# Problemi e modelli

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2019/20

## Esempio 1 - problema

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi e 160 t di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 t di concime per ettaro di lattuga, 3 t di tuberi e 20 t di concime per ettaro di patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

## Esempio 1 - modello

**Variabili decisionali:**

$x_L$ = numero di ettari da coltivare a lattuga

$x_P$ = numero di ettari da coltivare a patate

**Funzione obiettivo (da massimizzare):** $3000x_L + 5000x_P$

**Vincoli da rispettare:**

$x_L + x_P \leq 12$ (terreno disponibile)

$7x_L \leq 70$ (semi di lattuga disponibili)

$3x_P \leq 18$ (tuberi disponibili)

$10x_L + 20x_P \leq 160$ (concime disponibile)

**Modello matematico (di programmazione lineare):**

$$\begin{cases} \max\ 3000x_L + 5000x_P \\ x_L + x_P \leq 12 \\ 7x_L \leq 70 \\ 3x_P \leq 18 \\ 10x_L + 20x_P \leq 160 \\ x_L \geq 0 \\ x_P \geq 0 \end{cases}$$

# Esempio 2 - problema

Un *personal trainer* deve preparare un piano di allenamento settimanale di 8 ore combinando diverse attività fisiche. Nella tabella seguente sono riportate le attività possibili, le calorie consumate in un'ora di attività e il numero massimo di ore dedicabili ad ogni attività:

| Attività | Camminare | Jogging | Nuoto | Ginnastica | Bicicletta |
|---|---|---|---|---|---|
| Calorie consumate | 100 | 300 | 200 | 250 | 150 |
| Max numero ore | 6 | 3 | 4 | 3 | 5 |

Il piano di allenamento richiede almeno due ore di sport all'aperto (camminare, jogging, bicicletta), che le calorie consumate con gli sport all'aperto non superino il 50% delle calorie totali consumate e che le ore di nuoto non siano più del 10% del totale. Qual è il piano di allenamento che massimizza le calorie consumate?

## Esempio 2 - modello

Variabili decisionali:
$x_1$ = ore dedicate a camminare,
$x_2$ = ore dedicate al jogging,
$x_3$ = ore dedicate al nuoto,
$x_4$ = ore dedicate alla ginnastica,
$x_5$ = ore dedicate alla bicicletta.

Modello matematico (di programmazione lineare):

$$\begin{cases} \max\ 100x_1 + 300x_2 + 200x_3 + 250x_4 + 150x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 \geq 2 \\ 100x_1 + 300x_2 + 150x_5 \leq 0.5\,(100x_1 + 300x_2 + 200x_3 + 250x_4 + 150x_5) \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_3 \leq 0.8 \\ x_4 \leq 3 \\ x_5 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

## Esempio 3 - problema

Un'azienda produce palloni da basket e da calcio che vende rispettivamente a 20 e 15 euro ciascuno. L'azienda compra ogni settimana 400 $m^2$ di cuoio e ha bisogno di 16 $dm^2$ di cuoio per produrre un pallone da basket e 14 $dm^2$ per un pallone da calcio. La produzione di un pallone da basket richiede 8 minuti di lavoro di una macchina mentre quello da calcio ne richiede 12. La macchina a disposizione dell'azienda può lavorare 12 ore al giorno per 5 giorni a settimana. Dovendo produrre almeno 800 palloni da basket ed almeno 1000 palloni da calcio, l'azienda vuole determinare la produzione settimanale che massimizza il profitto.

## Esempio 3 - modello

Variabili decisionali:
$x_B$ = numero di palloni da basket prodotti
$x_C$ = numero di palloni da calcio prodotti

Modello matematico (di programmazione lineare intera):

$$\begin{cases} \max\ 20\, x_B + 15\, x_C \\ 16\, x_B + 14\, x_C \leq 40000 \\ 8\, x_B + 12\, x_C \leq 3600 \\ x_B \geq 800 \\ x_C \geq 1000 \\ x_B, x_C \in \mathbb{N} \end{cases}$$

## Esempio 4 - problema

Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) e ha a disposizione 2 stabilimenti produttivi (A e B). L'azienda dispone di 50 operai in A e 60 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

| TV | 32'' | 40'' | 50'' | 55'' |
|---|---|---|---|---|
| Stabilimento A | 1.3 | 1.4 | 1.6 | 1.8 |
| Stabilimento B | 1.4 | 1.6 | 1.9 | 2.1 |
| Richiesta | 1000 | 800 | 500 | 300 |

Sapendo che i 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 700, 900, e 1300 euro, l'azienda vuole determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il ricavo complessivo.

