# Introduzione ai grafi

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

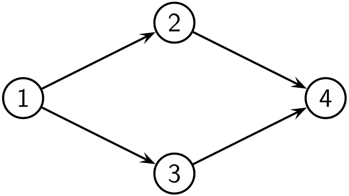
Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2019/20

## Grafi orientati

Un grafo orientato è una coppia di insiemi $(N, A)$, dove $A \subseteq N \times N$, cioè $A$ è un insieme di coppie ordinate di elementi di $N$.
$N$ è chiamato l'insieme dei nodi, mentre $A$ è l'insieme degli archi.

Per ogni arco $(i, j)$, il nodo $i$ è detto la coda dell'arco, mente il nodo $j$ è la testa.

**Esempio.** Il grafo $G = (N, A)$, dove $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ può essere rappresentato così:

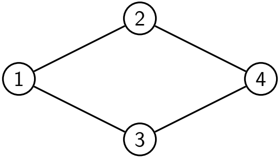



L'ordine in cui sono disposti i 4 archi di $A$ è chiamato lessicografico.

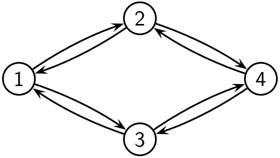
## Grafi non orientati

Un grafo non orientato è una coppia di insiemi $(N, A)$, dove $A$ è un insieme di coppie non ordinate di elementi di $N$.

**Esempio.** Il grafo $G = (N, A)$, dove $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ può essere rappresentato così:




oppure come un grafo orientato in cui ad ogni arco non orientato $\{i, j\}$ associamo due archi orientati $(i, j)$ e $(j, i)$:

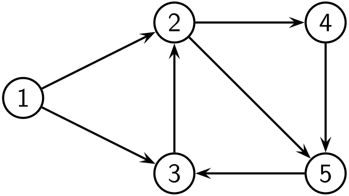


## Cammini orientati e non orientati

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un cammino in $G$ è una sequenza di nodi $i_1, i_2, \dots, i_p \in N$ tale che $(i_1, i_2) \in A$ oppure $(i_2, i_1) \in A$, $(i_2, i_3) \in A$, oppure $(i_3, i_2) \in A \dots$, $(i_{p-1}, i_p) \in A$ oppure $(i_{p-1}, i_p) \in A$.

Un cammino $i_1, i_2, \dots, i_p$ è detto orientato se $(i_1, i_2) \in A$, $(i_2, i_3) \in A$, $\dots$, $(i_{p-1}, i_p) \in A$. Altrimenti è detto non orientato.

**Esempio.** Dato il grafo

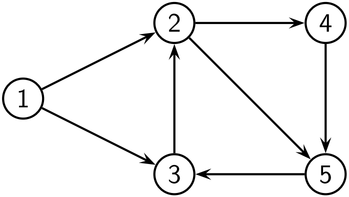



Un cammino orientato è $1, 2, 4$. Anche $1, 2, 5, 3, 2, 4$ è un cammino orientato.
$1, 2, 5, 4$ è un cammino non orientato.
$1, 4, 3$ non è un cammino.

## Cammini semplici

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un cammino semplice in $G$ è un cammino $i_1, i_2, \dots, i_{p-1}, i_p$ tale che i nodi $i_1, \dots, i_{p-1}$ sono diversi tra loro.

**Esempio.** Dato il grafo

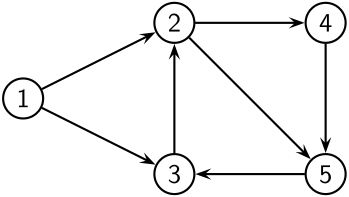



$1, 2, 4$ è un cammino semplice orientato.
$1, 3, 5$ è un cammino semplice non orientato.
$1, 2, 5, 3, 2, 4$ non è un cammino semplice.

## Cicli

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un ciclo in $G$ è un cammino semplice $i_1, i_2, \ldots, i_p$, dove $i_p = i_1$.

**Esempio.** Dato il grafo

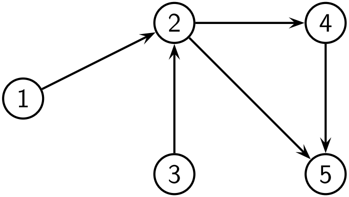


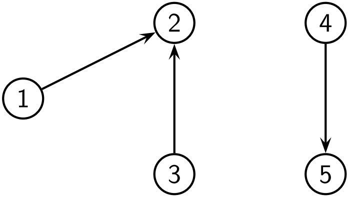

$2, 5, 3, 2$ è un ciclo orientato.
$1, 2, 4, 5, 3, 1$ è un ciclo non orientato.
$1, 2, 4, 5, 2, 3, 1$ non è un ciclo (è un cammino non semplice).

## Grafi connessi

Un grafo orientato $G = (N, A)$ è connesso se per ogni $i, j \in N$ esiste un cammino in $G$ da $i$ a $j$.

**Esempio.**

Il grafo  è connesso

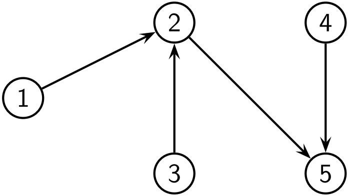
Il grafo  non è connesso

## Alberi

Un grafo orientato $G = (N, A)$ è un albero se è connesso e non contiene cicli.

