E' noto il grado di preferenza, p_{ij} , del bambino i , per $i = 1, \dots, n$, nei confronti del campo estivo j , $j = 1, \dots, m$. Sia poi k il massimo numero di bambini che un singolo campo estivo può accogliere.

Per cercare di non scontentare troppo i bambini, si vuole determinare un assegnamento che massimizzi il minimo livello di preferenza associato ai campi estivi, dove il livello di preferenza di un campo estivo è definito come la somma dei gradi di preferenza dei bambini ad esso assegnati.

Si formuli il problema in termini di P.L.I.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili intere

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il bambino } i \text{ viene assegnato al campo estivo } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

Ciascun bambino deve venir assegnato ad un campo estivo:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Un singolo campo estivo può ospitare al massimo k bambini:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq k, \quad j = 1, \dots, m.$$

Il livello di preferenza del campo estivo j è dato da:

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} x_{ij}.$$

Quindi per massimizzare il minimo di queste quantità è sufficiente introdurre una nuova variabile v (il cui valore andrà massimizzato) ed introdurre i vincoli

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} x_{ij} \geq v \quad j = 1, \dots, m.$$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$(P) \quad \max \quad v$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq k, \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} x_{ij} \geq v, \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

3) Durante una serata di beneficenza per la raccolta di fondi per finanziare le ricerche in Ricerca Operativa, vengono messi in vendita n oggetti donati dalle squadre di calcio di serie A. Alla serata partecipano m imprenditori con $m \leq 2n$; ciascun imprenditore $i, i = 1, \dots, m$, indica l'insieme $O(i)$ di oggetti che intende comprare e la somma massima q_i che è disposto a spendere, fornendo anche il prezzo c_{ij} che è disposto a pagare per ciascun oggetto $j \in O(i)$. Il comitato organizzatore decide quindi di assegnare gli oggetti agli imprenditori in modo da vendere tutti gli oggetti massimizzando il profitto della serata, rispettando le indicazioni da loro date e garantendo che a ciascun imprenditore siano assegnati almeno due oggetti.

Formulare il problema come problema di P.L.I.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'oggetto } j \text{ viene assegnato all'imprenditore } i, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad j \in O(i).$$

Le variabili devono rispettare i seguenti insiemi di vincoli:

- ogni oggetto viene assegnato ad un imprenditore: $\sum_{i:j \in O(i)} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n;$
- ogni imprenditore non spende più di quanto deciso: $\sum_{j \in O(i)} c_{ij} x_{ij} \leq q_i, \quad i = 1, \dots, m;$
- ogni imprenditore acquista almeno due oggetti: $\sum_{j \in O(i)} x_{ij} \geq 2, \quad i = 1, \dots, m.$

La funzione obiettivo, da massimizzare, è data dal profitto globale della serata: $\sum_{i=1}^m \sum_{j \in O(i)} c_{ij} x_{ij}.$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$(P) \quad \max \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j \in O(i)} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i:j \in O(i)} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j \in O(i)} c_{ij} x_{ij} \leq q_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j \in O(i)} x_{ij} \geq 2 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, m, \quad j \in O(i).$$

4) Un'azienda vinicola ha n clienti, ognuno dei quali richiede b_i casse di vino, $i = 1, \dots, n$. L'azienda decide di costruire p cantine per rendere efficiente la distribuzione del vino ai clienti. Ognuna delle p cantine può essere costruita con capacità U oppure u (esprese come numero di casse di vino). Per ogni cantina di capacità U , l'azienda sosterrà un costo di costruzione pari a c_1 , mentre per ogni cantina di capacità u l'azienda sosterrà un costo di costruzione pari a c_2 . Sia c_{ij} il costo sostenuto dall'azienda nel caso in cui il cliente i si rifornisca dalla cantina j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire le capacità delle p cantine, e decidere l'assegnamento dei clienti alle cantine (ogni cliente va assegnato ad una sola cantina), in modo da soddisfare le richieste dei clienti e rispettare i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale sostenuto dall'azienda.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti np variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cliente } i \text{ è assegnato alla cantina } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p.$$