## Esempio 4 - modello

Variabili decisionali:
$x_{ij}$ = numero di TV di tipo $i$ prodotti nello stabilimento $j$,
con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

Modello matematico (di programmazione lineare intera):

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A} + x_{1B}) + 700\,(x_{2A} + x_{2B}) + 900\,(x_{3A} + x_{3B}) + 1300\,(x_{4A} + x_{4B}) \\ 1.3\,x_{1A} + 1.4\,x_{2A} + 1.6\,x_{3A} + 1.8\,x_{4A} \le 2000 \\ 1.4\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.9\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \le 2400 \\ x_{1A} + x_{1B} \ge 1000 \\ x_{2A} + x_{2B} \ge 800 \\ x_{3A} + x_{3B} \ge 500 \\ x_{4A} + x_{4B} \ge 300 \\ x_{ij} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

## Esempio 5 - problema

Supponiamo di voler investire un capitale di 100 mila euro. Abbiamo a disposizione 9 investimenti possibili e per ciascuno di essi conosciamo il ricavo atteso ed il costo attuale:

| Investimento | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ricavo atteso (migliaia di euro) | 50 | 65 | 35 | 16 | 18 | 45 | 45 | 40 | 25 |
| Costo (migliaia di euro) | 40 | 50 | 25 | 10 | 10 | 40 | 35 | 30 | 20 |

Compatibilmente con il capitale disponibile, quali sono gli investimenti che forniscono il massimo ricavo totale?

## Esempio 5 - modello

Variabili decisionali: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'investimento } j \text{ viene scelto,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$ per $j = 1, \dots, 9$

Modello matematico (di programmazione lineare binaria):

$$\begin{cases} \max\ 50x_1 + 65x_2 + 35x_3 + 16x_4 + 18x_5 + 45x_6 + 45x_7 + 40x_8 + 25x_9 \\ 40x_1 + 50x_2 + 25x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 40x_6 + 35x_7 + 30x_8 + 20x_9 \leq 100 \\ x_j \in \{0, 1\}, \qquad j = 1, \dots, 9 \end{cases}$$

## Problema dello zaino (knapsack problem)

Dati $n$ oggetti di valore $v_1, \ldots, v_n$ e peso $p_1, \ldots, p_n$, ed un contenitore di capacità $C$, quali oggetti inserisco nel contenitore, rispettando la sua capacità, in modo da massimizzare il valore totale?

Variabili: $$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto } j \text{ viene inserito,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} v_j \, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \, x_j \leq C \\ x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

## Problema del Bin Packing

Dati $n$ oggetti di peso $p_1, \ldots, p_n$ e $m$ contenitori ognuno di capacità $C$, trovare il minimo numero di contenitori in cui inserire tutti gli oggetti.

Variabili: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è inserito nel contenitore } i, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$ $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è usato,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello:

$$
\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i=1}^{m} y_i \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n && (1) \\
& \sum_{j=1}^{n} p_j\, x_{ij} \leq C\, y_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m && (2) \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i, j \\
& y_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i
\end{aligned}
$$

(1): ogni oggetto è inserito in un solo contenitore (semiassegnamento)

(2): capacità contenitori

## Carico fisso - problema

Un'azienda conserviera produce tonno all'olio, tonno al vapore e tonno agli aromi. Per la produzione di ogni tipo di tonno è necessario affittare una macchina avente i seguenti costi: 200 euro a settimana per produrre tonno-olio; 150 euro a settimana per il tonno-vapore; 100 euro a settimana per il tonno-aromi. I tempi di lavorazione, le richieste di materia prima ed il ricavo di ogni prodotto sono riassunti nella seguente tabella:

| prodotto | tempi di lavorazione (ore/scatola) | materia prima (kg/scatola) | ricavo (euro/scatola) |
|---|---|---|---|
| tonno-olio | 3 | 4 | 6 |
| tonno-vapore | 2 | 3 | 4 |
| tonno-aromi | 6 | 4 | 7 |

Ogni settimana sono disponibili 150 ore di lavoro e 160 kg di tonno. Determinare il piano produttivo settimanale in modo da massimizzare il profitto complessivo.

