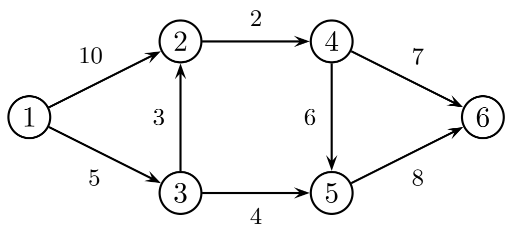
Esercitazione in vista della prima prova in itinere di Ricerca Operativa

Esercizio 1. Il porto di Livorno deve gestire il problema dello scarico delle merci dalle navi in arrivo. Si supponga che sia in arrivo una nave avente m stive, le quali possono essere svuotate in parallelo mediante camion (in numero da stabilire, ma non superiore a P camion per stiva) da assegnare alle singole stive. Il gestore del porto viene informato che, se la stiva i viene svuotata utilizzando p camion, sono necessarie t_{pi} unità di tempo per svuotare la stiva e deve essere pagato un costo di noleggio c_p. Per motivi di equità, si vuole che ogni stiva sia svuotata entro T unità di tempo. Inoltre, per motivi economici si vuole che il costo complessivo di noleggio dei camion non superi la soglia C. Formulare il problema di assegnare i camion alle stive in modo da soddisfare il vincolo temporale ed il vincolo di costo richiesti, minimizzando il numero complessivo di camion utilizzati, come problema di Programmazione Lineare Intera.

Esercizio 2. Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul seguente grafo (su ogni arco è indicato il costo):

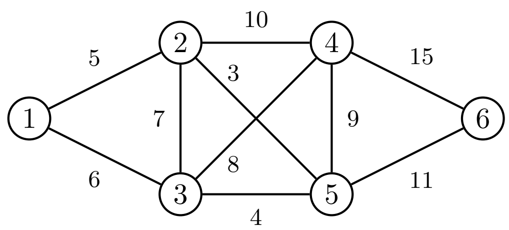


a) Dire se l'albero $T = \{(1,2),(1,3),(2,4),(4,5),(4,6)\}$ è ottimo e giustificare la risposta.

b) Se l'albero al punto precedente non è ottimo, applicare un algoritmo per trovarne uno ottimo.

c) L'albero ottimo trovato al punto precedente è l'unico albero ottimo? Giustificare la risposta.

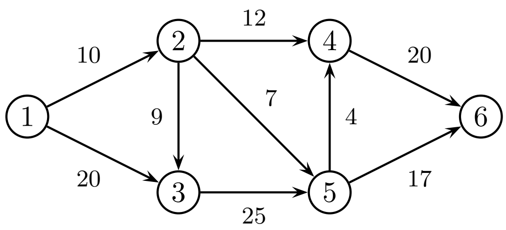
Esercizio 3. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo (su ogni arco è indicato il costo):



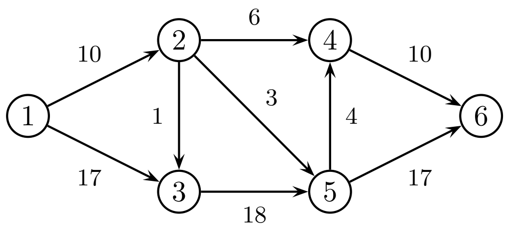
a) Dire se l'albero $T = \{(1,2),(2,5),(3,4),(3,5),(4,6)\}$ è ottimo utilizzando la condizione di ottimalità sui cicli. Giustificare la risposta.

b) Supponiamo ora che i costi degli archi (1,3) e (4,6) siano rispettivamente α e β. Dire per quali valori di α e β l'albero T del punto precedente è ottimo utilizzando la condizione di ottimalità sui tagli. Giustificare la risposta.