I vincoli di semiassegnamento, che garantiscono che ogni cliente sia assegnato ad una ed una sola cantina, sono:

$$\sum_{j=1}^p x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Introduciamo inoltre p variabili logiche, per decidere la capacità delle p cantine:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se la cantina } j \text{ è costruita con capacità } U, \\ 0, & \text{se la cantina } j \text{ è costruita con capacità } u, \end{cases} \quad j = 1, \dots, p.$$

Devono essere rispettati i seguenti vincoli di capacità:

$$\sum_{i=1}^n b_i x_{ij} \leq U y_j + u(1 - y_j), \quad j = 1, \dots, p.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dal costo totale di assegnamento più il costo totale di costruzione delle p cantine:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^p (c_1 y_j + c_2(1 - y_j))$$

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^p (c_1 y_j + c_2(1 - y_j)) \\ & \sum_{j=1}^p x_{ij} = 1 && i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n b_i x_{ij} \leq U y_j + u(1 - y_j) && j = 1, \dots, p \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p \\ & y_j \in \{0, 1\} && j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

5) Si consideri una rete logistica descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$: N è l'insieme dei nodi logistici, mentre A è l'insieme dei collegamenti potenziali tra i nodi. Il gestore della rete deve decidere quali collegamenti attivare (e, quindi, poter utilizzare) per inviare d bancali dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$. Se attivato, sul collegamento $(i, j) \in A$ possono essere inviati al più u_{ij} bancali.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere quali collegamenti attivare, e come effettuare l'invio dei d bancali utilizzando i collegamenti attivati, in modo da minimizzare il massimo numero di bancali inviati su ciascun collegamento della rete.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il collegamento } (i, j) \text{ viene attivato,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (i, j) \in A.$$

Introduciamo inoltre variabili di flusso $x_{ij} \geq 0$, intere, dove x_{ij} indica il numero di bancali inviati sul collegamento $(i, j) \in A$. L'invio di d bancali dal nodo s al nodo t può essere espresso mediante i seguenti vincoli di conservazione di flusso:

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -d, & i = s \\ 0, & i \in N, i \neq s, t \\ d, & i = t \end{cases}$$

Per garantire che si possa effettuare un invio lungo un collegamento (i, j) solo se (i, j) è stato attivato, rispettando il relativo vincolo di capacità, introduciamo i seguenti vincoli:

$$x_{ij} \leq u_{ij}y_{ij}, \quad (i, j) \in A.$$

Per stimare il massimo numero di bancali inviato sui collegamenti della rete, introduciamo una variabile ausiliaria v , ed introduciamo i vincoli

$$x_{ij} \leq v, \quad (i, j) \in A.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è v . La formulazione del problema è pertanto:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ & \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -d, & i = s \\ 0, & i \in N, i \neq s, t \\ d, & i = t \end{cases} \\ & x_{ij} \leq u_{ij}y_{ij} \quad (i, j) \in A \\ & x_{ij} \leq v \quad (i, j) \in A \\ & y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad (i, j) \in A. \end{aligned}$$

6) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. Il gestore della rete deve inviare un messaggio da un nodo sorgente $s \in N$ ad un nodo destinazione $t \in N$. Per velocizzare l'invio, ed evitare conflitti lungo i link della rete, il gestore decide di suddividere il messaggio in due pacchetti, e di inviare i due pacchetti simultaneamente lungo due cammini di G da s a t formati da archi tra loro disgiunti. Indicando con t_{ij} il tempo di transito lungo la linea (i, j) , si formuli in termini di P.L.I. il problema di inviare i due pacchetti da s a t lungo due cammini disgiunti del grafo, in modo tale da minimizzare il tempo in cui l'intero messaggio giunge a destinazione, ossia il massimo tra i tempi di arrivo dei due pacchetti in t (si assuma che il gestore invii simultaneamente i due pacchetti dal nodo s al tempo zero).