## Carico fisso - modello

Variabili:

$x_1, x_2, x_3 =$ numero di scatole di tonno all'olio, al vapore e agli aromi prodotti.

$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{se viene prodotto tonno all'olio,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$ Analogamente si definiscono $y_2, y_3$.

Modello:

$$
\begin{cases}
\max\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200\,y_1 - 150\,y_2 - 100\,y_3 \\
3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\
4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\
x_1 \leq M\,y_1 \\
x_2 \leq M\,y_2 \\
x_3 \leq M\,y_3 \\
x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \\
y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
\end{cases}
$$

dove $M$ è sufficientemente grande (es. $M = 100$).

## Vincoli di alternativa - problema

Un'azienda produce tre tipi di auto: utilitarie, berline, station-wagon. Le risorse necessarie, i tempi di lavorazione ed i profitti sono sintetizzati nella seguente tabella:

| auto | acciaio (tonnellate) | lavoro (ore) | profitto (euro) |
|---|---|---|---|
| utilitarie | 1.5 | 30 | 2000 |
| berline | 3 | 25 | 3000 |
| station-wagon | 5 | 40 | 4000 |

L'azienda ha a disposizione 6000 tonnellate di acciaio e 60000 ore di lavoro.
Inoltre, se l'azienda produce un tipo di veicolo, allora ne deve produrre almeno 1000 unità.
Trovare il piano di produzione che massimizza il profitto totale.

## Vincoli di alternativa - modello

Variabili:

$x_1, x_2, x_3 =$ numero di utilitarie, berline e station–wagon prodotte.

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{se l'azienda produce utilitarie,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Analogamente si definiscono $y_2, y_3$.

Modello:

$$\begin{cases} \max\ 2000\,x_1 + 3000\,x_2 + 4000\,x_3 \\ 1.5\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 \leq 6000 \\ 30\,x_1 + 25\,x_2 + 40\,x_3 \leq 60000 \\ x_1 \leq 2000 y_1 \\ 1000 y_1 \leq x_1 \\ x_2 \leq 2000\,y_2 \\ 1000 y_2 \leq x_2 \\ x_3 \leq 1200\,y_3 \\ 1000 y_3 \leq x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

## Distribuzione di lavori - problema

Un'azienda ha a disposizione $m$ macchine per eseguire $n$ lavori; ogni lavoro deve essere eseguito da una sola macchina; $t_{ij}$ è il tempo necessario alla macchina $j$ per eseguire il lavoro $i$. Determinare come assegnare i lavori alle macchine in modo da effettuare tutti i lavori nel minor tempo possibile.

Esempio. $m = 4$, $n = 8$, tempi di lavorazione indicati in tabella:

| | macchina 1 | macchina 2 | macchina 3 | macchina 4 |
|---|---|---|---|---|
| lavoro 1 | 6 | - | 7 | 3 |
| lavoro 2 | 4 | 7 | 5 | 6 |
| lavoro 3 | - | 5 | 9 | 4 |
| lavoro 4 | - | 4 | 6 | 5 |
| lavoro 5 | 5 | 8 | 2 | - |
| lavoro 6 | 9 | 9 | 3 | 7 |
| lavoro 7 | 8 | 2 | - | 6 |
| lavoro 8 | 7 | 6 | 9 | 5 |

## Distribuzione di lavori - modello

Variabili: $t$ = tempo necessario per eseguire tutti i lavori

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ è eseguito dalla macchina } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \min \; t \\ \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\, x_{ij} \le t & \text{per ogni macchina } j = 1, \dots m \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & \text{per ogni lavoro } i = 1, \dots n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

## Selezione di sottoinsiemi - problemi

Insieme $I = \{1, \dots, m\}$.
Famiglia $S_1, \dots, S_n$ di sottoinsiemi di $I$, ognuno ha costo (o valore) $c_j$.

**Problema di copertura**: determinare una sottofamiglia $\mathcal{F}$ di costo minimo tale che ogni elemento di $I$ appartenga ad almeno un sottoinsieme di $\mathcal{F}$.

**Problema di partizione**: determinare una sottofamiglia $\mathcal{F}$ di costo minimo tale che ogni elemento di $I$ appartenga esattamente ad un sottoinsieme di $\mathcal{F}$.