Esercizio 4. Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul seguente grafo (su ogni arco è indicata la capacità superiore):



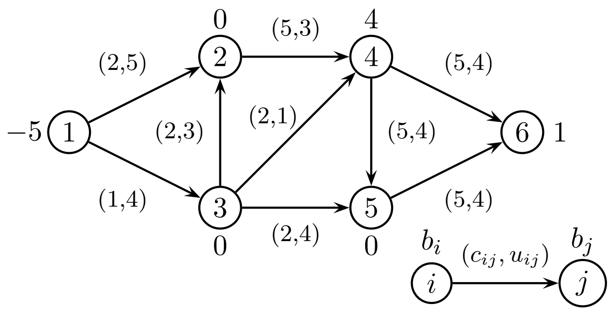
a) Dire se il seguente flusso è ottimo, giustificando la risposta:

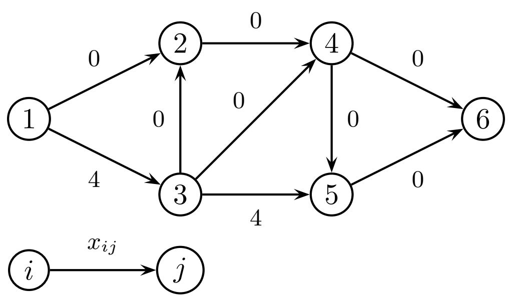


b) Se il flusso al punto precedente non è ottimo, applicare un algoritmo per trovarne uno ottimo.

c) Trovare un taglio di capacità minima. Il taglio trovato è l'unico di capacità minima?

Esercizio 5. Si consideri il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra.





Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo dei cammini minimi successivi a partire dallo pseudoflusso minimale riportato sul grafo a destra. Ad ogni iterazione si forniscano l'albero dei cammini minimi con le relative etichette, il cammino aumentante selezionato con la quantità di flusso inviata, lo pseudoflusso ottenuto con il suo costo, i relativi sbilanciamenti dei nodi e lo sbilanciamento complessivo. Al termine si fornisca la soluzione ottima trovata.

Soluzioni

Esercizio 1. Variabili decisionali:

$$x_{pi} = \begin{cases} 1 & \text{se la stiva } i \text{ è servita da } p \text{ camion} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, m, \quad p = 1, \dots, P.$$

Modello di PLI:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{P} p \, x_{pi} \\ & \sum_{p=1}^{P} x_{pi} = 1 & \forall \ i = 1, \dots, m \\ & \sum_{p=1}^{P} t_{pi} \, x_{pi} \leq T & \forall \ i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{P} c_p x_{pi} \leq C \\ & x_{pi} \in \{0, 1\} & \forall \ i = 1, \dots, m, \ p = 1, \dots, P \end{aligned}$$

Esercizio 2.

a) Le etichette (potenziali) dei nodi relative all'albero T sono $\pi = (0, 10, 5, 12, 18, 19)$. Controlliamo se sono soddisfatte le condizioni di Bellman ($\pi_j \leq \pi_i + c_{ij}$ per ogni arco $(i, j) \notin T$):

   arco (3,2): $10 \leq 5 + 3$? NO

   Poiché l'arco (3,2) viola le condizioni di Bellman, l'albero T non è ottimo.

b) Applicando l'algoritmo di Dijkstra si trova l'albero ottimo $T_2 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5), (5, 6)\}$.

c) Le etichette dei nodi relative a T_2 sono $\pi = (0, 8, 5, 10, 9, 17)$. Controlliamo se le condizioni di Bellman sono tutte disuguaglianze strette oppure no:

   arco (1,2): $8 < 0 + 10$? SI

   arco (4,5): $9 < 10 + 6$? SI

   arco (4,6): $17 < 10 + 7$? NO

   Poiché per l'arco (4,6) non vale la disuguaglianza stretta, l'albero T_2 non è l'unico ottimo. Infatti, sostituendo l'arco (5,6) con l'arco (4,6) si ottiene un altro albero ottimo.

