

SCIENZA IN PRIMO PIANO

LA SUPERFLUIDITÀ DI ATOMI FERMIONICI:

Sulla natura dello stato superfluido, dalle coppie di Cooper alla condensazione di Bose-Einstein

Maria Luisa Chiofalo

Classe di Scienze, Scuola Normale Superiore, Pisa INFN, Sezione di Pisa e INFN, UdR Pisa SNS

1. - Introduzione

Il fenomeno della superfluidità e della superconduttività nei liquidi quantistici è intimamente legato alla condensazione di Bose-Einstein (BEC). In fluidi di particelle con statistica bosonica, la transizione di fase allo stato superfluido corrisponde alla comparsa di un numero macroscopico di bosoni nello stato quantistico ad energia più bassa, come è mostrato nella teoria microscopica dell' ^4He superfluido⁽¹⁾.

In fluidi fermionici, la formazione di coppie di particelle fortemente correlate e la loro condensazione nello stato di energia minima sono due concetti fondamentali nella comprensione di diversi fenomeni che si osservano nella fisica della materia condensata. Un esempio è la transizione allo stato superconduttivo nei metalli, che ha storicamente segnato un altro passaggio fondamentale nella fisica a molti corpi con la teoria di Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS)⁽²⁾. Nella teoria BCS, la superconduttività è determinata dalla formazione di coppie di Cooper di elettroni correlate nello spazio degli impulsi e dalla loro simultanea condensazione.

In lavori fondamentali degli anni '70-'80, Eagles⁽³⁾, Leggett⁽⁴⁾ e Nozières e Schmitt-Rink⁽⁵⁾ hanno evidenziato come il gas di elettroni in

presenza di crescenti interazioni attrattive a corto raggio fosse un modello in grado di descrivere con continuità il passaggio da un meccanismo di accoppiamento BCS di coppie di Cooper ad una condensazione di Bose-Einstein di bosoni composti fortemente legati.

La forza e la tipologia delle interazioni fra le particelle, ma anche la dimensionalità del sistema, hanno dunque un ruolo importante nel determinare la natura e simmetria dello stato superfluido e di quello normale, e quindi i differenti modi con i quali la transizione può essere realizzata e osservata. Esse determinano anche il valore della temperatura di transizione T_c rispetto alla scala di energia tipica del sistema, che è solitamente in relazione con le dimensioni del parametro d'ordine della transizione, come mostrato in fig. 1.

Nell' ^4He ad esempio, che è caratterizzato da forti interazioni, la frazione di fluido condensata è inferiore al 10% a temperature $T \ll T_c \simeq 2,17\text{ K}$ prossime allo zero, anche se il 100% del sistema è superfluido. I condensati di Bose-Einstein di vapori di atomi alcalini realizzati più di recente con tecniche combinate di raffreddamento laser, confinamento e raffreddamento per evaporazione^(6,7), hanno costituito un caso straordinario di BEC: la capacità di raggiungere temperature fino a qualche nK ha consentito di ottenere la condensazione per densità $n \simeq 10^{14}\text{ cm}^{-3}$, talmente basse rispetto a quelle dell' ^4He , da rendere la frazione di condensato (e superfluido) a $T \ll T_c$ praticamente pari al 100%.

Nel caso dei fluidi fermionici, un meccanismo analogo a quello BCS determina la superfluidità nell' ^3He , ma la presenza di un potenziale di interazione fortemente repulsivo a corte distanze e debolmente attrattivo a medie e lunghe distanze, fa sì che le coppie di Cooper si formino in uno stato di momento angolare $l = 1$ (anziché $l = 0$ come nei superconduttori metallici), e inoltre le entità che formano le coppie di Cooper non sono gli atomi, ma piuttosto quasiparticelle

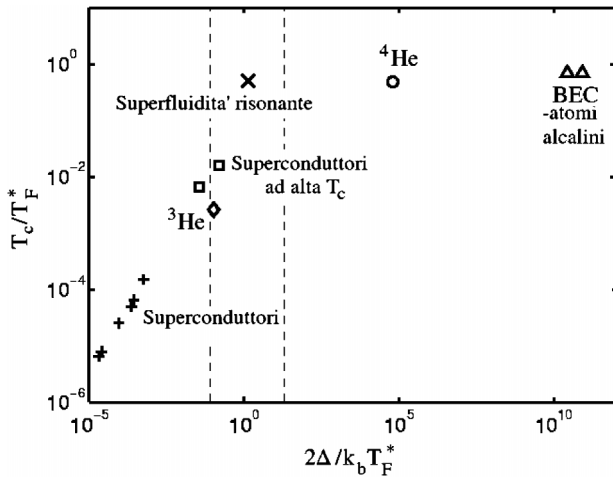


Fig. 1. – Dalla superfluidità (superconduttività) di tipo BCS di coppie di Cooper alla condensazione di Bose-Einstein di bosoni composti fortemente legati. La temperatura di transizione allo stato superfluido di liquidi quantistici con statistica bosonica o fermionica, T_c/T_F^* , viene mostrata in un grafico bilogarithmico in funzione del rilevante *gap* di energia 2Δ . Nei casi di fluidi atomici, atomi con un numero dispari (pari) di costituenti fermionici si comportano come fermioni (bosoni), al di sotto della soglia di degenerazione quantistica. Nella regione a sinistra e in quella centrale cadono i casi di fluidi fermionici, quali i superconduttori di tipo BCS (croci), l' ^3He superfluido (rombo), i superconduttori ad alta temperatura critica (quadrati), e la predizione della teoria della superfluidità risonante per gli atomi alcalini fermionici (\times). In queste regioni, 2Δ è la più piccola energia necessaria per rompere una coppia e T_F^* è la temperatura di Fermi $T_F = \hbar^2 k_F^2 / (2m k_b)$ con k_b costante di Boltzmann. Nella regione a destra si trovano casi di superfluidi bosonici, quali l' ^4He liquido (cerchio) e i condensati di Bose-Einstein (BEC) di vapori di atomi alcalini (triangoli). In questa regione 2Δ è la più piccola energia necessaria per rompere il bosone composto in due fermioni (p. es. nel processo di ionizzazione in un nucleo atomico carico e un elettrone), e T_F^* è la temperatura di Fermi del gas di atomi ionizzati. Il grado di interazione aumenta da sinistra a destra del grafico insieme al valore di T_c/T_F^* . Da rif. (29).