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo i seguenti due gruppi di variabili di flusso:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se la linea } (i, j) \in A \text{ è utilizzata per inviare il pacchetto } k \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (i, j) \in A, k = 1, 2.$$

Introduciamo inoltre una variabile di soglia z che rappresenta una valutazione superiore del massimo dei tempi di arrivo dei due pacchetti in t .

Il problema può essere formulato come segue:

$$(P) \quad \begin{aligned} & \min \quad z \\ & \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s, \\ 1 & \text{se } i = t, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i \in N, k = 1, 2 \\ & x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq 1 \quad (i, j) \in A \\ & \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij}^1 \leq z \\ & \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij}^2 \leq z \\ & x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A, k = 1, 2 \end{aligned}$$

Il primo blocco di vincoli (di conservazione del flusso per i due flussi $\{x_{ij}^1\}$ e $\{x_{ij}^2\}$) esprime la richiesta relativa all'invio dei due pacchetti da s a t . Il secondo blocco di vincoli garantisce che i due cammini di G utilizzati siano formati da sottoinsiemi di archi tra loro disgiunti. Infine, gli ultimi due vincoli impongono che z sia una valutazione superiore del tempo di arrivo in t di entrambi i pacchetti: minimizzando z si minimizza il tempo di arrivo dell'intero messaggio al nodo t .

7) Si formuli, in termini di P.L.I., il problema di minimizzare il costo mensile di stoccaggio $c(x)$ di un'azienda, che vale 0 nel caso in cui la quantità x di merce stoccata in magazzino sia compresa tra 0 e 10 bancali, ed è invece definito dalla funzione lineare $50 + x$ nel caso in cui il numero x di bancali stoccati sia maggiore di 10 e minore o uguale della capacità del magazzino, che è pari a 100 bancali. Per esigenze di produzione l'azienda necessita di stoccare almeno L bancali al mese. Si dimostri la correttezza della formulazione proposta.

SVOLGIMENTO

Il costo di stoccaggio dell'azienda è definito come:

$$c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 50 + x, & \text{se } 10 < x \leq 100. \end{cases}$$

$c(x)$ è una funzione lineare a tratti, con due tratti, da minimizzare. La peculiarità di tale funzione è che essa vale zero nel primo tratto ($0 \leq x \leq 10$). Il problema può essere formulato introducendo una variabile decisionale y che distingue il caso in cui il numero x di bancali in magazzino appartenga al primo intervallo, vale a dire $0 \leq x \leq 10$ ($y = 0$), dal caso in cui il numero di bancali appartenga all'intervallo $10 \leq x \leq 100$ ($y = 1$). Per distinguere inoltre la variabilità di x nel primo e nel secondo intervallo introduciamo una variabile z_1 , che descrive la quantità di stock x nel primo intervallo, ed una variabile z_2 , che descrive la quantità di stock x nel secondo intervallo. Introduciamo pertanto i vincoli $0 \leq z_1 \leq 10(1 - y)$ e $10y \leq z_2 \leq 100y$. Essendo mutuamente esclusivi, il legame tra x , z_1 e z_2 è espresso da $x = z_1 + z_2$. Bisogna inoltre imporre che la quantità stoccata sia maggiore o uguale a L : $z_1 + z_2 \geq L$. La funzione obiettivo, da minimizzare, è $g(z_1, z_2, y) = 50y + z_2$. Si ottiene quindi la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad 50y + z_2 \\ & 0 \leq z_1 \leq 10(1 - y) \\ & 10y \leq z_2 \leq 100y \\ & z_1 + z_2 \geq L \\ & y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Dimostrazione di correttezza

Quando $y = 0$ si ha $0 \leq z_1 \leq 10$ mentre $z_2 = 0$: la quantità x di merce in magazzino varia quindi nel primo intervallo ($x = z_1$). Il corrispondente valore della funzione obiettivo è $g(z_1, 0, 0) = 0$, in accordo con $c(x)$.

