Albero di copertura di costo minimo

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2019/20

Problema

Dato un grafo $G = (N, A)$ non orientato, in cui ad ogni arco $\{i, j\}$ è associato un costo c_{ij}, trovare un albero di copertura T di costo minimo, dove il costo di T è definito come $\sum_{\{i,j\} \in T} c_{ij}$.

Senza perdita di generalità, possiamo supporre che il grafo G sia completo, eventualmente aggiungendo archi di costo M, dove M è una costante sufficientemente grande (ad esempio $M > \max_{\{i,j\} \in A} c_{ij}$).

Per semplicità, nel seguito ogni arco $\{i, j\}$ con $i < j$ sarà indicato con (i, j).

Modello 1

Sia $N = \{1, \dots, n\}$.

Per ogni $i, j \in N$ con $i < j$, definiamo le variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'albero contiene l'arco } (i,j), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Modello di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j > i}} c_{ij} x_{ij} & \\ \displaystyle\sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j > i}} x_{ij} = n - 1 & \text{(l'albero contiene } n-1 \text{ archi)} \\ \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j > i}} x_{ij} \leq |S| - 1 & \forall\ S \subset N \text{ tale che } |S| \geq 3 \\ & \text{(eliminazione dei cicli)} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & i, j \in N \text{ con } i < j \end{cases}$$

Modello 2

Variabili decisionali: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'albero contiene l'arco } (i,j), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j > i}} c_{ij} x_{ij} & \\ \displaystyle\sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j > i}} x_{ij} = n - 1 & \text{(l'albero contiene } n-1 \text{ archi)} \\ \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \notin S \\ j > i}} x_{ij} + \sum_{i \notin S} \sum_{\substack{j \in S \\ j > i}} x_{ij} \geq 1 & \forall\ S \subset N \text{ tale che } |S| \geq 1 \\ & \text{(vincoli di connessione)} \\ x_{ij} \in \{0,1\} & i, j \in N \text{ con } i < j \end{cases}$$

Condizione di ottimalità basata sui cicli

Osservazione. Se ad un albero di copertura T viene aggiunto un arco $(u, v) \notin T$, si forma un ciclo (perché in T esiste un cammino da u a v).

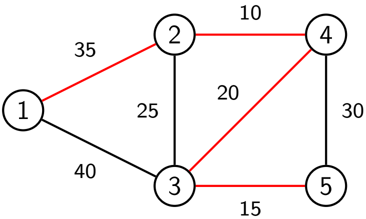
Teorema

Sia T un albero di copertura.
T è un albero di copertura di costo minimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u, v).

Condizione di ottimalità basata sui cicli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u, v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:

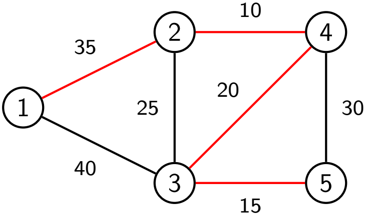


Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

Condizione di ottimalità basata sui cicli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u,v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i,j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u,v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



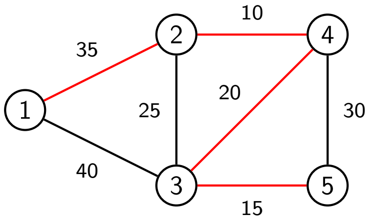
Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$ è ottimo.

$(u,v) \notin T_1$	c_{uv}	ciclo C	altri archi di C	costi	cond. ott. vera
(1,3)	40	1-2-4-3-1	(1,2) (2,4) (3,4)	35, 10, 20	si

Condizione di ottimalità basata sui cicli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u, v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



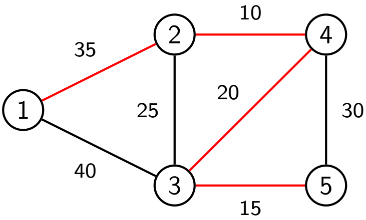
Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$ è ottimo.