che corrispondono ad eccitazioni elementari del sistema (8). Un altro esempio dell'importanza delle interazioni in sistemi fermionici è dato dai superconduttori ad alta temperatura critica (HTSC). Negli HTSC la presenza di forti correlazioni a corto raggio di diverso tipo, che agiscono sia sui gradi di libertà di carica che di spin dei portatori, competono nel determinare la natura delle coppie (9). A differenza dei superconduttori metallici, dove il numero di coppie di Cooper fra loro correlate all'interno del volume mediamente occupato da una particella è dell'ordine di mille e $T_c/T_F \simeq 10^{-4}$, negli HTSC questo numero è dell'ordine di uno con

$T_c/T_F \simeq 10^{-2}$. Di fatto, le interazioni sono tali da formare le coppie ancor prima che queste condensino nella transizione alla fase superconduttiva. Questa fenomenologia ha stimolato ulteriori sviluppi della teoria di Eagles, Leggett, e Nozières e Schmitt-Rink sull'evoluzione dalla BCS alla BEC (10, 11).

Un caso peculiare è poi la condensazione di Bose-Einstein di eccitoni, in cui la coppia (l'eccitone) è uno stato legato di elettrone e buca, ed evidenze sperimentali non conclusive sono state riscontrate in strutture a semiconduttore (12). Per finire, la condensazione di fermioni composti, da intendere come stati legati di un elettrone e di un numero pari di vortici, è una possibile spiegazione dell'effetto Hall quantistico intero e frazionario. Questi fenomeni si osservano nel gas di elettroni bidimensionale in condizioni di forte degenerazione quantistica, ottenuto in strutture a semiconduttore opportunamente ingegnerizzate alla presenza di forti campi magnetici (13).

Tutti gli esempi fin qui citati indicano che la temperatura, la forza delle interazioni e la dimensionalità del sistema sono parametri che governano diagrammi di fase complessi con transizioni fra stati quantistici differenti, ma in nessuno dei casi illustrati accade che tutti e tre i parametri siano controllabili con sufficiente accuratezza e precisione.

Il raffreddamento di vapori di atomi di ^{40}K e ^6Li di densità $n \simeq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ a temperature $T < 0,1 T_F$ ha consentito la realizzazione di un nuovo stato della materia, ovvero un fluido di atomi a bassa densità e interagenti che si comporta secondo la statistica di Fermi-Dirac (14-19). Il sistema è di particolare interesse perché è stato dimostrato come le interazioni fra gli atomi possono essere controllate (20, 21) mediante il meccanismo della risonanza di Fano-Feshbach (22), sperimentato per la prima volta nei vapori di atomi alcalini bosonici per produrre condensati molecolari (23). Grazie a questo meccanismo sono stati prodotti e osservati vapori composti da stati molecolari debolmente legati di due fermioni (24-28). Anche la dimensionalità può essere variata utilizzando tecniche atomiche precedentemente sviluppate per i BEC, ed esperimenti sono in corso in questa direzione: gli atomi possono essere confinati in piani e tubi, mediante l'uso di reticoli ottici mono- e bi-dimensionali, realizzati con fasci laser contropropaganti.

Di fronte a questi stimoli sperimentali, sono

state formulate proposte teoriche per realizzare la superfluidità di fermioni in presenza della risonanza di Fano-Feshbach^(29,30) e per studiare la natura del superfluido al variare delle interazioni⁽³¹⁻³³⁾. Questo consentirebbe di esplorare tutte le regioni in fig. 1, dalla BCS di coppie di Cooper⁽³⁴⁾ alla condensazione di Bose-Einstein di coppie di fermioni fortemente legate.

La condensazione di Bose-Einstein di molecole di fermioni è stata chiaramente dimostrata in diversi laboratori^(35,36) anche al variare della forza di interazione⁽³⁷⁻⁴⁰⁾, e costituisce una sfida per una descrizione teorica quantitativamente adeguata dello stato fondamentale al variare delle interazioni. Tutte queste considerazioni fanno dei fluidi di atomi alcalini un laboratorio unico per lo studio sperimentale e teorico della fisica fondamentale e della fisica a molti corpi, oltre che per applicazioni innovative⁽⁴¹⁾.

Questo articolo vuole essere un viaggio attraverso i fatti sperimentali e le proposte teoriche più rilevanti emerse in un campo di ricerca affascinante che è in continuo e rapido divenire, e che integra conoscenze e metodi della fisica della materia condensata, dell'ottica atomica quantistica, e della fisica atomica.

2. – Soglia di degenerazione quantistica in un gas di atomi fermionici confinati: i primi esperimenti

Il successo del raffreddamento dei vapori di atomi alcalini fino a temperature di qualche decina di nK è dovuto ad una combinazione di tecniche. Nei primi esperimenti⁽⁶⁾, queste includevano il raffreddamento mediante fasci laser contropropaganti lungo le tre direzioni spaziali, che serve a diminuire fortemente l'energia cinetica degli atomi; il confinamento realizzato per intrappolamento magnetico, con il ruolo di aumentare la densità evitando contemporaneamente perdite per urti contro pareti "fisiche"; e infine il raffreddamento evaporativo, nel quale gli atomi più caldi sono selezionati ed espulsi dalla trappola, e i rimanenti termalizzano per collisioni elastiche ad una temperatura più bassa. Dei tre stadi, l'ultimo è quello più efficiente, perché consente di aumentare drasticamente di diversi ordini di grandezza il valore della lunghezza d'onda termica λ_T verso la soglia di degenerazione quantistica $n\lambda_T^3 \sim 1$. L'efficacia del metodo dipende quindi sensibilmente dal numero di collisioni elastiche nel-

l'unità di tempo, e anche dalla capacità di controllare eventuali perdite dalla trappola.