Quando invece $y = 1$ si ha $z_1 = 0$ mentre $10 \leq z_2 \leq 100$: la quantità x di merce in magazzino varia quindi nel secondo intervallo ($x = z_2$). In corrispondenza di tali valori di x la funzione obiettivo assume l'andamento lineare $g(0, z_2, 1) = 50 + z_2$, vale a dire $50 + x$, in accordo con $c(x)$ per $x > 10$. Osserviamo che il punto di discontinuità, $x = 10$, è rappresentato in (P) in modo duplice:

- $(z_1, z_2, y) = (10, 0, 0)$: in tal caso $g(10, 0, 0) = c(10) = 0$;
- $(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$: in tal caso $g(0, 10, 1) = 60 > c(10) = 0$;

$(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$ non è pertanto una rappresentazione corretta di $x = 10$. Poichè tuttavia $g(z_1, z_2, y)$ viene minimizzata, e $g(0, 10, 1) = 60 > g(10, 0, 0) = 0$, la rappresentazione $(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$ non può costituire la soluzione ottima, e quindi l'ambiguità della rappresentazione di $x = 10$ è risolta a livello di ottimizzazione. (P) è quindi una rappresentazione corretta del problema.

8) Si consideri una rete logistica descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. La ditta *GoOn* vuole organizzare una spedizione lungo tale rete. Specificatamente, deve inviare b pacchi dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$. Per motivi gestionali, *GoOn* richiede che il numero dei nodi della rete interessati dal transito dei pacchi, a parte s e t , non sia superiore a K .

Noto il numero massimo di pacchi u_{ij} inviabili lungo il collegamento $(i, j) \in A$, e noto il costo unitario di invio c_{ij} lungo (i, j) , si formuli in termini di P.L.I. il problema di effettuare l'invio da s a t a costo minimo, rispettando la capacità dei collegamenti ed il vincolo relativo al numero di nodi interessati dal transito.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo le variabili di flusso x_{ij} , che indicano il numero di pacchi inviati lungo il collegamento $(i, j) \in A$. Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ è interessato dal transito} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i \in N \setminus \{s, t\}.$$

Il problema può essere formulato come segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} 0, & i \in N, i \neq s, t \\ -b, & i = s \\ b, & i = t \end{cases} \\ & \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} \leq b y_i \quad i \in N \setminus \{s, t\} \\ & \sum_{i \in N \setminus \{s, t\}} y_i \leq K \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i, j) \in A \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad (i, j) \in A \\ & y_i \in \{0, 1\} \quad i \in N \setminus \{s, t\} \end{aligned}$$

Il primo blocco di vincoli garantisce l'invio di b pacchi da s a t . Il secondo blocco di vincoli garantisce che, se un nodo $i \in N \setminus \{s, t\}$ è interessato dal transito dei pacchi (quindi nel nodo i entra un flusso positivo), allora la variabile y_i sia forzata ad assumere il valore 1. Il terzo vincolo assicura che il numero di nodi interessati dal transito, salvo s e t , sia al più K . L'ultimo blocco di vincoli garantisce il rispetto delle capacità dei collegamenti. Infine, la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il costo complessivo di invio.

9) Dopo avere finalmente superato l'esame di Ricerca Operativa, Tommaso è pronto per partire in vacanza. Tommaso sceglie n oggetti che desidera portare con sé, e si pone il problema di mettere tali oggetti nel suo set di m valigie, tutte identiche tra loro. Individua tre sottoinsiemi di oggetti critici per il trasporto, vale a dire l'insieme S delle paia di scarpe, l'insieme A degli abiti facilmente spiegazzabili, e l'insieme I degli oggetti per l'igiene personale. Per ovvie ragioni decide che nessun paio di scarpe possa essere inserito in valigia insieme ad un oggetto di igiene personale, e neppure insieme ad un abito spiegazzabile.