$(u, v) \notin T_1$	c_{uv}	ciclo C	altri archi di C	costi	cond. ott. vera
(1,3)	40	1-2-4-3-1	(1,2) (2,4) (3,4)	35, 10, 20	si
(2,3)	25	2-4-3-2	(2,4) (3,4)	10, 20	si

Condizione di ottimalità basata sui cicli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u, v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

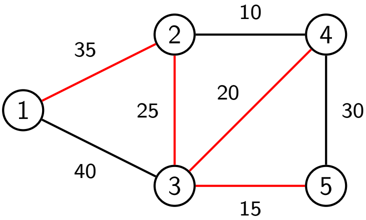
$(u, v) \notin T_1$	c_{uv}	ciclo C	altri archi di C	costi	cond. ott. vera
(1,3)	40	1-2-4-3-1	(1,2) (2,4) (3,4)	35, 10, 20	si
(2,3)	25	2-4-3-2	(2,4) (3,4)	10, 20	si
(4,5)	30	4-3-5-4	(3,4) (3,5)	20, 15	si

Quindi T_1 è un albero di copertura di costo minimo.

Condizione di ottimalità basata sui cicli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:

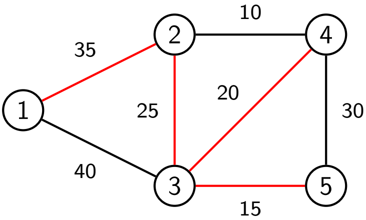


Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

Condizione di ottimalità basata sui cicli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



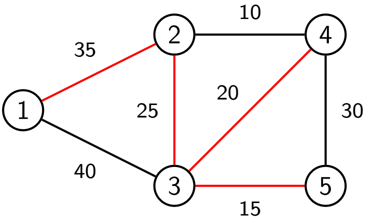
Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

$(u, v) \notin T_2$	c_{uv}	ciclo C	altri archi di C	costi	cond. ott. vera
(1,3)	40	1-2-3-1	(1,2) (2,3)	35, 25	si

Condizione di ottimalità basata sui cicli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



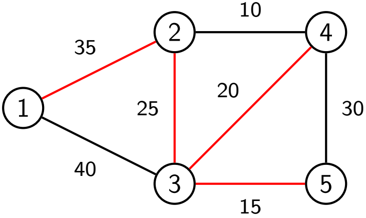
Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

$(u, v) \notin T_2$	c_{uv}	ciclo C	altri archi di C	costi	cond. ott. vera
(1,3)	40	1-2-3-1	(1,2) (2,3)	35, 25	si
(2,4)	10	2-3-4-2	(2,3) (3,4)	25, 20	no

Condizione di ottimalità basata sui cicli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

$(u, v) \notin T_2$	c_{uv}	ciclo C	altri archi di C	costi	cond. ott. vera
(1,3)	40	1-2-3-1	(1,2) (2,3)	35, 25	si
(2,4)	10	2-3-4-2	(2,3) (3,4)	25, 20	no
(4,5)	30	4-3-5-4	(3,4) (3,5)	20, 15	si

Quindi T_2 non è un albero di copertura di costo minimo.

Condizione di ottimalità basata sui tagli

Osservazione. Se da un albero di copertura T viene eliminato un arco $(u, v) \in T$, si formano 2 componenti connesse N' e N'', e quindi un taglio (N', N'') tale che (u, v) è l'unico arco del taglio che appartiene a T.

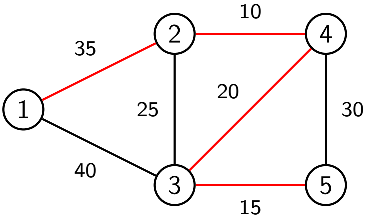
Teorema

Sia T un albero di copertura.
T è un albero di copertura di costo minimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) del taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:

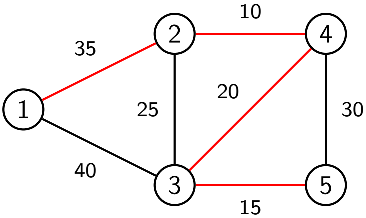


Applicando la condizione di ottimalità basata sui tagli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1,2), (2,4), (3,4), (3,5)\}$ è ottimo.