Il caso di atomi con statistica fermionica polarizzati in spin per la presenza della trappola magnetica pone un problema in più rispetto a quelli bosonici, perché le collisioni in onda *s*, le più probabili a queste temperature ($\simeq 100 \mu\text{K}$), risultano fortemente sopresse per il principio di Pauli. Due strategie alternative sono state adottate per superare questa difficoltà e consentire il raffreddamento: i) popolare due livelli iperfini con differente numero quantico magnetico così da rendere efficaci le collisioni fra specie di spin differente, e ii) porre il gas a contatto termico con un gas più freddo, per esempio vapori ultrafreddi o BEC di atomi bosonici. Questo metodo era stato precedentemente utilizzato per condensare un altro isotopo bosonico del Rb, il ⁸⁵Rb⁽⁴²⁾. In tutti i casi, è possibile confinare in trappola magnetica tipicamente 10^6 – 10^8 atomi a temperature comprese fra 100 e 0,1 μK .

Il primo gas atomico di Fermi degenerare è stato realizzato al JILA nel gruppo di Debbie Jin⁽¹⁴⁾ mediante la strategia i), intrappolando vapori di ⁴⁰K in una miscela dei due sottolivelli magnetici $|F = 9/2, m_F = 9/2\rangle$ e $|F = 9/2, m_F = 7/2\rangle$. Gli atomi più caldi vengono evaporati sottoponendoli ad un campo a microonde che li trasferisce nel livello non intrappolato $|F = 7/2\rangle$. Le temperature raggiungibili con questo metodo sono state inizialmente limitate a $T \simeq 0,2 T_F$, poiché il principio di Pauli tende a bloccare le collisioni elastiche che coinvolgono stati energetici finali già altamente occupati (circa il 60% a questa temperatura). A questo esperimento hanno fatto seguito quelli condotti alla Rice University nel gruppo di Randy Hulet in vapori di ⁶Li in presenza di ⁷Li (bosonico)⁽¹⁵⁾, all'École Normale Supérieure nel gruppo di Cristoph Salomon sempre in vapori di ⁶Li con ⁷Li⁽¹⁶⁾, al LENS nel gruppo di Massimo Inguscio in vapori di ⁴⁰K in presenza di un condensato di ⁸⁷Rb (bosonico)⁽¹⁷⁾, al MIT nel gruppo di Wolfgang Ketterle in vapori di ⁶Li con ²³Na⁽¹⁸⁾, e infine alla Duke University nel gruppo di John Thomas in una miscela di ⁶Li in due stati iperfini differenti $|F = 1/2, m_F = \pm 1/2\rangle$ ⁽¹⁹⁾. Negli esperimenti di raffreddamento simpatico le temperature sono state inizialmente limitate a $T \simeq 0,2 T_F$, quando la capacità termica del gas di Bose, che diminuisce mentre questo viene raffreddato evaporativamente, diventa minore di quella del gas di Fermi.