Esercizio 3.

a) Controlliamo la condizione di ottimalità sui cicli:

Aggiungendo a T l'arco (1,3) si ottiene il ciclo 1-2-5-3-1: $6 \geq \max\{5, 3, 4\}$? SI

Aggiungendo a T l'arco (2,3) si ottiene il ciclo 2-3-5-2: $7 \geq \max\{4, 3\}$? SI

Aggiungendo a T l'arco (2,4) si ottiene il ciclo 2-4-3-5-2: $10 \geq \max\{8, 4, 3\}$? SI

Aggiungendo a T l'arco (4,5) si ottiene il ciclo 3-4-5-3: $9 \geq \max\{8, 4\}$? SI

Aggiungendo a T l'arco (5,6) si ottiene il ciclo 3-4-6-5-3: $11 \geq \max\{8, 4, 15\}$? NO

Poiché la condizione relativa all'arco (5,6) non è soddisfatta, l'albero T non è ottimo.

b) Controlliamo la condizione di ottimalità sui tagli:

Eliminando da T l'arco (1,2) si ottiene il taglio $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$: $5 \leq \alpha$

Eliminando da T l'arco (2,5) si ottiene il taglio $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4, 5, 6\}$: $3 \leq \min\{\alpha, 7, 10\}$

Eliminando da T l'arco (3,4) si ottiene il taglio $N_1 = \{1, 2, 3, 5\}$, $N_2 = \{4, 6\}$: $8 \leq \min\{10, 9, 11\}$

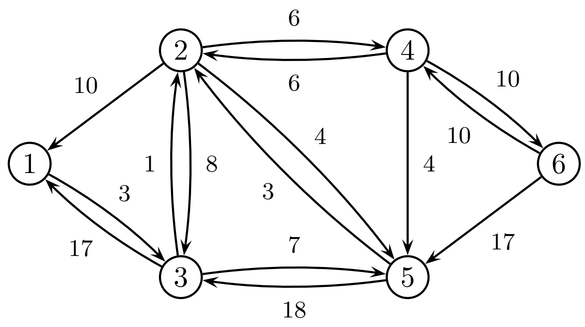
Eliminando da T l'arco (3,5) si ottiene il taglio $N_1 = \{1, 2, 5\}$, $N_2 = \{3, 4, 6\}$: $4 \leq \min\{\alpha, 7, 10, 9, 11\}$

Eliminando da T l'arco (4,6) si ottiene il taglio $N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_2 = \{6\}$: $\beta \leq 11$

Pertanto l'albero T è ottimo se e solo se $\alpha \geq 5$ e $\beta \leq 11$.

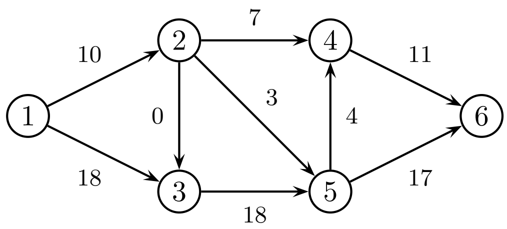
Esercizio 4.

a) Il grafo residuo associato al flusso è:

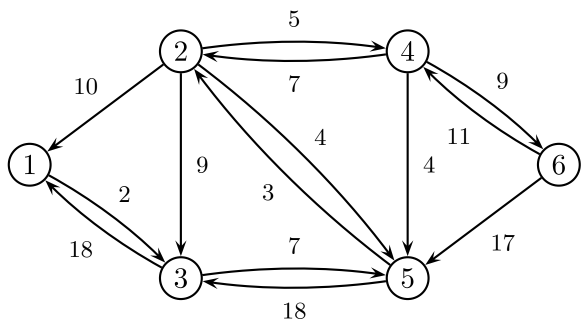


Applicando l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la regola di Edmonds-Karp) si trova il cammino aumentante 1-3-2-4-6, quindi il flusso non è ottimo.