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



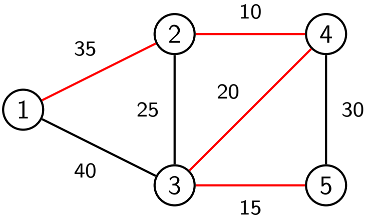
Applicando la condizione di ottimalità basata sui tagli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

$(u, v) \in T_1$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	({1}, {2,3,4,5})	(1,3)	40	si

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



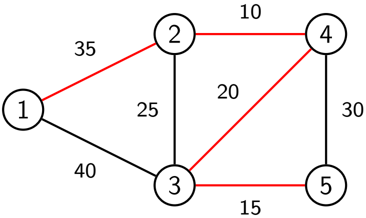
Applicando la condizione di ottimalità basata sui tagli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$ è ottimo.

$(u,v) \in T_1$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	$(\{1\}, \{2,3,4,5\})$	(1,3)	40	si
(2,4)	10	$(\{1,2\}, \{3,4,5\})$	(1,3) (2,3)	40, 25	si

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u,v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i,j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u,v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



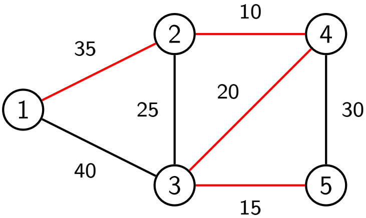
Applicando la condizione di ottimalità basata sui tagli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$ è ottimo.

$(u,v) \in T_1$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	({1}, {2,3,4,5})	(1,3)	40	si
(2,4)	10	({1,2}, {3,4,5})	(1,3) (2,3)	40, 25	si
(3,4)	20	({1,2,4}, {3,5})	(1,3) (2,3) (4,5)	40, 25, 30	si

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



Applicando la condizione di ottimalità basata sui tagli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$ è ottimo.

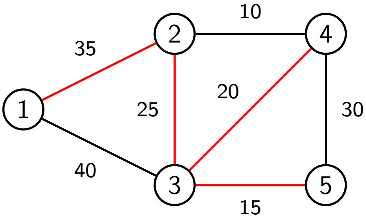
$(u,v) \in T_1$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	({1}, {2,3,4,5})	(1,3)	40	si
(2,4)	10	({1,2}, {3,4,5})	(1,3) (2,3)	40, 25	si
(3,4)	20	({1,2,4}, {3,5})	(1,3) (2,3) (4,5)	40, 25, 30	si
(3,5)	15	({1,2,3,4}, {5})	(4,5)	30	si

Quindi T_1 è un albero di copertura di costo minimo.

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:

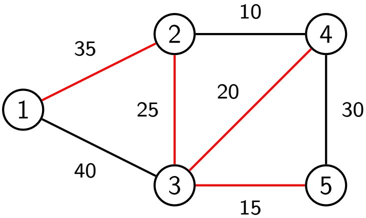


Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



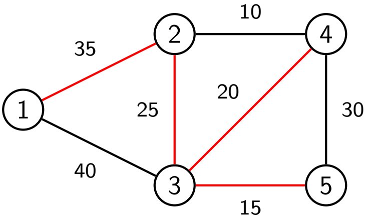
Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

$(u, v) \in T_2$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	({1}, {2,3,4,5})	(1,3)	40	si

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



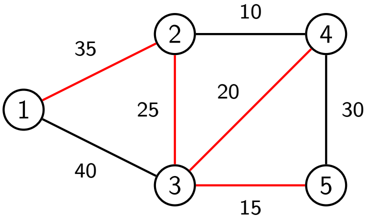
Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,5)\}$ è ottimo.