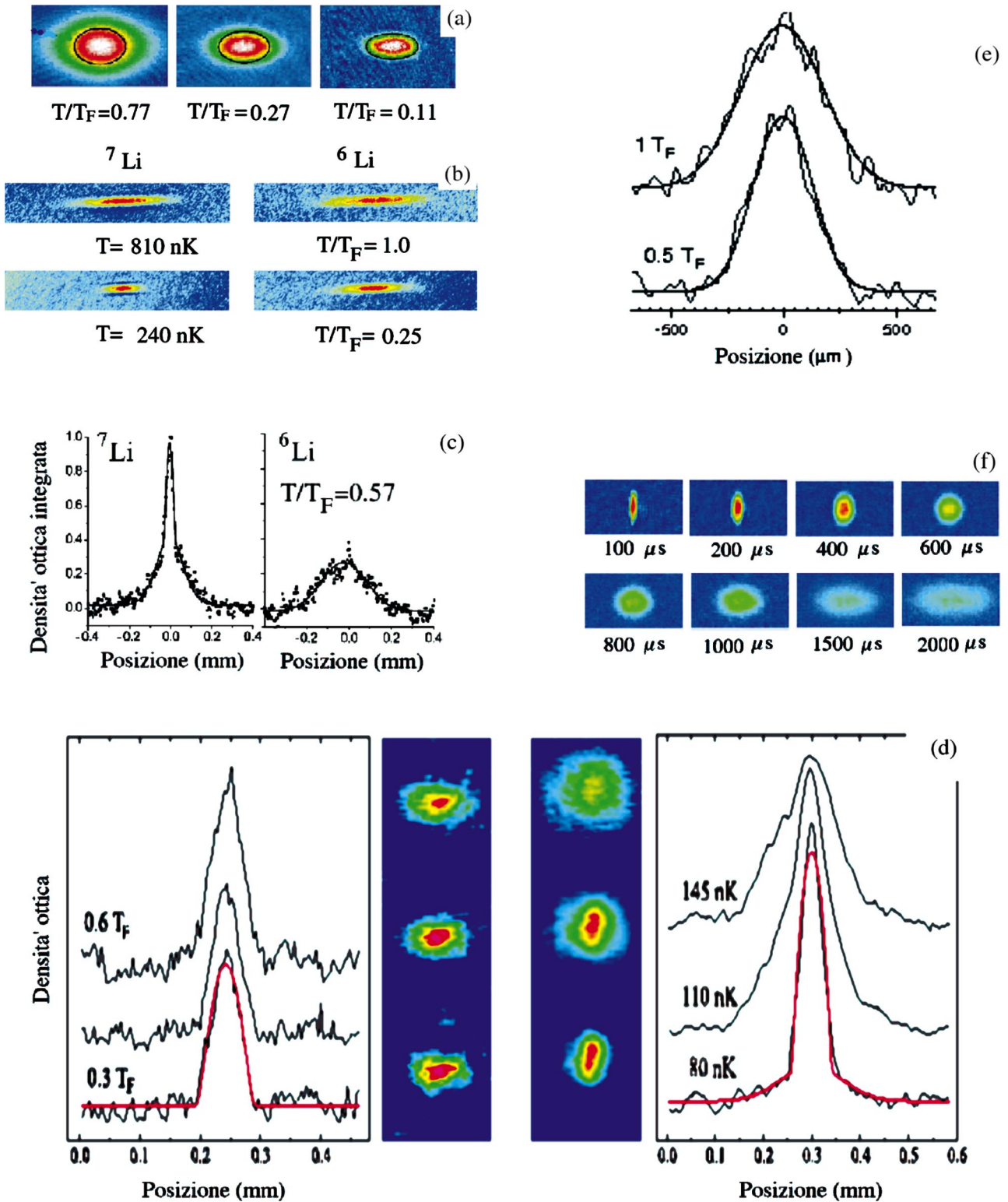


Fig. 2. – Vapori di atomi alcalini fermionici al di sotto della soglia di degenerazione quantistica, per i vari esperimenti: (a) Immagine in falsi colori della distribuzione di velocità di vapori di ^{40}K per temperature decrescenti $T/T_F = 0,77, 0,27,$ e $0,11,$ con indicata la velocità di Fermi (curva di livello nera) (JILA di Boulder). Da $(^{14},^{41})$. (b) Immagine in falsi colori di vapori di ^6Li raffreddati simpateticamente fino a $T/T_F = 0,25$ per contatto termico con ^7Li bosonico (Rice University). Da $(^{15})$. (c) Profilo di densità di vapori di ^6Li raffreddato simpateticamente fino a $T/T_F = 0,57$ per contatto termico con ^7Li bosonico (ENS di Parigi). Da $(^{16})$. (d) Profili di densità e relativa immagine in falsi colori di ^{40}K (a sinistra) raffreddato simpateticamente con un BEC di ^{87}Rb (a destra) per tre diverse temperature $T < T_F$ (LENS di Firenze). Da $(^{17})$. (e) Profili di densità di ^6Li a $T/T_F = 1$ e $0,5$ raffreddato simpateticamente con ^{23}Na (MIT). Da $(^{18})$. (f) Immagine in falsi colori dell'espansione di ^6Li raffreddato evaporativamente (Duke University). Da $(^{19})$.

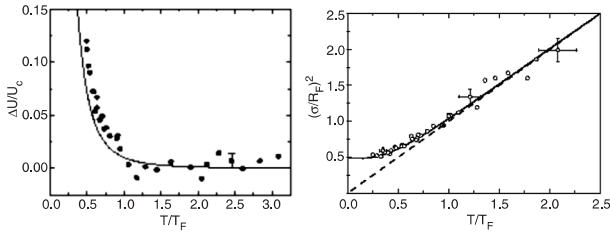


Fig. 3. – Evidenze di degenerazione quantistica tipicamente osservate in atomi fermionici al diminuire della temperatura T/T_F . A sinistra, l'esperimento del JILA: la differenza $\Delta U \equiv U - U_c$ fra l'energia misurata dall'analisi delle distribuzioni di velocità del gas in espansione e quella del gas classico $U_c = 3Nk_b T$ alla stessa temperatura (punti) è in accordo con quella attesa per un gas di Fermi ideale (curva continua). Da ⁽¹⁴⁾. A destra, l'esperimento alla Rice University: il quadrato della larghezza media $(\sigma/R_F)^2$ del profilo di densità del vapore confinato (cerchi, $R_F \propto T_F$ è il raggio di Thomas-Fermi), devia per $T < T_F$ dalla predizione per un gas classico (linea tratteggiata). Da ⁽¹⁵⁾.

La principale osservabile in questi esperimenti è il profilo di densità, che viene determinata risolvendo spazialmente con una videocamera a CCD la dispersione di luce fuori risonanza da parte del vapore intrappolato, o alternatively il suo assorbimento ottico durante l'espansione che segue lo spegnimento della trappola (necessaria per osservare sistemi troppo densi o di dimensioni troppo piccole). Dal profilo di densità è possibile estrarre quantità di interesse dinamico o termodinamico, quali la temperatura, il numero di particelle, l'energia interna⁽⁴³⁾. In fig. 2 sono riassunte alcune osservazioni sperimentali. L'evidenza delle condizioni di degenerazione si ricava da un'analisi di questi ultimi, confrontando l'energia oppure le dimensioni misurate con quelle attese per un gas di fermioni non interagenti (si veda la fig. 3).

3. – Il controllo delle interazioni: risonanza di Fano-Feshbach

In condizioni normali, le proprietà di *scattering* a bassa energia sono sufficienti per descrivere efficacemente le interazioni nei gas atomici. Il potenziale di interazione assume la forma di potenziale di contatto, $U(r) = 4\pi\hbar^2 a n/m\delta(r)$, ed è determinato dal valore della lunghezza di *scattering* a . Insieme alla distanza media fra le particelle $\propto n^{-1/3} \simeq 0,1\mu\text{m}$, $a \simeq 10\text{--}50\text{ nm}$ fissa la scala di lunghezza con $na^3 \ll 1$.

Le interazioni fra atomi possono però essere controllate utilizzando le risonanze di Fano-

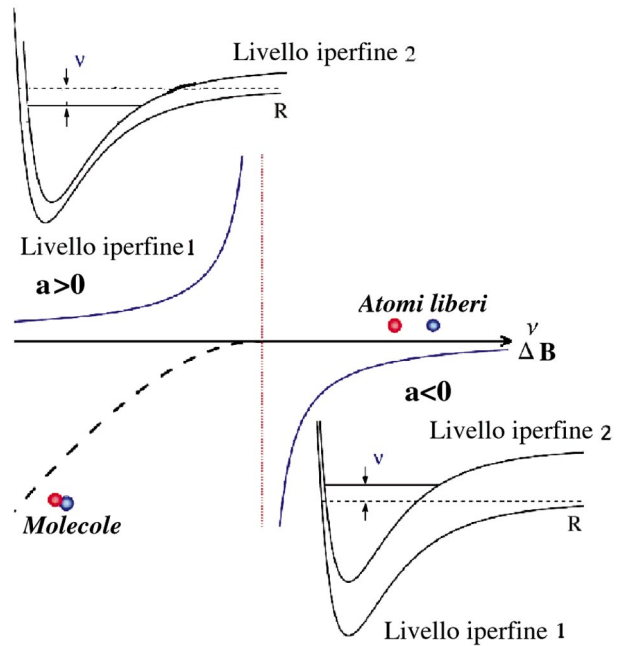


Fig. 4. – Illustrazione schematica del meccanismo della risonanza di Fano-Feshbach. Alla variazione della lunghezza di scattering a in funzione della variazione $\Delta B \equiv B - B_0$ di campo magnetico corrisponde lo spostamento relativo ν della soglia di energia di *scattering* nel livello iperfine 1 rispetto all'energia del primo stato legato del potenziale interatomico nel livello iperfine 2. In corrispondenza della risonanza si ha $|a| \rightarrow \infty$, mentre per $\nu > (<) 0$ risulta $a < (>) 0$ ovvero interazioni efficacemente attrattive (repulsive).

Feshbach⁽²²⁾. Come illustrato schematicamente in fig. 4, queste si manifestano quando l'energia di collisione di due atomi liberi nel livello iperfine 1 diventa risonante con l'energia del primo stato legato del potenziale interatomico di un secondo livello iperfine 2.

Negli esperimenti, la differenza di energia ν viene regolata per effetto Zeeman variando dall'esterno la forza del campo magnetico B rispetto al valore di risonanza B_0 . Come illustrato schematicamente in fig. 4, valori positivi (negativi) di $\Delta B \equiv B - B_0$ ovvero di ν corrispondono ad interazioni efficacemente attrattive (repulsive) con $a < 0$ ($a > 0$).

In condizioni di risonanza a non è più un parametro sufficiente, poiché le proprietà di *scattering* dipendono significativamente dall'energia sulla scala di E_F , come mostrato in fig. 5. Evidentemente, il meccanismo di Fano-Feshbach include una separazione di scale di energia e di lunghezza fra il comportamento fuori e in corrispondenza della risonanza. Al di là dei dettagli dei potenziali interatomici, i parametri che caratterizzano l'interazione sono il valore

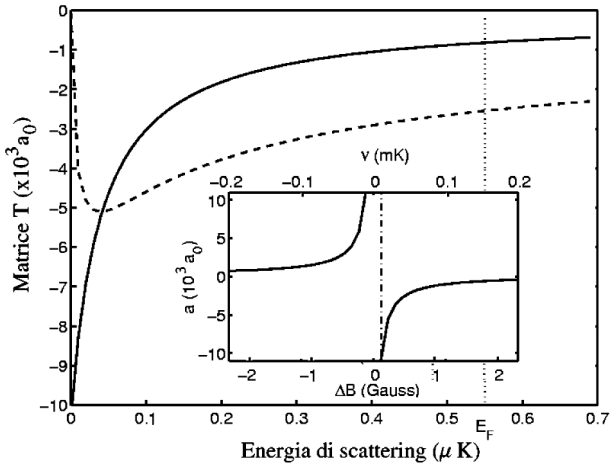


Fig. 5. – La parte reale (linea continua) e immaginaria (tratteggiata) della matrice di scattering $T(E)$ in unità di lunghezza, $T(E)m/(4\pi\hbar^2)$ in funzione dell'energia di scattering calcolata per $v = 20 E_F$ in vapori di ^{40}K (da ref.⁽⁴⁴⁾). La lunghezza di scattering è $a = T(E \rightarrow 0) = -10000 a_0$ con a_0 il raggio di Bohr, in vicinanza della risonanza di Fano-Feshbach come indicato nel riquadro. In corrispondenza della risonanza ($v = 20 E_F$), le proprietà di scattering dipendono fortemente dall'energia.

a_{bg} di a nel limite $v \rightarrow \infty$, la posizione ν_0 e la larghezza $\Delta\nu$ della risonanza.

Risonanze di Fano-Feshbach sono state osservate in vapori sia di ^{40}K che di ^6Li , come mostrato in fig. 6, a partire da misure di sezione d'urto per collisioni elastiche. La necessità di applicare campi magnetici per controllare la risonanza non è compatibile con il confinamento per mezzo della trappola magnetica. A questo scopo, il vapore viene quindi trasferito in una trappola ottica dipolare realizzata da un singolo fascio laser di lunghezza d'onda spostata nel rosso molto fuori risonanza, opportunamente focalizzato. Qui vengono tipicamente confinati 10^5 – 10^6 atomi a temperature fra 1 e $0,05 \mu\text{K}$, ovvero fino a $0,07$ – $0,15 T_F$.

Un altro scenario nel quale è possibile realizzare interazioni efficacemente attrattive fra atomi fermionici è quello offerto da miscele di vapori di specie diversa. Un esempio è la miscela ^{40}K - ^{87}Rb , nella quale le interazioni fra ^{40}K e ^{87}Rb sono parametrizzate da una lunghezza di scattering $a_{\text{KRb}} = -41 a_0$ sufficientemente grande e negativa⁽¹⁷⁾. Come mostrato in fig. 7, il progressivo raffreddamento del ^{87}Rb al di sotto della soglia di condensazione di Bose-Einstein governa il progressivo aumento di interazioni efficacemente attrattive fra gli atomi di ^{40}K . Queste si manifestano nel collasso della distribuzione di densità.

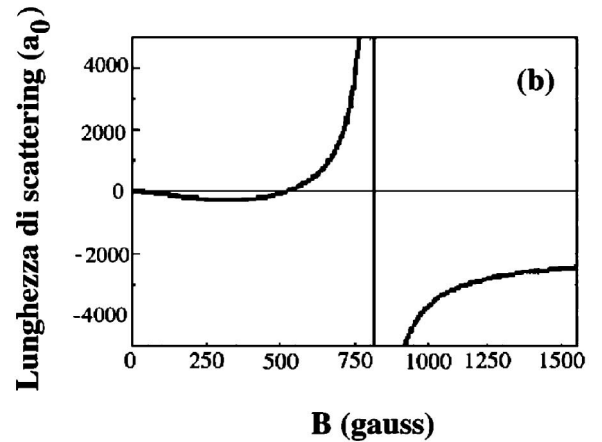
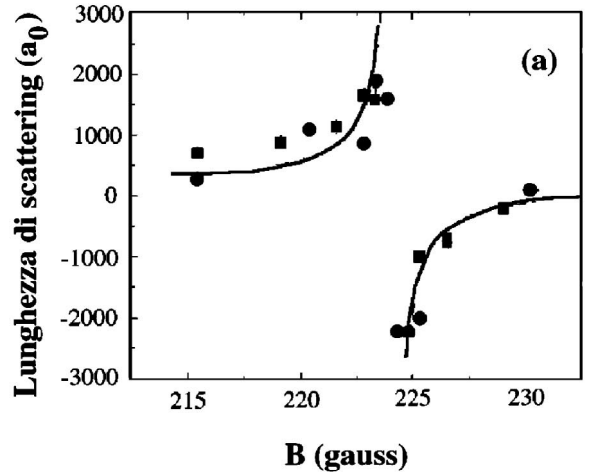


Fig. 6. – Risonanza di Fano-Feshbach: l'andamento di a in funzione di $B(a)$ misurato in vapori di ^{40}K (da rif.⁽²⁰⁾) e (b) calcolata per un gas di ^6Li (da rif.⁽²¹⁾). a_0 è il raggio di Bohr.

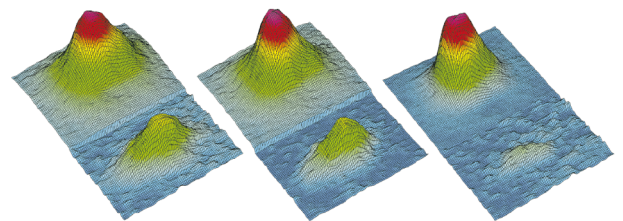


Fig. 7. – Collasso di un vapore di ^{40}K degenere (distribuzione di densità in primo piano in ognuna delle tre immagini) in presenza di un BEC di ^{87}Rb (distribuzione di densità in secondo piano in ognuna delle tre immagini). A causa dell'interazione attrattiva fra le due specie, il campione di ^{40}K collassa fino a sparire, mentre la temperatura diminuisce da sinistra a destra e il BEC di ^{87}Rb si forma. Da⁽¹⁷⁾.

4. – La superfluidità risonante

La possibilità di accedere sperimentalmente a fluidi di atomi fermionici con interazioni controllate ha stimolato l'elaborazione di proposte

teoriche per realizzare la transizione alla fase superfluida alle alte temperature sperimentalmente accessibili $T_c \lesssim 0,2 T_F$, con la prospettiva concreta di studiare l'evoluzione da un regime di accoppiamento BCS ad uno di BEC di molecole di fermioni⁽²⁹⁻³⁴⁾. In questa sezione si descrivono i concetti fondamentali che sono alla base di una delle proposte teoriche, la teoria della superfluidità risonante^(29,30), perché è costruita in modo naturale intorno al meccanismo della risonanza di Fano-Feshbach. Altre considerazioni teoriche, soprattutto sulla trattazione dell'evoluzione BCS-BEC, sono contenute nella sez. 6.

Secondo le predizioni della teoria della superfluidità risonante, l'interazione attrattiva fra due fermioni (*i.e.* nel livello iperfine 1 in fig. 4) viene mediata dalla presenza delle molecole che si formano nello stato risonante (*i.e.* nel livello iperfine 2). Questo processo può divenire talmente efficace da produrre valori di T_c fino a qualche decimo di T_F , anche in condizioni di bassa occupazione dello stato legato. L'hamiltoniana

$$H_{SR} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\varepsilon_k - \mu) a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_k + \nu - 2\mu) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + U_{bg} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}\uparrow} + g \left(\sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}\uparrow} + \text{h.c.} \right) \quad (1)$$

è costruita a partire da operatori fermionici $a_{\mathbf{k}\sigma}^{(\dagger)}$ relativi agli stati atomici e operatori bosonici $b_{\mathbf{k}}^{(\dagger)}$ relativi alle molecole di due atomi fermionici. Il numero totale N di atomi si conserva così che $N = N_a + 2N_m$ e il potenziale chimico delle molecole $\mu_m = 2\mu_a = 2\mu$ è il doppio di quello μ_a degli atomi. H_{SR} tiene conto dell'energia cinetica $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / (2m)$ dei fermioni di massa m e di quella $\varepsilon_k = \varepsilon_k / 2$ delle molecole di massa $2m$, che popolano uno stato con energia ν rispetto al continuo dei fermioni nel livello 1. Gli atomi interagiscono direttamente tramite l'interazione governata da $U_{bg} \equiv 4\pi\hbar^2 a_{bg} / m$, e indirettamente per mediazione degli stati molecolari, dipendente dall'elemento di matrice g di transizione dallo stato di due fermioni a quello di molecola e viceversa (il termine h.c. nell'equazione (1)), e che è legato alla larghezza $\Delta\nu$ della risonanza di Fano-Feshbach.

Si può mostrare che l'hamiltoniana (1) corrisponde a quella di un gas di fermioni che inte-

ragiscono per mezzo del potenziale efficace

$$V_{\text{eff}} = U_{bg} - \frac{g^2}{\nu - 2\mu}, \quad (2)$$

in modo del tutto analogo a quanto accade nei superconduttori metallici BCS, nei quali l'attrazione efficace è però mediata da altri tipi di bosoni, ovvero i quanti delle vibrazioni reticolari. V_{eff} è direttamente formulato in termini dei tre parametri a_{bg} , ν e g che governano la risonanza di Fano-Feshbach e che possono essere misurati o calcolati⁽⁴⁵⁾. Inoltre, la possibilità di cambiare ν mediante variazioni di campo magnetico corrisponde ad un controllo della forza di V_{eff} .

Le caratteristiche qualitativamente rilevanti dello stato superfluido nella teoria (1) sono evidenti già al più basso ordine perturbativo, in cui si considerano solo le molecole condensate a $k = 0$. In corrispondenza della temperatura critica appare il parametro d'ordine

$$\Delta = \sum_{\mathbf{k}} U_{bg} \langle a_{\mathbf{k}\uparrow} a_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle + g \langle b_0 \rangle \quad (3)$$

Questo è composto da un termine di tipo BCS $U_{bg} \langle a_{\mathbf{k}\uparrow} a_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle$ che corrisponde alla formazione di coppie di Cooper in onda s , e da un termine di tipo BEC $g \langle b_0 \rangle$, che corrisponde alla condensazione delle molecole a $k = 0$, come schematizzato in fig. 8. Il regime BCS o quello di Bose

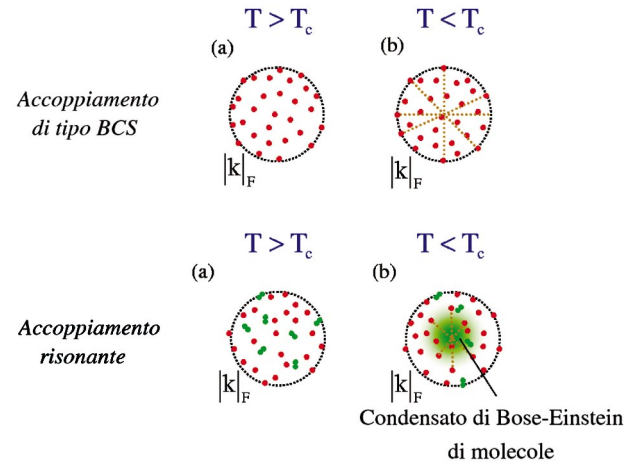


Fig. 8. – Illustrazione schematica dello stato normale ((a), $T > T_c$) e di quello superfluido ((b), $T < T_c$) nei due casi di accoppiamento BCS e risonante. Nel regime BCS, una piccola frazione di fermioni in un intorno della superficie di Fermi forma coppie di Cooper, composte da due fermioni con vettori d'onda \mathbf{k} e $-\mathbf{k}$ e spin opposti. Nel caso risonante, la forza dell'interazione attrattiva è tale da formare anche molecole nello stato normale, che poi condensano nello stato superfluido insieme alle coppie di Cooper.

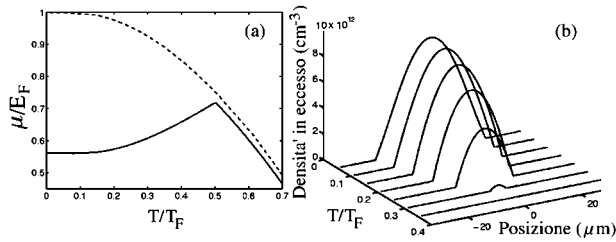


Fig. 9. – Predizione della transizione alla superfluidità risonante per un vapore di ^{40}K omogeneo (a) e intrappolato (b). (a): Il potenziale chimico μ/E_F in funzione di T/T_F (curva continua) ha una discontinuità nella derivata a T_c che il gas di Fermi normale non ha (curva tratteggiata). Da ⁽²⁹⁾. (b): La frazione di superfluido emerge al centro della trappola al diminuire per $T < T_c$. Da ⁽⁴⁴⁾.

sono determinati da quale delle due componenti predomina. Con riferimento alla fig. 4, il caso $\nu < 0$ favorisce la popolazione dello stato molecolare nel potenziale del livello iperfine 2 piuttosto che quella dello stato di due atomi fermionici liberi, e viceversa per $\nu > 0$. In dipendenza dal valore di ν , la transizione allo stato superfluido può avvenire a temperature elevate, fino a qualche decimo di T_F . Ciò è evidente ad esempio dalla discontinuità nella derivata di μ a $T_c \simeq 0,5 T_F$, come illustrato dalla fig. 9(a) per il gas omogeneo appena al di sopra della risonanza, $\nu = E_F$. In presenza del confinamento, la densità di superfluido emerge per $T < T_c \simeq 0,4 T_F$ a $\nu = +20 E_F$ nella regione di più bassa energia, ovvero al centro della trappola, come mostrato in fig. 9(b).

5. – Condensati molecolari in un gas di Fermi

I primi esperimenti per ottenere la fase superfluida sono stati effettuati nella regione BEC ($\nu < 0$ in fig. 6) della risonanza di Fano-Feshbach. In questo regime ci si attende che l'evidenza della avvenuta condensazione sia chiaramente osservabile dalla comparsa di un picco nella distribuzione delle velocità, come avviene nei BEC di atomi bosonici. In effetti, al JILA con il ^{40}K ⁽³⁵⁾ e al MIT con il ^6Li ⁽³⁶⁾, è stata realizzata e osservata la transizione ad un nuovo stato quantistico della materia, che è un condensato di Bose-Einstein di molecole di atomi fermionici.

Il primo passo è la produzione di molecole di atomi fermionici a partire da fermioni liberi ⁽²⁴⁻²⁸⁾. Nell'esperimento, i vapori vengono raffreddati secondo la tecnica evaporativa per collisione ovvero simpatica. Gli atomi ven-