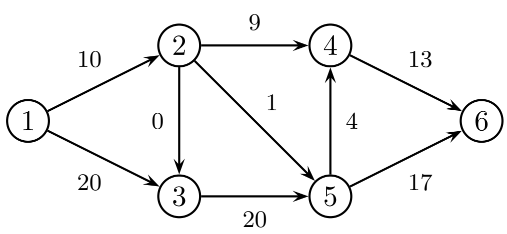
b) Per trovare un flusso ottimo, applichiamo l'algoritmo di Ford-Fulkerson a partire dal flusso dato al punto precedente. Sul cammino aumentante trovato al punto precedente spediamo $\delta = \min\{3, 1, 6, 10\} = 1$ unità di flusso. Il flusso così ottenuto (di valore 28) è il seguente:



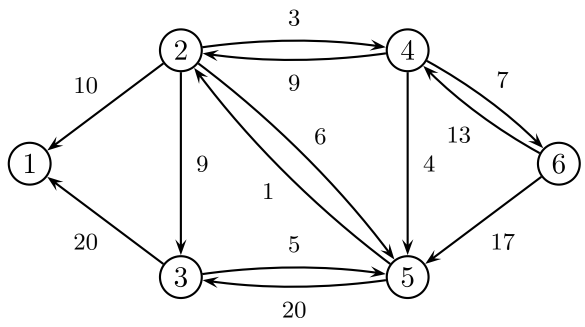
Il nuovo grafo residuo è:



Esiste un altro cammino aumentante: 1-3-5-2-4-6 su cui spediamo $\min\{2, 7, 3, 5, 9\} = 2$ unità di flusso. Il nuovo flusso (di valore 30) è:



Il nuovo grafo residuo è:



Poiché non esistono cammini aumentanti da 1 a 6, l'ultimo flusso trovato è ottimo.

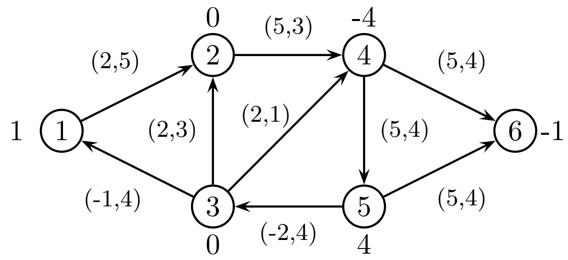
c) Un taglio di capacità minima è ottenuto inserendo in N_s tutti i nodi raggiungibili da 1 nel grafo residuo, cioè il taglio $N_s = \{1\}$, $N_t = \{2,3,4,5,6\}$ di capacità 30.

Un altro taglio di capacità minima è ottenuto inserendo in N_t tutti i nodi da cui è possibile raggiungere 6, ossia $N_s = \{1\}$, $N_t = \{2,3,4,5,6\}$. Poiché il taglio coincide con il precedente, il taglio di capacità minima è unico.

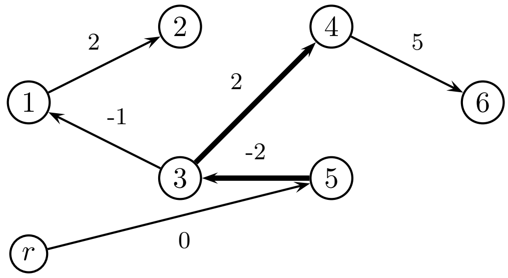
Esercizio 5. Lo pseudoflusso dato x ha costo 12 con vettore degli sbilanciamenti $e_x = (1, 0, 0, -4, 4, -1)$ e sbilanciamento complessivo $g(x) = 5$. Per ogni iterazione viene riportato il grafo residuo (con costi e capacità residue degli archi e sbilanciamento dei nodi), l'albero dei cammini minimi individuato, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P selezionato. Viene inoltre riportato lo pseudoflusso ottenuto in seguito all'invio di δ unità di flusso lungo P.