Sapendo che l'oggetto i ha peso p_i , e che ogni valigia è in grado di contenere oggetti per un peso complessivo pari a P , si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere come mettere gli oggetti nelle valigie minimizzando il numero di valigie utilizzate, nel rispetto dei vincoli di peso e dei vincoli di compatibilità tra oggetti.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili di assegnamento x_{ij} tali che:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'oggetto } i \text{ vien inserito nella valigia } j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Introduciamo inoltre le variabili binarie y_j tali che:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se si utilizza la valigia } j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m.$$

Una formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^m y_j \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq P y_j \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} + x_{hj} \leq 1 \quad i \in S, \quad h \in I, \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} + x_{hj} \leq 1 \quad i \in S, \quad h \in A, \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Il primo blocco di vincoli rappresenta i vincoli di semiassegnamento (degli oggetti alle valigie). Il secondo blocco di vincoli garantisce il soddisfacimento dei vincoli di peso. Inoltre assicura che, se un oggetto viene assegnato ad una valigia j , questa venga utilizzata (e quindi $y_j = 1$). Il terzo blocco di vincoli costituisce i vincoli di compatibilità tra le scarpe, gli abiti spiegazzabili e gli oggetti per l'igiene personale. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il numero totale di valigie utilizzate.

10) La ditta *FastShip* deve caricare n bancali su una nave avente m stive. Sono noti il peso p_i del bancale i e la capacità u_j della stiva j . Per motivi di stabilità del carico della nave, la stiva 1 e la stiva m devono essere necessariamente utilizzate. Inoltre, la differenza in valore assoluto tra il peso totale degli oggetti caricati in tali due stive non deve eccedere una soglia di tolleranza prefissata ε .

Sapendo che l'utilizzo della stiva j comporta il pagamento di un costo di manutenzione f_j , e che il caricamento del bancale i nella stiva j richiede un costo di caricamento c_{ij} , si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come caricare i bancali nelle stive della nave, in modo da rispettare il vincolo di stabilità del carico ed i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale derivante dalla manutenzione delle stive e dalle operazioni di caricamento.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il bancale } i \text{ viene caricato nella stiva } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se la stiva } j \text{ viene utilizzata} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad j = 2, \dots, m-1.$$

Utilizzando tali variabili logiche, il problema può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=2}^{m-1} f_j y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 && i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq u_j y_j && j = 2, \dots, m-1 \\ & \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq u_j && j = 1, m \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq 1 && j = 1, m \\ & \sum_{i=1}^n p_i x_{i1} - \sum_{i=1}^n p_i x_{im} \leq \varepsilon \\ & \sum_{i=1}^n p_i x_{im} - \sum_{i=1}^n p_i x_{i1} \leq \varepsilon \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} && i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, m-1 \end{aligned}$$

Il primo blocco di vincoli garantisce che ogni bancale sia caricato in una stiva. Il secondo blocco garantisce che ogni stiva j (con $j \neq 1, m$) sia caricata nel rispetto della propria capacità u_j : se utilizzata, il primo membro è positivo e quindi la variabile y_j deve necessariamente assumere valore 1. I successivi due gruppi di vincoli garantiscono che le stive 1 e m siano necessariamente utilizzate nel rispetto della propria capacità. Gli ultimi due gruppi di vincoli impongono che la differenza in valore assoluto tra il peso totale degli oggetti caricati nella stiva 1 ed il peso totale degli oggetti caricati nella stiva m sia minore od uguale a ε . Il costo totale è dato dalla somma dei costi di manutenzione delle stive utilizzate e dei costi di caricamento.

11) L'agenzia di smaltimento rifiuti *PulitiSubito* deve aprire k discariche in una importante regione italiana. A tal fine individua un insieme J di siti candidati all'apertura di una discarica, con $|J| \geq k$. L'agenzia censisce inoltre l'insieme I dei principali centri abitati della regione, e stima le distanze d_{ij} intercorrenti tra il centro abitato $i \in I$ e il sito candidato $j \in J$.