**Problema di riempimento**: determinare una sottofamiglia $\mathcal{F}$ di valore massimo tale che ogni elemento di $I$ appartenga ad al più un sottoinsieme di $\mathcal{F}$.

Esempio: $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \{2, 4\}$, $S_3 = \{2, 5, 6\}$, $S_4 = \{5, 6\}$, $S_5 = \{3, 4\}$.

copertura: $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, S_3\}$ partizione: $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, S_4\}$
riempimento: $\mathcal{F} = \{S_3, S_5\}$

## Selezione di sottoinsiemi - modelli

Definiamo la matrice: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S_j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Ad ogni sottofamiglia $\mathcal{F}$ associamo una variabile $x$, dove $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se } S_j \in \mathcal{F}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Copertura

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall\ i \\ x_j \in \{0,1\} \quad \forall\ j \end{cases}$$

Partizione

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \quad \forall\ i \\ x_j \in \{0,1\} \quad \forall\ j \end{cases}$$

Riempimento

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \quad \forall\ i \\ x_j \in \{0,1\} \quad \forall\ j \end{cases}$$

## Problemi di copertura - esempio 1

**Dislocazione mezzi soccorso**
Insieme $U$ di siti in cui sono presenti utenti.
Insieme $M$ di siti dove è possibile dislocare ambulanze.
$t_{ij}$ = tempo necessario utente in $i \in U$ sia raggiunto da ambulanza posta in $j \in M$
$c_j$ = costo di attivazione del sito $j \in M$
$T$ = massima attesa per ogni utente.

Obiettivo: decidere in quali siti dislocare ambulanze in modo da minimizzare il costo totale con la garanzia che ogni utente possa essere raggiunto in al più $T$ minuti.

Il problema può essere formulato come problema di copertura, dove
$I = U$
sottoinsiemi $S_j = \{$utenti raggiunti entro $T$ minuti da un'ambulanza posta in $j\}$.

## Problemi di copertura - esempio 2

### Ricerca di informazioni

Bisogna soddisfare $m$ richieste di dati.
Ci sono $n$ archivi a disposizione, ognuno dei quali contiene solo alcune delle informazioni richieste.
$c_j =$ costo per interrogare archivio $j$.

Obiettivo: selezionare un sottoinsieme di archivi capace di soddisfare tutte le richieste e che richieda il minimo costo totale.

Il problema può essere formulato come problema di copertura, dove:
$I = \{\text{richieste}\}$, sottoinsiemi $S_j =$ archivi.

## Problemi di copertura - esempio 2

### Ricerca di informazioni

Bisogna soddisfare $m$ richieste di dati.
Ci sono $n$ archivi a disposizione, ognuno dei quali contiene solo alcune delle informazioni richieste.
$c_j =$ costo per interrogare archivio $j$.

Obiettivo: selezionare un sottoinsieme di archivi capace di soddisfare tutte le richieste e che richieda il minimo costo totale.

Il problema può essere formulato come problema di copertura, dove:
$I = \{\text{richieste}\}$, sottoinsiemi $S_j =$ archivi.

### Esercizio 1

Si consideri il problema di disporre in una scacchiera il minimo numero di regine in modo che tutte le caselle non occupate risultino "sotto attacco" da almeno una regina. Formularlo come problema di copertura.

# Problemi di partizione - esempio

## Pianificazione di equipaggi

Compagnia aerea ha $m$ rotte (punto partenza, punto arrivo, durata volo).
Esistono $n$ possibili insiemi di rotte (*round trip*) che può fare un equipaggio.
$c_j$ = costo del *round trip* $j$.

Obiettivo: determinare un insieme di *round trip* con il minimo costo totale in modo che ogni rotta appartenga ad esattamente un *round trip*.

Il problema può essere formulato come problema di partizione, dove:
$I = \{\text{rotte}\}$, sottoinsiemi $S_j =$ *round trip*.

# Problemi di partizione - esercizio

## Esercizio 2

Formulare il problema del Sudoku come problema di partizione.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | | | 7 | 4 | |
| | 5 | | | 9 | | | 3 | 2 |
| | | 6 | 7 | | | 9 | | |
| 4 | | | 8 | | | | | |
| | 2 | | | | | | 1 | |
| | | | | | 9 | | | 5 |
| | | 4 | | | 7 | 3 | | |
| 7 | 3 | | | 2 | | | 6 | |
| | 6 | 5 | | | 4 | | | |

# Problemi di riempimento - esempio

## Squadre di operai

Un'azienda ha un insieme di operai ed un insieme di possibili squadre di operai.
La squadra $j$ è in grado di svolgere un'attività che fornisce profitto $p_j$.
Le squadre devono lavorare contemporaneamente.

Obiettivo: formare le squadre di operai in modo da massimizzare il profitto totale.

Il problema può essere formulato come problema di riempimento, dove:
$I = \{\text{operai}\}$, sottoinsiemi $S_j$ = squadre di operai.

# Problemi di riempimento - esempio

## Squadre di operai

Un'azienda ha un insieme di operai ed un insieme di possibili squadre di operai.
La squadra $j$ è in grado di svolgere un'attività che fornisce profitto $p_j$.
Le squadre devono lavorare contemporaneamente.

Obiettivo: formare le squadre di operai in modo da massimizzare il profitto totale.

Il problema può essere formulato come problema di riempimento, dove:
$I = \{\text{operai}\}$, sottoinsiemi $S_j =$ squadre di operai.

## Esercizio 3

Si consideri il problema di disporre in una scacchiera il massimo numero di regine che non si "attaccano" reciprocamente. Formularlo come problema di riempimento.

## Esercizi di riepilogo - facility location

La direzione di un'azienda decide di aprire al più $n$ magazzini per servire $m$ punti vendita. La direzione deve stabilire anche la capacità di ogni magazzino aperto, che può essere scelta nell'insieme $\{u_1, u_2, u_3\}$. Il costo $c_{hj}$ di attivazione del magazzino $j$ dipende dalla capacità $u_h$ scelta $(j = 1, \dots, n,\ h = 1, 2, 3)$. Sapendo che il punto vendita $i$ ha una domanda $d_i$, la direzione deve stabilire quali magazzini aprire (e le relative capacità) ed assegnare i punti vendita ai magazzini aperti in modo da rispettare le capacità dei magazzini e minimizzando il costo totale di attivazione.

## Esercizi di riepilogo - facility location

Variabili: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il punto vendita } i \text{ è assegnato al magazzino } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$y_{hj} = \begin{cases} 1 & \text{se il magazzino } j \text{ viene aperto con capacità } u_h, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello:

$$
\begin{aligned}
\min \ & \sum_{h=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} c_{hj} y_{hj} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall\ i = 1, \dots, m \\
& \sum_{h=1}^{3} y_{hj} \leq 1 \qquad \forall\ j = 1, \dots, n \\
& \sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} \leq \sum_{h=1}^{3} u_h y_{hj} \qquad \forall\ j = 1, \dots, n \\
& x_{ij}, y_{hj} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

## Esercizi di riepilogo - distribuzione merce

Un'azienda produttrice di pasta dispone di $n$ depositi, aventi ciascuno una capacità mensile pari a $U_j$ scatole di pasta ($j = 1, \ldots, n$), e $m$ centri di distribuzione, ognuno dei quali richiede $d_i$ scatole di pasta al mese ($i = 1, \ldots, m$). Il rifornimento della pasta dai depositi ai centri di distribuzione è organizzato in modo che ogni centro deve essere rifornito da un unico deposito. Il deposito $j$ ha un costo di spedizione $c_j$ per ogni scatola inviata ai centri di distribuzione ed un costo fisso di gestione mensile $f_j$ nel caso in cui rifornisca almeno un centro. L'azienda deve stabilire come rifornire mensilmente i centri di distribuzione in modo da minimizzare il costo totale.

## Esercizi di riepilogo - distribuzione merce

Variabili: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il centro } i \text{ è servito dal deposito } j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$

$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il deposito } j \text{ rifornisce almeno un centro,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello:

$$
\begin{aligned}
\min \ \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \qquad \forall\ i = 1, \dots, m \\
\sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} \leq U_j y_j & \qquad \forall\ j = 1, \dots, m \\
x_{ij} \in \{0, 1\} & \\
y_j \in \{0, 1\} &
\end{aligned}
$$

## Esercizi di riepilogo - presidi sanitari

L'amministratore sanitario di una città costituita da $m$ quartieri, ognuno dei quali abitato da $p_i$ persone ($i = 1, \dots, m$), vuole organizzare $n$ presidi sanitari ed assegnare ad essi gli $m$ quartieri. Per ragioni di equità, il rapporto tra il minimo ed il massimo numero di abitanti assegnati ad un presidio deve essere almeno $1/2$. Sapendo che $c_{ij}$ è il costo dovuto all'assegnamento del quartiere $i$ al presidio $j$, l'amministratore deve decidere come assegnare i quartieri ai presidi, rispettando il vincolo di equità, in modo da minimizzare il costo totale.

## Esercizi di riepilogo - presidi sanitari

Variabili: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il quartiere } i \text{ è assegnato al presidio } j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$

e due variabili ausiliarie $u, v \in \mathbb{R}$.

Modello:

$$
\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall\ i = 1, \dots, m \\
& u \leq \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \qquad \forall\ j = 1, \dots, n \\
& v \geq \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \qquad \forall\ j = 1, \dots, n \\
& u \geq v/2 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

## Esercizi di riepilogo - presidi sanitari (variante)

L'amministratore sanitario di una città costituita da $m$ quartieri, ognuno dei quali abitato da $p_i$ persone $(i = 1, \ldots, m)$, vuole organizzare $n$ presidi sanitari ed assegnare ad essi gli $m$ quartieri. L'amministratore deve decidere come assegnare i quartieri ai presidi in modo che il numero di abitanti assegnati ai presidi sia il più uniforme possibile, ossia vuole minimizzare la massima differenza di abitanti tra un presidio e l'altro.

## Esercizi di riepilogo - presidi sanitari (variante)

Variabili: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il quartiere } i \text{ è assegnato al presidio } j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$
e una variabile ausiliaria $u \in \mathbb{R}$.

Modello:

$$\begin{aligned} & \min \ u \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 && \forall \ i = 1, \dots, m \\ u \geq \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} - & \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ik} && \forall \ j, k = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

## Soluzione dell'esercizio 1

Consideriamo una scacchiera $n \times n$.

Variabili: per ogni casella $(i, j)$, $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la casella } (i,j) \text{ contiene una regina,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$

Modello:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\sum_{h=1}^{n} x_{ih} + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{n} x_{hj} + \sum_{h=1}^{\min\{n-i,n-j\}} x_{i+h,j+h} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\min\{i-1,j-1\}} x_{i-h,j-h} + \sum_{h=1}^{\min\{n-i,j-1\}} x_{i+h,j-h} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\min\{i-1,n-j\}} x_{i-h,j+h} \geq 1 \qquad \forall\ i, j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall\ i, j = 1, \ldots, n$$

## Soluzione dell'esercizio 2

Variabili: per ogni $i, j, k = 1, \ldots, 9$, $x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se la casella } (i,j) \text{ contiene } k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello:

$$
\begin{aligned}
& \min\ 0 \\
& \sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall\ i, j = 1, \ldots, 9 \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad \forall\ i, k = 1, \ldots, 9 \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad \forall\ j, k = 1, \ldots, 9 \\
& \sum_{(i,j) \in Q_h} x_{ijk} = 1 \qquad \forall\ h, k = 1, \ldots, 9 \\
& x_{ijk} \in \{0, 1\} \qquad \forall\ i, j, k = 1, \ldots, 9
\end{aligned}
$$

dove $Q_h$ è l'$h$-esimo quadrato $3 \times 3$. Ad esempio:
$Q_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

## Soluzione dell'esercizio 3

Consideriamo una scacchiera $n \times n$.

Variabili: per ogni casella $(i,j)$, $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la casella } (i,j) \text{ contiene una regina,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$

Modello:

$$
\begin{array}{ll}
\max \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 & \forall\ i = 1, \dots, n \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1 & \forall\ j = 1, \dots, n \\
\displaystyle\sum_{i=\max\{1,k-n\}}^{\min\{n,k-1\}} x_{i,k-i} \le 1 & \forall\ k = 2, \dots, 2n \\
\displaystyle\sum_{i=\max\{1,k+1\}}^{\min\{n,n+k\}} x_{i,i-k} \le 1 & \forall\ k = 1-n, \dots, n-1 \\
x_{ij} \in \{0,1\} & \forall\ i,j = 1, \dots, n
\end{array}
$$