Iterazione 1):

Grafo residuo:

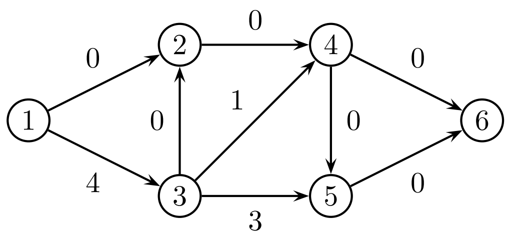


Cammino aumentante:



$\delta = 1$

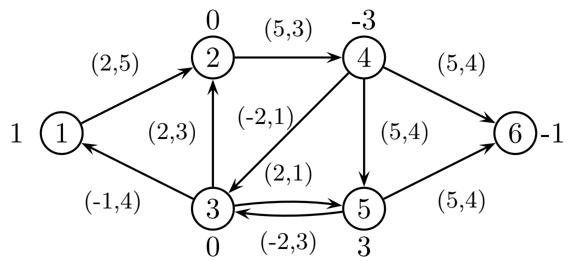
Nuovo pseudoflusso:



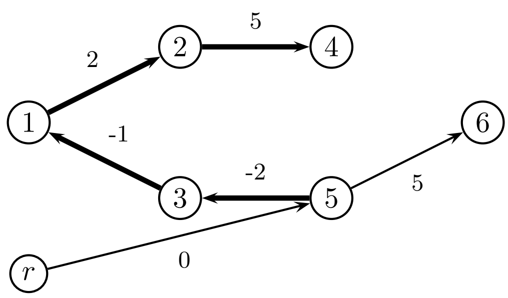
costo = 12

Iterazione 2):

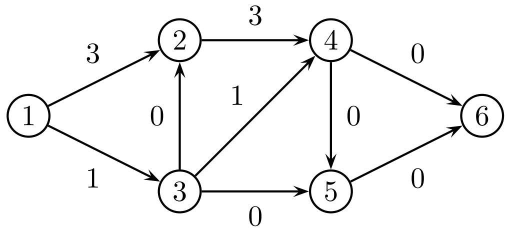
Grafo residuo:



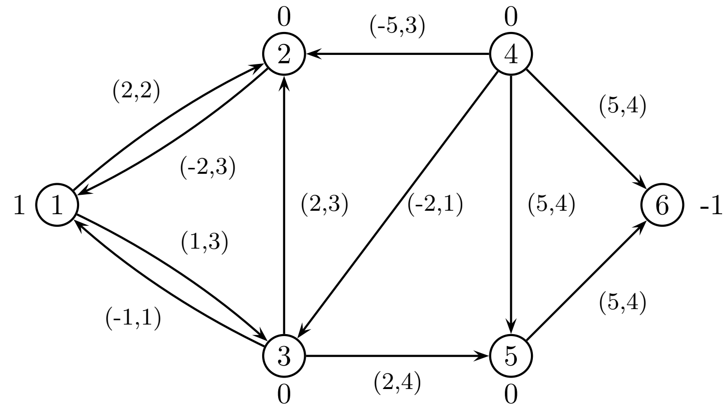
Cammino aumentante:

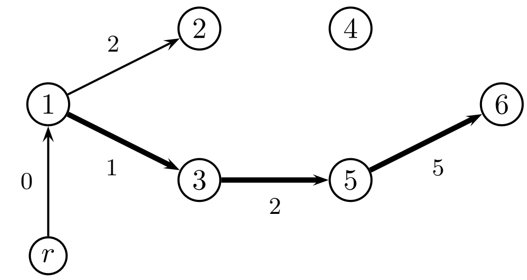


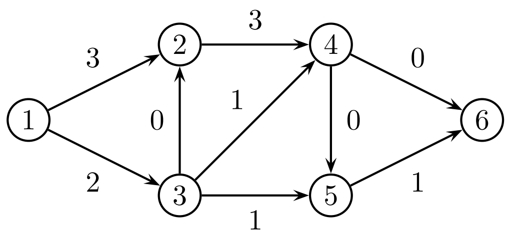
$\delta = 3$

Nuovo pseudoflusso:  costo $= 24$

Iterazione 3):

Grafo residuo: 

Cammino aumentante:  $\delta = 1$

Nuovo pseudoflusso:  costo $= 32$

Poiché lo sbilanciamento complessivo risulta nullo, l'ultimo pseudoflusso trovato è ammissibile e pertanto è un flusso di costo minimo. Come ulteriore verifica della sua ottimalità, si può osservare che non esistono cicli di costo negativo nel grafo residuo associato:

Grafo residuo: