Problema del flusso di costo minimo

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2019/20

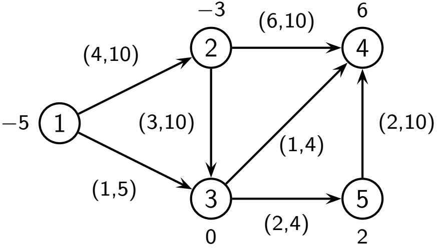
Problema

Dato un grafo orientato (N, A) in cui sono definiti

- un costo c_{ij} per spedire una unità di flusso sull'arco $(i, j) \in A$
- una capacità superiore u_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$
- un bilancio b_i per ogni nodo $i \in N$ (i è detto sorgente se $b_i < 0$, i è detto pozzo se $b_i > 0$)

trovare un flusso sugli archi che rispetti i bilanci dei nodi e le capacità degli archi e che sia di costo totale minimo.

Esempio 1. Trovare un flusso di costo minimo sul seguente grafo (su ogni nodo è indicato il bilancio, su ogni arco sono indicati, in ordine, il costo e la capacità superiore).



Modello

Variabili decisionali: per ogni arco $(i,j) \in A$ definiamo x_{ij} = flusso sull'arco (i,j)

Modello di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in A} x_{kj} = b_k \qquad \forall\ k \in N \qquad \text{(vincoli di bilancio)} \\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \forall\ (i,j) \in A \qquad \text{(vincoli di capacità)} \end{cases}$$

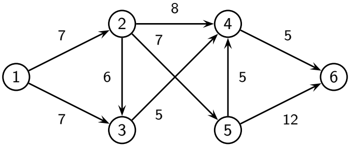
Casi particolari – cammini minimi

Il problema dell'albero dei cammini minimi di radice r è un particolare problema di flusso di costo minimo, dove le capacità superiori $u_{ij} = +\infty$ per ogni $(i, j) \in A$ ed i bilanci sono $b_r = -(n-1)$ e $b_i = 1$ per ogni $i \neq r$.

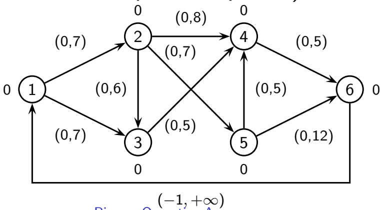
Casi particolari – flusso massimo

Il problema del flusso massimo da s a t su un grafo (N, A) equivale ad un problema di flusso di costo minimo sul grafo $(N, A \cup \{(t, s)\})$, dove $b_i = 0$ per ogni $i \in N$, $c_{ij} = 0$ per ogni $(i, j) \in A$, $c_{ts} = -1$ e $u_{ts} = +\infty$. Tale problema è chiamato problema di circolazione.

Esempio 2. Il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul seguente grafo (sugli archi sono indicate le capacità superiori)



equivale al problema di flusso di costo minimo sul seguente grafo (sui nodi sono indicati i bilanci mentre sugli archi i costi e le capacità superiori)



Esistenza di soluzioni ammissibili

Per determinare se esistono soluzioni ammissibili per il problema del flusso di costo minimo su un grafo (N, A), si può risolvere il problema del flusso massimo sul grafo (N', A'), dove
$N' = N \cup \{s, t\}$,
$A' = A \cup \{(s, i) :\ i \in N \text{ tale che } b_i < 0\} \cup \{(j, t) :\ j \in N \text{ tale che } b_i > 0\}$,
$u'_{si} = -b_i$, $u'_{jt} = b_j$, $u'_{ij} = u_{ij}$ per ogni $(i, j) \in A$.

Sia x il flusso di valore massimo sul grafo (N', A').

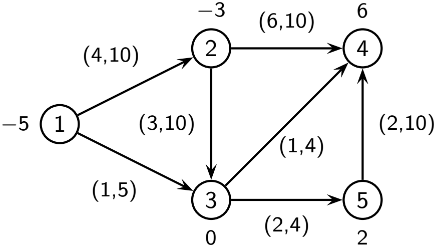
Se il valore di x è uguale a $\sum\limits_{\substack{i \in N \\ b_i > 0}} b_i$ (cioè tutti gli archi di $A' \setminus A$ sono saturi),

allora x è ammissibile per il problema del flusso di costo minimo,

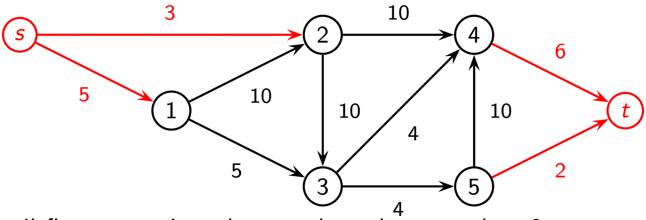
altrimenti il flusso di costo minimo non ammette soluzioni ammissibili.

Esistenza di soluzioni ammissibili

Esempio 3. Per trovare una soluzione ammissibile per il flusso di costo minimo sul grafo



si può risolvere il problema del flusso massimo sul seguente grafo (sugli archi sono indicate le capacità superiori):



Verificare che il flusso massimo da s a t ha valore uguale a 8.

Condizioni di ottimalità

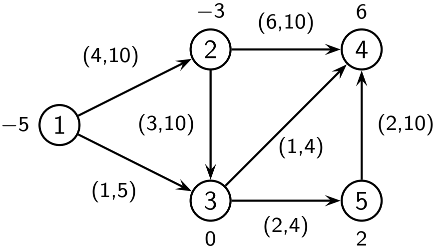
Ad ogni flusso x associamo il grafo residuo $G(x) = (N, A')$ in cui l'insieme degli archi A' è così definito:

- se $(i,j) \in A$ con $x_{ij} < u_{ij}$, allora $(i,j) \in A'$ con capacità residua $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ e costo $c'_{ij} = c_{ij}$,
- se $(i,j) \in A$ con $x_{ij} > 0$, allora $(j,i) \in A'$ con capacità residua $r_{ji} = x_{ij}$ e costo $c'_{ji} = -c_{ij}$.

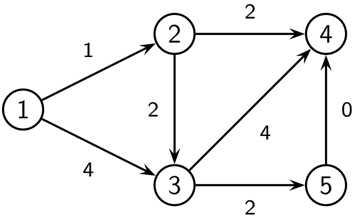
Teorema
Sia x un flusso ammissibile.
x è ottimo se e solo se in $G(x)$ non esistono cicli orientati di costo negativo (chiamati cicli aumentanti rispetto a x).

Condizioni di ottimalità

Esempio 4. Si consideri il problema del flusso di costo minimo sul grafo

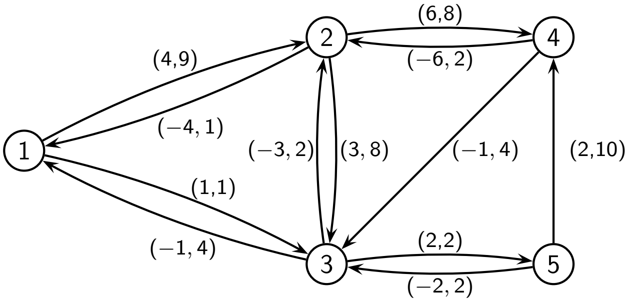


Dire se il seguente flusso ammissibile x è ottimo oppure no:



Condizioni di ottimalità

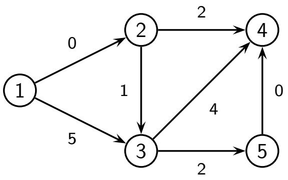
Esempio 4 (segue). Il grafo residuo associato al flusso x è il seguente (su ogni arco sono indicati il costo e la capacità residua):



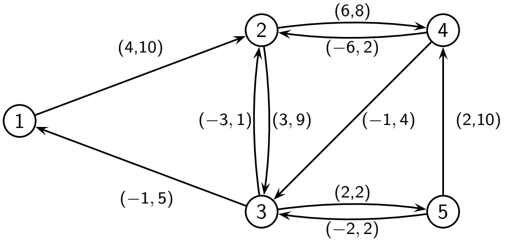
Poiché il ciclo 1-3-2-1 ha costo -6, il flusso x non è ottimo.

Condizioni di ottimalità

Esempio 4 (segue). Se modifichiamo il flusso x spedendo una unità di flusso lungo il ciclo 1-3-2-1, otteniamo il seguente flusso x':



Il grafo residuo $G(x')$ associato a x' è il seguente:



Poiché in $G(x')$ non esistono cicli orientati di costo negativo, il flusso x' è ottimo.

Pseudoflussi

Uno pseudoflusso x è un flusso che rispetta i vincoli di capacità degli archi ($0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$) ma non necessariamente i vincoli di bilancio dei nodi.

Se x è uno pseudoflusso, allora

$$e_x(i) = \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - b_i$$

è chiamato lo sbilanciamento del nodo i rispetto a x.

Indichiamo con
$E_x = \{i \in N : \ e_x(i) > 0\}$ l'insieme dei nodi con eccesso di flusso
$D_x = \{i \in N : \ e_x(i) < 0\}$ l'insieme dei nodi con difetto di flusso
$g(x) = \sum_{i \in E_x} e_x(i)$ lo sbilanciamento complessivo di x.
Uno pseudoflusso x è ammissibile (cioè rispetta anche i vincoli di bilancio) se e solo se $E_x = D_x = \emptyset$ se e solo se $g(x) = 0$.

Uno pseudoflusso x è detto minimale se ha costo minimo tra tutti gli pseudoflussi aventi lo stesso vettore di sbilanciamenti e_x.
Teorema. x è minimale se e solo se non esistono cicli aumentanti rispetto a x.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

L'algoritmo dei cammini minimi successivi parte con uno pseudoflusso minimale.

Ad ogni iterazione l'algoritmo mantiene uno pseudoflusso x minimale e cerca nel grafo residuo $G(x)$ un cammino di costo minimo da un nodo di E_x (con eccesso di flusso) ad un nodo di D_x (con difetto di flusso) in modo da diminuire lo sbilanciamento complessivo al minor costo possibile.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

Algoritmo

0. Per ogni $(i,j) \in A$ poni $x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{ij} \geq 0, \\ u_{ij} & \text{se } c_{ij} < 0. \end{cases}$

1. Se $E_x = \emptyset$ allora stop (x è ottimo)

2. Aggiungi a $G(x)$ un nodo r e gli archi (r,i) per ogni $i \in E_x$ con costo $c_{ri} = 0$ e capacità residua $r_{ri} = +\infty$.
Trova in $G(x)$ un albero dei cammini minimi T di radice r.

3. Trova $t = \arg\min_{i \in D_x} \pi_i$ (nodo di D_x con potenziale minimo).
Se $\pi_t = +\infty$ allora stop (non esistono flussi ammissibili)

4. Indica con P il cammino da r a t contenuto nell'albero T (P passa per un nodo $s \in E_x$).
Calcola $\delta = \min\{e_x(s), -e_x(t), \min\{r_{ij} : (i,j) \in P\}\}$ (max quantità da spedire lungo P).

5. Aggiorna x spedendo δ unità di flusso lungo il cammino P e torna al passo 1.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

Teorema

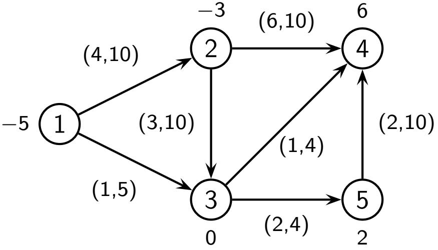
Se le capacità ed i bilanci sono numeri interi, allora l'algoritmo trova una soluzione ottima dopo un numero finito di iterazioni.

Dim. (sketch)

- Ad ogni iterazione x ha componenti intere e quindi anche lo sbilanciamento complessivo $g(x)$ è intero. Poiché $g(x)$ diminuisce ad ogni iterazione di almeno una unità, l'algoritmo si ferma dopo un numero finito di iterazioni.
- Alla prima iterazione x è uno pseudoflusso minimale perché in $G(x)$ non ci sono archi di costo negativo.
- Poiché ad ogni iterazione si spedisce flusso lungo un cammino aumentante di costo minimo da un nodo di E_x ad un nodo di D_x, il nuovo pseudoflusso ottenuto rimane minimale.
- All'ultima iterazione lo pseudoflusso minimale è ammissibile e quindi è ottimo.

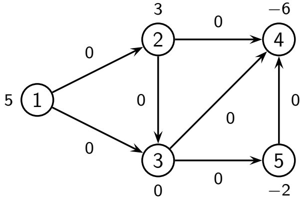
Algoritmo dei cammini minimi successivi

Esempio 5. Applicare l'algoritmo dei cammini minimi successivi per risolvere il problema del flusso di costo minimo sul grafo seguente:



Algoritmo dei cammini minimi successivi

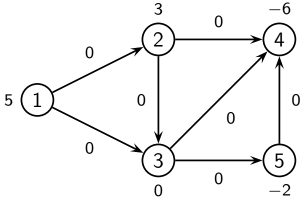
Iterazione 1. Lo pseudoflusso x iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



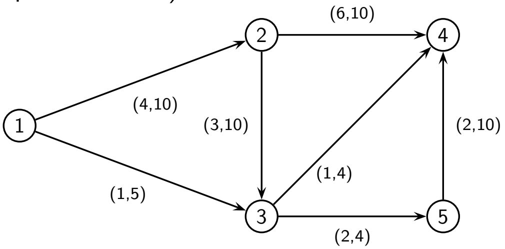
$E_x = \{1, 2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 8$.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 1. Lo pseudoflusso x iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

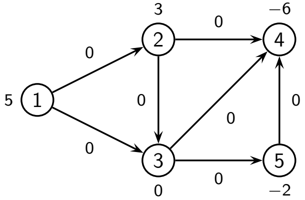


$E_x = \{1,2\}$, $D_x = \{4,5\}$, $g(x) = 8$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

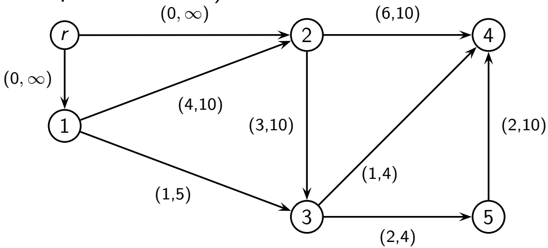


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 1. Lo pseudoflusso x iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

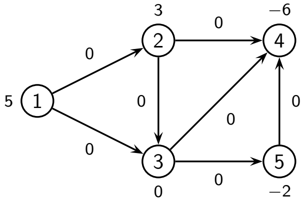


$E_x = \{1, 2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 8$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

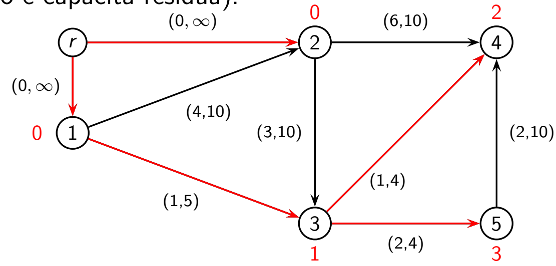


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 1. Lo pseudoflusso x iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

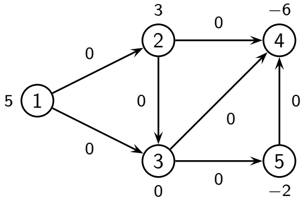


$E_x = \{1, 2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 8$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

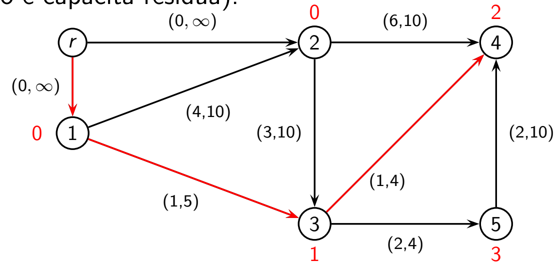


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 1. Lo pseudoflusso x iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



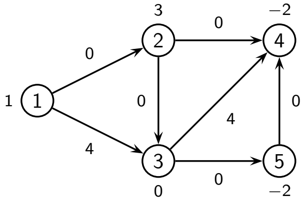
$E_x = \{1,2\}$, $D_x = \{4,5\}$, $g(x) = 8$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):



$t = 4$, P è il cammino r-1-3-4 passante per $s = 1$, spedisco $\delta = \min\{5, 6, 4\} = 4$.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

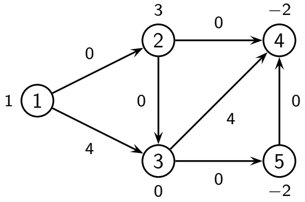
Iterazione 2. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



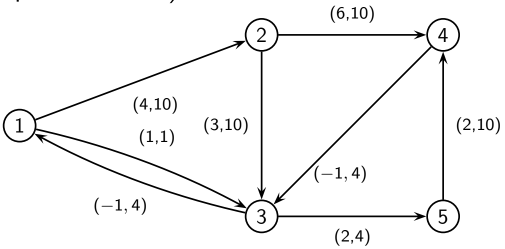
$E_x = \{1, 2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 4$.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 2. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

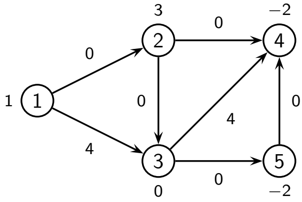


$E_x = \{1, 2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 4$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

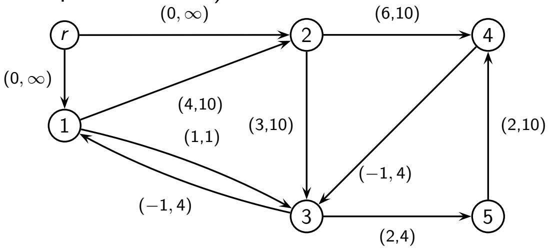


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 2. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

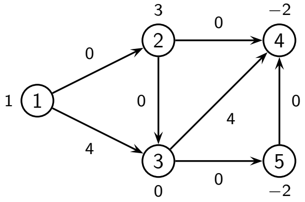


$E_x = \{1, 2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 4$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

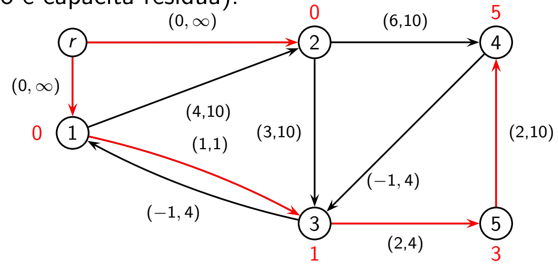


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 2. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

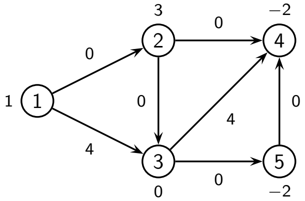


$E_x = \{1, 2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 4$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

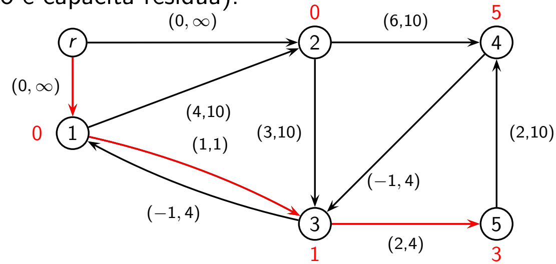


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 2. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



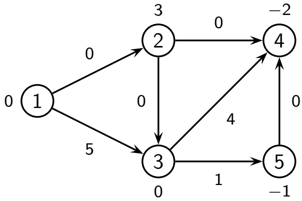
$E_x = \{1, 2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 4$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):



$t = 5$, P è il cammino r-1-3-5 passante per $s = 1$, spedisco $\delta = \min\{1, 2, 1\} = 1$.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

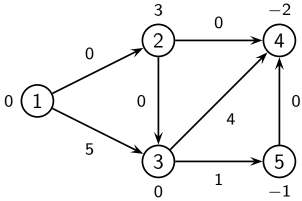
Iterazione 3. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



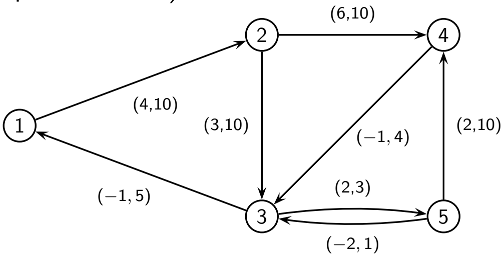
$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 3$.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 3. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

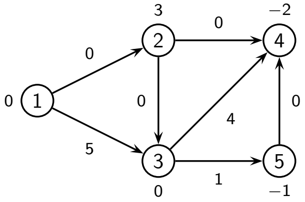


$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 3$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

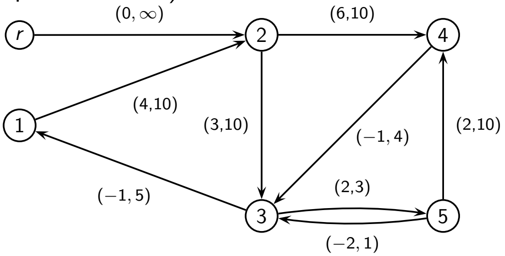


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 3. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

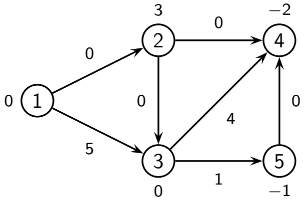


$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 3$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

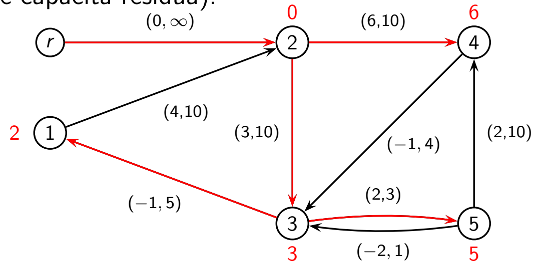


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 3. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

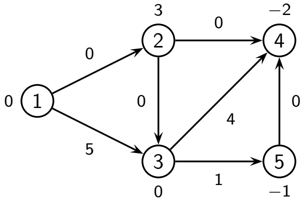


$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 3$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

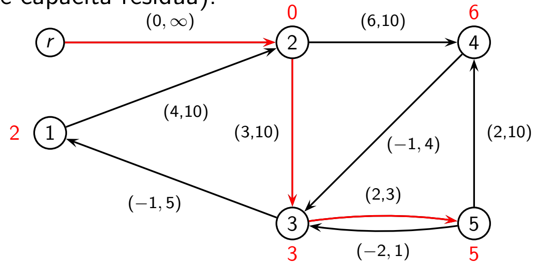


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 3. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



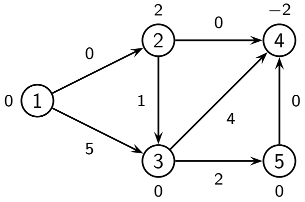
$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4, 5\}$, $g(x) = 3$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):



$t = 5$, P è il cammino r-2-3-5 passante per $s = 2$, spedisco $\delta = \min\{3, 1, 3\} = 1$.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

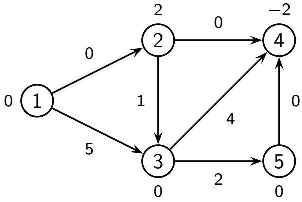
Iterazione 4. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



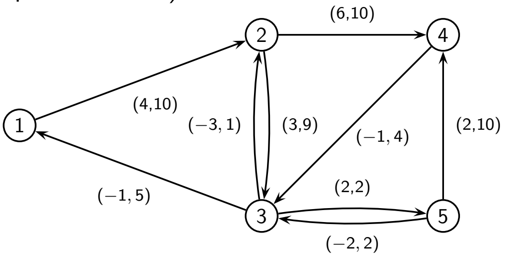
$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4\}$, $g(x) = 2$.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 4. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

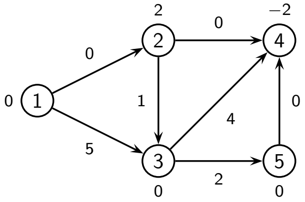


$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4\}$, $g(x) = 2$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

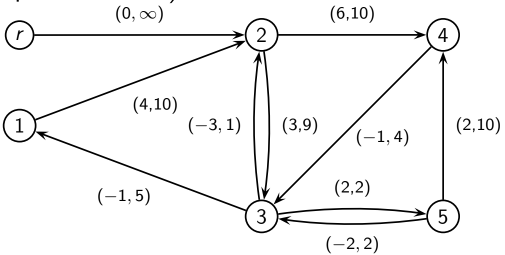


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 4. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

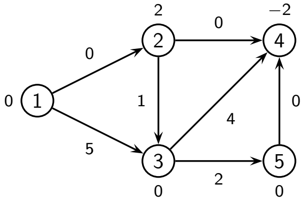


$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4\}$, $g(x) = 2$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

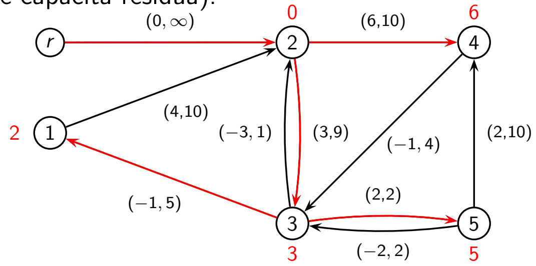


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 4. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

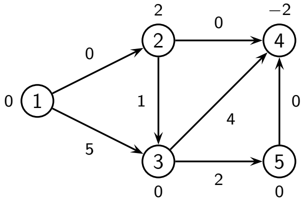


$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4\}$, $g(x) = 2$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

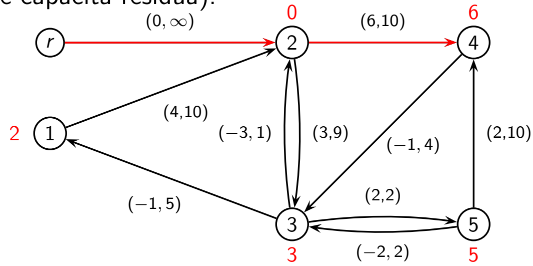


Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 4. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



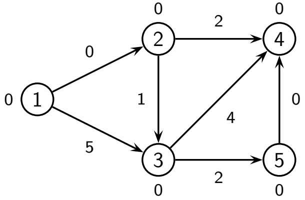
$E_x = \{2\}$, $D_x = \{4\}$, $g(x) = 2$. Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):



$t = 4$, P è il cammino r-2-4 passante per $s = 2$, spedisco $\delta = \min\{2, 2, 10\} = 2$.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

Iterazione 5. Lo pseudoflusso x è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



$E_x = D_x = \emptyset$, $g(x) = 0$, stop, x è un flusso ottimo.