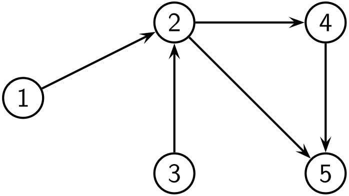
**Esempio.**

Il grafo




è un albero

Il grafo




non è un albero

# Alberi

**Teorema**

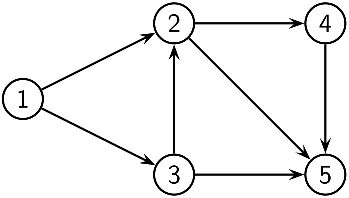
Supponiamo che $G = (N, A)$ sia un albero.

- Se $N$ contiene $n$ nodi, allora $A$ contiene esattamente $n - 1$ archi.
- $G$ contiene almeno due nodi che hanno un solo arco incidente (detti foglie).
- Ogni coppia di nodi in $G$ è connessa da un unico cammino.

## Alberi di copertura

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un albero di copertura di $G$ è un insieme di archi $T \subseteq A$ tale che il sottografo $G' = (N, T)$ sia un albero.

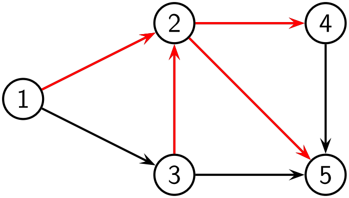
**Esempio.** Dato il grafo



## Alberi di copertura

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un albero di copertura di $G$ è un insieme di archi $T \subseteq A$ tale che il sottografo $G' = (N, T)$ sia un albero.

**Esempio.** Dato il grafo

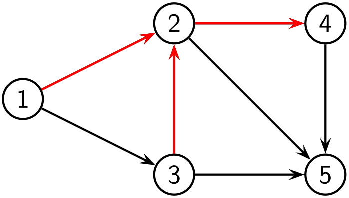



$T = \{(1,2), (2,4), (3,2), (2,5)\}$ è un albero di copertura

## Alberi di copertura

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un albero di copertura di $G$ è un insieme di archi $T \subseteq A$ tale che il sottografo $G' = (N, T)$ sia un albero.

**Esempio.** Dato il grafo

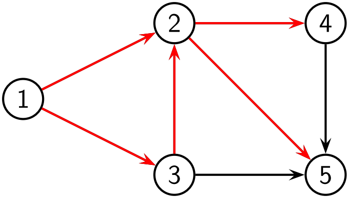



$T = \{(1,2),(2,4),(3,2)\}$ non è un albero di copertura

## Alberi di copertura

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un albero di copertura di $G$ è un insieme di archi $T \subseteq A$ tale che il sottografo $G' = (N, T)$ sia un albero.

**Esempio.** Dato il grafo

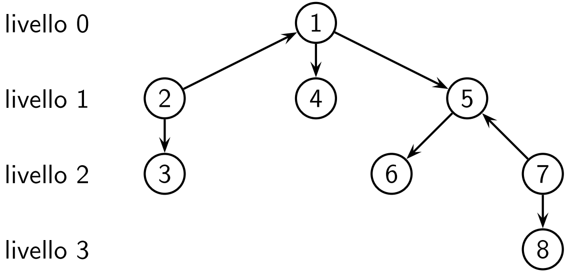



$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2)\}$ non è un albero di copertura

## Alberi radicati

Un albero radicato è un albero in cui un nodo è chiamato radice (l'albero è pensato “appeso” dalla sua radice).

**Esempio.** Il seguente grafo è un albero di radice 1:



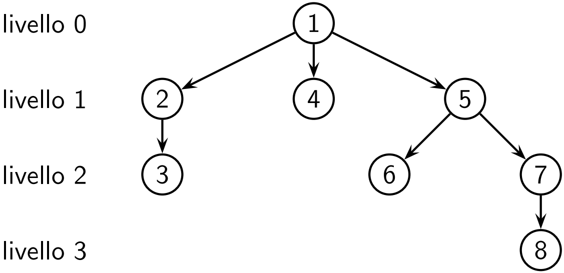

Per memorizzare un albero radicato è sufficiente memorizzare il predecessore di ogni nodo:

1 è il predecessore di 2, 4, 5
2 è il predecessore di 3
5 è il predecessore di 6, 7
7 è il predecessore di 8

## Alberi radicati e orientati

Un albero radicato in $r$ e orientato è un albero tale che esiste un unico cammino orientato da $r$ ad ogni altro nodo.

**Esempio.** Il seguente grafo è un albero radicato nel nodo 1 e orientato:




L'albero nella slide precedente è radicato in 1 ma non è orientato.

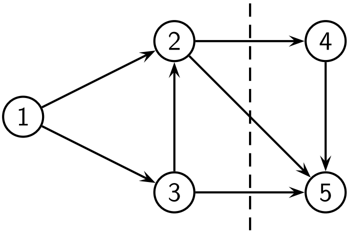
## Tagli

Dato un grafo orientato $(N, A)$, un taglio è una partizione $(N', N'')$ dell'insieme dei nodi, cioè

$$N', N'' \subseteq N, \quad N' \cap N'' = \emptyset, \quad N' \cup N'' = N.$$

Gli archi del taglio sono gli archi aventi un estremo in $N'$ e l'altro in $N''$.

**Esempio.** Nel grafo




un taglio è $(N', N'')$, dove $N' = \{1, 2, 3\}$ e $N'' = \{4, 5\}$.
Gli archi del taglio sono (2,4), (2,5), (3,5).