$(u,v) \in T_2$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	({1}, {2,3,4,5})	(1,3)	40	si
(2,3)	25	({1,2}, {3,4,5})	(1,3) (2,4)	40, 10	no

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



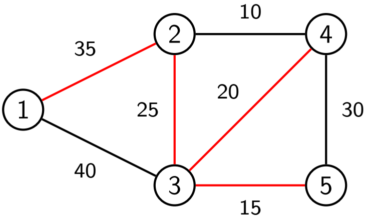
Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

$(u, v) \in T_2$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	({1}, {2,3,4,5})	(1,3)	40	si
(2,3)	25	({1,2}, {3,4,5})	(1,3) (2,4)	40, 10	no
(3,4)	20	({1,2,3,5}, {4})	(1,3) (2,4) (4,5)	10, 30	no

Condizione di ottimalità basata sui tagli

T è ottimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esempio 2. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo.

$(u, v) \in T_2$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	({1}, {2,3,4,5})	(1,3)	40	si
(2,3)	25	({1,2}, {3,4,5})	(1,3) (2,4)	40, 10	no
(3,4)	20	({1,2,3,5}, {4})	(1,3) (2,4) (4,5)	10, 30	no
(3,5)	15	({1,2,3,4}, {5})	(4,5)	30	si

Quindi T_2 non è un albero di copertura di costo minimo.

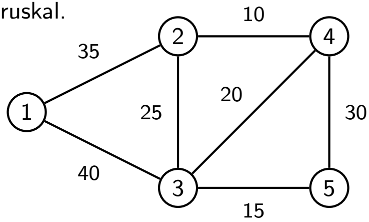
Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.

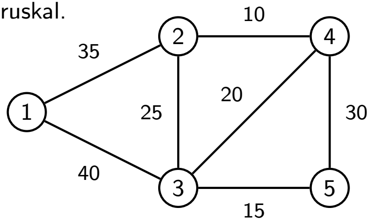


Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.
$T = \emptyset$,

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.

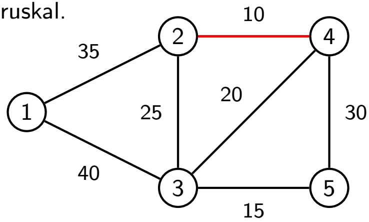


Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.
$T = \emptyset$, $(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4), (3,5), (3,4), (2,3), (4,5), (1,2), (1,3)\}$.

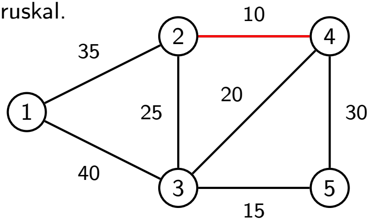
$T = \emptyset$, $(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO

$T = \{(2,4)\}$,

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

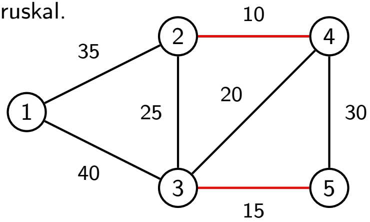
$T = \emptyset$, $(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO

$T = \{(2,4)\}$, $(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \ldots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

$T = \emptyset$, (2,4) forma un ciclo con gli archi di T? NO

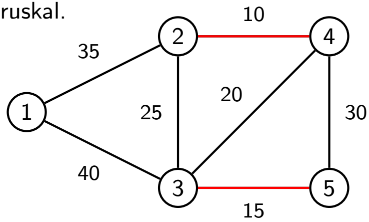
$T = \{(2,4)\}$, (3,5) forma un ciclo con gli archi di T? NO

$T = \{(2,4),(3,5)\}$,

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



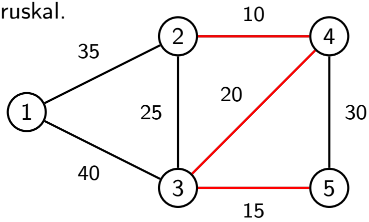
Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4), (3,5), (3,4), (2,3), (4,5), (1,2), (1,3)\}$.

$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



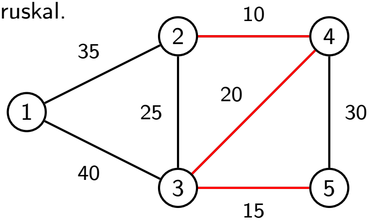
Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



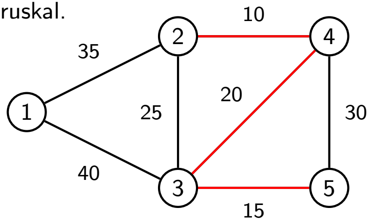
Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4), (3,5), (3,4), (2,3), (4,5), (1,2), (1,3)\}$.

$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4), (3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4), (3,5), (3,4)\}$,	$(2,3)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



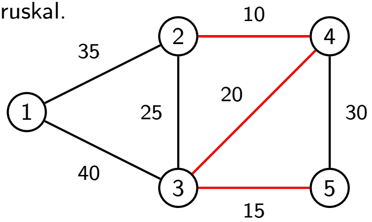
Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(2,3)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



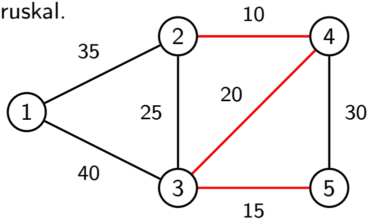
Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(2,3)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(4,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(2,3)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(4,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	

Algoritmo di Kruskal

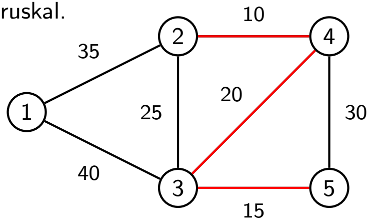
0. Ordina gli archi $a_1, \ldots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.

1. Se $|T| = n - 1$ allora stop

2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$

3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



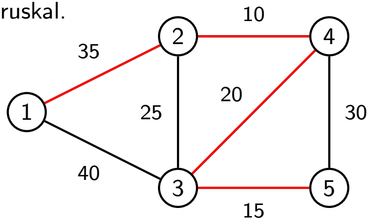
Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(2,3)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(4,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(1,2)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(2,3)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(4,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(1,2)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4),(1,2)\}$	STOP

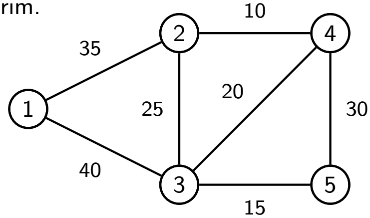
Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.



Algoritmo di Prim

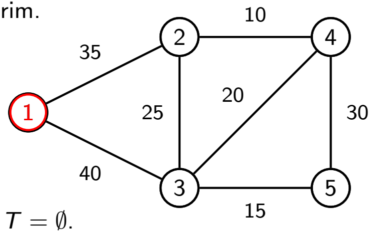
0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.

1. Se $|T| = n - 1$ allora stop

2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.

3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.

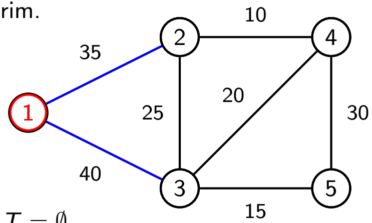


Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.

Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.

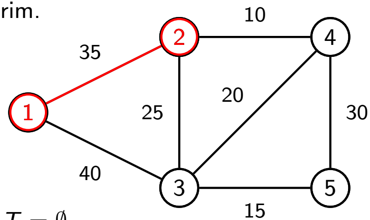


Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.
Taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$, $(1, 2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$,

Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.

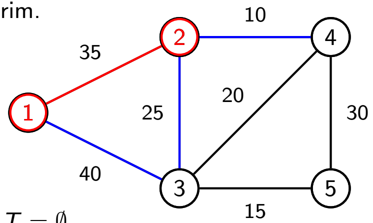


Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.
Taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$, $(1, 2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$, $T = \{(1, 2)\}$, $S = \{1, 2\}$

Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.

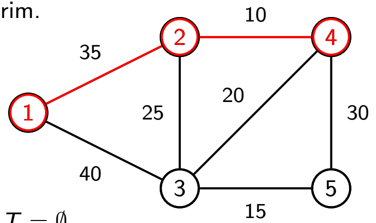


Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.
Taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$, $(1, 2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$, $T = \{(1, 2)\}$, $S = \{1, 2\}$
Taglio $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5\})$, $(2, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{24}\}$,

Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.

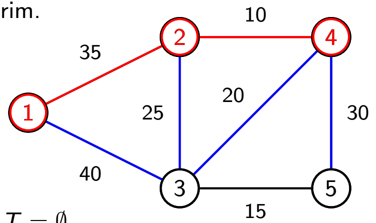


Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.
Taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$, $(1, 2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$, $T = \{(1, 2)\}$, $S = \{1, 2\}$
Taglio $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5\})$, $(2, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{24}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4)\}$, $S = \{1, 2, 4\}$

Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.



Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.
Taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$, $(1, 2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$, $T = \{(1, 2)\}$, $S = \{1, 2\}$
Taglio $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5\})$, $(2, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{24}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4)\}$, $S = \{1, 2, 4\}$
Taglio $(\{1, 2, 4\}, \{3, 5\})$, $(3, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{34}, c_{45}\}$,

Algoritmo di Prim

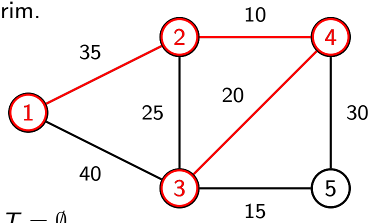
0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.

1. Se $|T| = n - 1$ allora stop

2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.

3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.



Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.

Taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$, $(1, 2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$, $T = \{(1, 2)\}$, $S = \{1, 2\}$

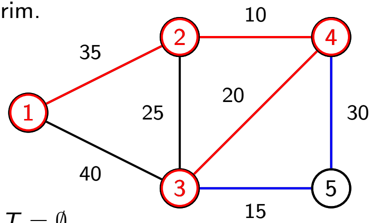
Taglio $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5\})$, $(2, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{24}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4)\}$, $S = \{1, 2, 4\}$

Taglio $(\{1, 2, 4\}, \{3, 5\})$, $(3, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{34}, c_{45}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4)\}$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$

Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.

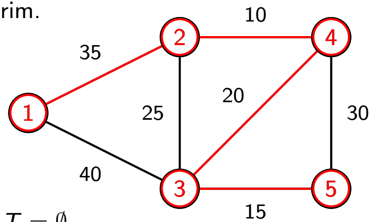


Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.
Taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$, $(1, 2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$, $T = \{(1, 2)\}$, $S = \{1, 2\}$
Taglio $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5\})$, $(2, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{24}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4)\}$, $S = \{1, 2, 4\}$
Taglio $(\{1, 2, 4\}, \{3, 5\})$, $(3, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{34}, c_{45}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4)\}$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$
Taglio $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5\})$, $(3, 5) = \arg\min\{c_{35}, c_{45}\}$,

Algoritmo di Prim

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Trova un arco (u, v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u, v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.



Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.
Taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$, $(1, 2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$, $T = \{(1, 2)\}$, $S = \{1, 2\}$
Taglio $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5\})$, $(2, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{24}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4)\}$, $S = \{1, 2, 4\}$
Taglio $(\{1, 2, 4\}, \{3, 5\})$, $(3, 4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{34}, c_{45}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4)\}$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$
Taglio $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5\})$, $(3, 5) = \arg\min\{c_{35}, c_{45}\}$, $T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ stop