Considerando come discarica *critica* per il centro abitato $i \in I$ la discarica più vicina a i tra quelle aperte, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere dove aprire le k discariche in modo da massimizzare la somma delle distanze intercorrenti tra ogni centro abitato e la relativa discarica critica.

SVOLGIMENTO

Introducendo le variabili binarie

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'agenzia di smaltimento rifiuti decide di aprire una discarica nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad j \in J,$$

e le variabili ausiliarie z_i per stimare la distanza intercorrente tra $i \in I$ e la relativa discarica critica, il problema dell'agenzia *PulitiSubito* può essere formulato mediante il seguente modello di P.L.I.:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} z_i \\ & \sum_{j \in J} x_j = k \\ & x_j d_{ij} + M(1 - x_j) \geq z_i \quad i \in I, j \in J \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j \in J. \end{aligned}$$

Il primo vincolo impone che vengano aperte k discariche. Il secondo blocco di vincoli, in cui M è una costante opportuna, garantisce che z_i sia una stima per difetto della distanza intercorrente tra i e la relativa discarica critica (la più vicina a i). Infatti, se $x_j = 1$, ovvero in j è stata aperta una discarica, il vincolo relativo al centro abitato i garantisce che sia $z_i \leq d_{ij}$. Se invece $x_j = 0$, il vincolo risulta sempre soddisfatto se M viene scelta adeguatamente. Ad esempio, M può essere scelta uguale alla massima distanza tra i centri abitati e i siti candidati, ovvero $M = \max_{i \in I, j \in J} d_{ij}$. Alternativamente, è possibile scegliere una costante distinta $M_i = \max_{j \in J} d_{ij}$ per ogni centro abitato i .

Poiché la funzione obiettivo, da massimizzare, è espressa come la somma delle z_i , a livello di soluzione ottima z_i risulterà uguale alla distanza intercorrente tra i e la discarica più vicina a i , e la distanza totale tra i centri abitati e le relative discariche critiche verrà pertanto massimizzata.

12) Dopo la caduta del governo, il Grande Leader del Partito Azzurro sta attentamente pianificando la rivincita elettorale per la Grande Coalizione, che comprende anche gli alleati del Partito Nero. Il territorio nazionale è diviso in n collegi uninominali, in cui vince un seggio il candidato che ottiene il maggior numero di voti. Il Partito ha una lista di n personalità disposte a candidarsi, ed i sondaggisti del Grande Leader gli assicurano che la Coalizione vincerà in tutti i collegi uninominali, indipendentemente dal candidato prescelto. Il numero di voti che un candidato prende è anche rilevante ai fini della quota proporzionale: per ciascun collegio i e personalità j si conosce il numero di voti v_{ij} che il candidato prenderebbe se si presentasse in quel collegio, ed il partito riceverà un ulteriore seggio ogni δ voti ottenuti dai propri candidati eletti. Infine, esiste un premio di maggioranza su base regionale: gli n collegi sono raggruppati in 21 regioni R_h , $h = 1, \dots, 21$, ed il partito che conquista la maggioranza dei collegi nella regione h ha diritto ad altri r_h deputati.

Il Grande Leader deve decidere la spartizione dei collegi. Gli accordi col Partito Nero stabiliscono che non più del 60% dei candidati della Coalizione potrà appartenere al Partito Azzurro, e che il Partito Azzurro non dovrà vincere il premio di maggioranza in più di 13 regioni su 21. Per evitare qualsiasi problema di ribaltone, il Grande Leader vuole determinare in quali collegi presentare un candidato del suo partito, ed eventualmente quale, in modo che il numero totale di deputati ottenuti sia massimo; se il numero totale di voti ottenuti non è multiplo di δ nella massimizzazione si valuta anche la parte frazionaria. Si formuli come *PLI* il problema corrispondente.

SVOLGIMENTO

Introducendo le variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il candidato } i \text{ si presenta nel collegio } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$m_h = \begin{cases} 1 & \text{se il Partito Azzurro ottiene il premio di maggioranza nella regione } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad h = 1, \dots, 21,$$

il problema può essere formulato come:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} x_{ij} \right) / \delta + \sum_{h=1}^{21} r_h m_h \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j \in R_h} \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq [(|R_h| + 1)/2] m_h \quad h = 1, \dots, 21 \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 0.6n \\ & \sum_{h=1}^{21} m_h \leq 13 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad r_h \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad h = 1, \dots, 21 \end{aligned}$$

La funzione obiettivo massimizza il numero totale di deputati, dato dalla somma di quelli provenienti dai collegi uninominali (primo termine), quelli provenienti dalla quota proporzionale (secondo termine) e quelli provenienti dal premio di maggioranza (terzo termine); il secondo termine può essere frazionario. I primi due blocchi di vincoli garantiscono che nessuna personalità si presenti in più di un collegio, e che in ciascun collegio ci sia al più un candidato del Partito Azzurro. Il terzo blocco di vincoli, insieme al fatto che il coefficiente di m_h nella funzione obiettivo è positivo, assicura che la variabile m_h ha valore 1 se e solo se il Partito Azzurro ha presentato il proprio candidato in più della metà dei seggi della regione h , e ha quindi ottenuto il premio di maggioranza. Gli ultimi due vincoli garantiscono, rispettivamente, che il numero di candidati del Partito Azzurro sia al più il 60% del totale, e che il Partito Azzurro ottenga il premio di maggioranza in non più di 13 regioni.

13) Si considerino due insiemi di soluzioni ammissibili. Il primo insieme è così definito:

$$T_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 200, x_1 \leq 50\}.$$

Il secondo insieme è invece definito come segue:

$$T_2 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 \leq 500\}.$$

Si caratterizzi, utilizzando vincoli di tipo P.L.I., l'unione dei due insiemi di soluzioni ammissibili, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Le due regioni ammissibili, T_1 e T_2 , sono definite da vincoli di tipo lineare. La regione ammissibile $T_1 \cup T_2$ può pertanto essere descritta ricorrendo a vincoli di tipo disgiuntivo.

A tal fine, si introducano due variabili logiche, y_1 e y_2 , aventi il seguente significato: $y_1 = 0$ segnala che la soluzione appartiene a T_1 (primo insieme di soluzioni ammissibili), mentre $y_2 = 0$ segnala che la soluzione appartiene a T_2 (secondo insieme di soluzioni ammissibili). Utilizzando tali variabili logiche, la regione ammissibile definita come l'unione di T_1 e T_2 può essere formulata nel modo seguente:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & x_2 & - & M_1 y_1 \leq 200 \\ x_1 & & & - & M_1 y_1 \leq 50 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & M_2 y_2 \leq 500 \\ y_1 & + & y_2 & \leq & 1 \\ y_1 & , & y_2 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

Nella formulazione, M_1 e M_2 denotano costanti sufficientemente elevate: M_1 rende ridondanti i vincoli relativi a T_1 quando $y_1 = 1$, mentre M_2 rende ridondanti i vincoli caratterizzanti T_2 quando $y_2 = 1$.

14) La ENRI (ENergie RInnovabili) deve pianificare l'utilizzo delle sue centrali elettriche per la giornata di domani. ENRI conosce la domanda di energia elettrica d_t (KWh) di tutti i suoi clienti per ciascuna ora $t = 1, \dots, 24$. Conosce inoltre la quantità p_t (KWh) di energia elettrica che le sue centrali fotovoltaiche ed eoliche produrranno; a ragione della elevata variabilità di queste ultime, è possibile che la produzione da fonti rinnovabili non sia sufficiente a coprire la domanda. Per questo ENRI può utilizzare come scorta n centrali tradizionali a combustibili fossili. Ciascuna centrale h può essere accesa una volta sola nella giornata, ad un prefissato orario t_h . Per la prima ora di funzionamento segue un programma di accensione prestabilito in cui produce esattamente a_h KWh. Dalla seconda ora la centrale entra nello stato stazionario, in cui può variare a piacere, in ogni ora, l'energia prodotta tra un minimo l_h ed un massimo u_h (KWh). Lo stato stazionario dura esattamente s_h ore; all'ora $t_h + s_h + 1$ la centrale deve eseguire un programma di spengimento prestabilito, simmetrico a quello di accensione, in cui produce a_h KWh, e dall'ora successiva la centrale è spenta. Il costo di produrre un KWh (in qualsiasi fase di funzionamento) con la centrale è pari a f_h . Se la produzione complessiva di energia, rinnovabile e non, di ENRI non è sufficiente a coprire la domanda all'ora t , la porzione rimanente deve essere acquistata sul mercato ad un prezzo unitario c_t ; se, viceversa, la produzione di energia è superiore alla domanda, il surplus viene venduto sul mercato allo stesso prezzo. Si formuli come *PLI* il problema di decidere quali centrali accendere, ed a che potenza farle operare durante lo stato stazionario, in modo da massimizzare il profitto per ENRI, dato dalla differenza tra il guadagno dovuto alla vendita del surplus sul mercato ed il costo dovuto sia all'approvvigionamento dell'energia mancante sul mercato sia al costo di produzione di energia.

SVOLGIMENTO

Per ciascuna centrale introduciamo una variabile binaria

$$x_h = \begin{cases} 1 & \text{se la centrale } h \text{ viene accesa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad h = 1, \dots, n$$

Inoltre, per ciascuna ora in cui la centrale h , se accesa, è in stato stazionario, ovvero $t_h < t \leq t_h + s_h$, introduciamo variabili continue p_h^t che indicano l'energia prodotta dalla centrale h nell'ora t . Infine, per ciascuna ora t definiamo:

- una variabile continua v_t che rappresenta la differenza tra l'energia richiesta e quella complessivamente prodotta all'ora t ;
- l'insieme $A(t) = \{ h : t = t_h \text{ oppure } t = t_h + s_h + 1 \} \subseteq \{1, \dots, n\}$ delle centrali che, se accese, sono in fase di accensione *oppure* di spengimento all'ora t ;
- l'insieme $S(t) = \{ h : t_h < t \leq t_h + s_h \} \subseteq \{1, \dots, n\}$ delle centrali che, se accese, sono in stato stazionario all'ora t .

Una formulazione del problema è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^{24} c_t v_t + \sum_{h=1}^n f_h \left(\sum_{t=t_h+1}^{t_h+s_h} p_h^t + 2a_h x_h \right) \\ & v_t = d_t - p_t - \sum_{h \in A(t)} a_h x_h - \sum_{h \in S(t)} p_h^t \quad t = 1, \dots, 24 \\ & l_h x_h \leq p_h^t \leq u_h x_h \quad h = 1, \dots, n, \quad t = t_h + 1, \dots, t_h + s_h \\ & x_h \in \{0, 1\} \quad h = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Il primo blocco di vincoli impone che v_t sia la differenza tra l'energia richiesta e quella complessivamente prodotta all'ora t . Il secondo blocco di vincoli garantisce che per ciascuna centrale la produzione di energia nello stato stazionario sia compresa tra il massimo ed il minimo in ogni ora. Infine, la funzione obiettivo rappresenta il costo totale: si noti che, poiché v_t è negativa quando la produzione supera il consumo, alcuni termini della prima sommatoria possono in effetti rappresentare profitti; nella seconda sommatoria, il termine $2a_h x_h$ tiene in conto dell'energia prodotta durante le fasi di accensione e spengimento.