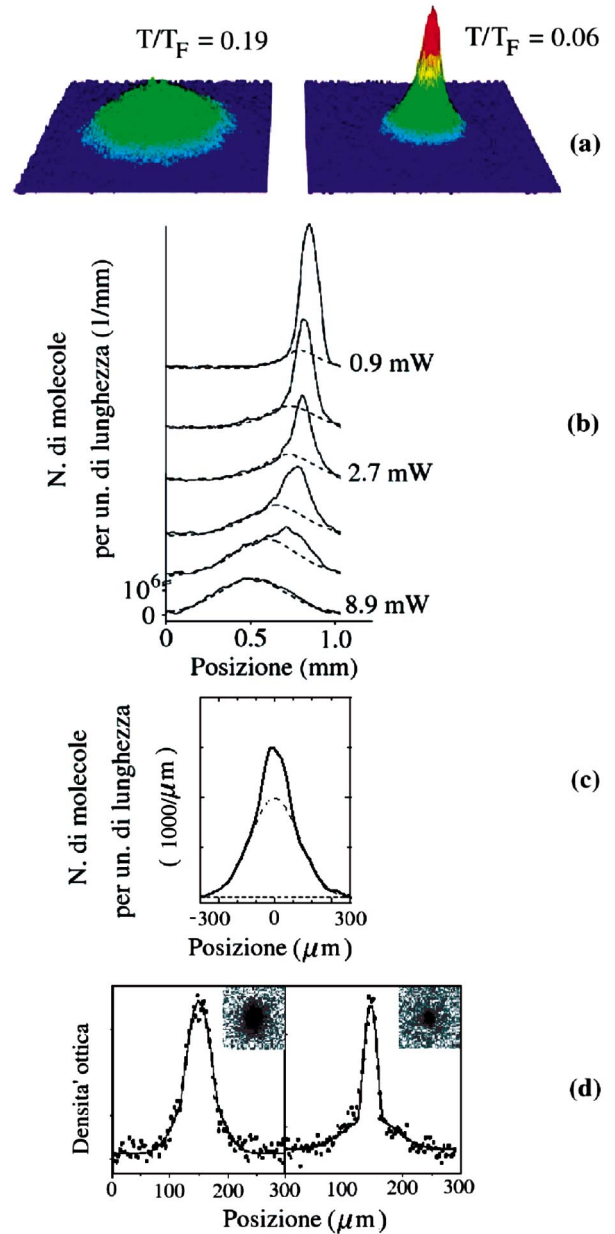


Fig. 10. – La condensazione di Bose-Einstein di molecole di fermioni emerge per $T < T_c$ nei diversi esperimenti. (a) JILA: distribuzioni di velocità, acquisite da misure di assorbimento in tempo di volo, per due differenti temperature al di sopra (sinistra) e al di sotto (destra) di T_c ⁽³⁵⁾. (b) MIT ⁽³⁶⁾: profili di densità ottenuti dalle distribuzioni di velocità per sei diverse temperature decrescenti dal basso verso l'alto, dove si evidenzia l'emergere del picco rispetto alla forma gaussiana (linea tratteggiata) attesa per il gas non condensato. (c) Innsbruck: come per il MIT, ad una sola temperatura $T < T_c$ ⁽³⁸⁾. (d) ENS: profilo di densità per il ^6Li (fermionico) a sinistra e il ^7Li (bosonico) a destra ad una sola temperatura $T < T_c$. La differenza di dimensioni è dovuta alla forza delle interazioni repulsive per il condensato molecolare, che è quasi 400 volte maggiore di quella del condensato bosonico ⁽⁴⁰⁾.

gono quindi trasferiti in una trappola ottica dipolare (fortemente asimmetrica). Qui vengono ulteriormente raffreddati evaporativamente diminuendo la profondità del potenziale confinante, e posizionati nella regione della risonanza di Fano-Feshbach con $\nu > 0$ (si veda fig. 4), mediante l'accensione del campo magnetico.

Il valore di B viene variato fino a raggiungere la regione con $\nu < 0$, dove è attesa la formazione di molecole. L'osservazione e caratterizzazione delle molecole viene effettuata mediante una tecnica spettroscopica a radiofrequenza, ovvero dissociandole in atomi che sono poi trasferiti in altri livelli iperfini e selettivamente osservati. Se la temperatura finale è inferiore a T_c si osserva la comparsa delle distribuzioni di velocità bimodali caratteristiche dei condensati di Bose-Einstein, con l'emergenza di un picco non gaussiano al centro della trappola. Queste osservazioni sono riassunte in fig. 10.

Le grandezze rilevanti di questo processo sono la debole energia di legame delle molecole, $E_b < E_F$ (ad esempio, $E_b \simeq 400$ nK nell'esperimento del JILA), la loro dimensione, che è circa un decimo della distanza media interparticella (ad esempio, 870 nm nell'esperimento del JILA), e le temperature critiche di transizione, che sono dell'ordine di $0,1 T_F$ per vapori composti da 10^5 – 10^6 atomi. La frazione di condensato a $T = 0$ nell'esperimento del JILA è circa il 15%, molto diversa da quella del MIT che è circa il 75%. L'altro aspetto rilevante è la dinamica del processo di formazione delle molecole, che nell'esperimento va tenuta sotto controllo affinché queste abbiano il tempo di raggiungere un equilibrio termico. Di fatto, è necessario che l'accensione del campo magnetico sia adiabatica rispetto ai tempi tipici di vita media della molecola (≈ 100 ms), ai tempi di collisione e di attraversamento della trappola. Quest'ultima condizione è facilmente verificata per la direzione radiale e difficilmente per quella assiale.

6. – Evoluzione dalla BEC di molecole di fermioni alla BCS di coppie di Cooper

L'osservazione di condensati di molecole di fermioni con interazioni controllabili prelude allo studio teorico di tutta l'evoluzione dello stato superfluido dalla BEC di molecole di fermioni alla BCS di coppie di Cooper (*crossover* BCS-BEC), un'idea introdotta per la prima volta

da Eagles⁽³⁾. Successivamente, Leggett⁽⁴⁾ ha mostrato come le proprietà del superfluido di fermioni in presenza di un potenziale attrattivo a corte distanze evolvano in modo continuo dalla forma BCS a quella BEC al crescere della forza di interazione. Nozières e Schmitt-Rink⁽⁵⁾ hanno quindi esteso il lavoro di Leggett al fluido a temperatura finita, anche al di sopra di T_c .

La teoria del *crossover* BCS-BEC è stato un modello di riferimento per la comprensione della fenomenologia dei superconduttori ad alta temperatura critica. A questo riguardo, gli approcci teorici adottati possono essere suddivisi in due classi: quella contenente ulteriori sviluppi in teoria perturbativa dei lavori di Eagles, Leggett, e Nozières e Schmitt-Rink, fondati sull'hamiltoniana di un gas di elettroni con interazioni attrattive a corte distanze e parametrizzate da a ⁽¹⁰⁾; e i cosiddetti modelli bosone-fermione⁽¹¹⁾, basati su un'hamiltoniana del tipo (1), nei quali la presenza di stati legati di due fermioni viene esplicitamente inclusa, insieme all'ibridizzazione di questi stati di coppia con gli stati di fermioni liberi.

Entrambi gli approcci conducono all'idea che la formazione delle coppie e la loro condensazione nello stato superfluido con coerenza di fase non avvengono simultaneamente. Piuttosto, esiste una temperatura $T^* > T_c$ alla quale le coppie si formano a causa della presenza di correlazioni a corto raggio. È comunque necessaria una quantità finita di energia per rompere queste coppie incoerenti. Questa si manifesta nella presenza di una *pseudogap* nella densità degli stati, che evolve in modo continuo fino alla comparsa della gap superconduttiva a T_c .

I due approcci hanno ispirato gli studi del *crossover* BCS-BEC nei gas di Fermi con risonanza di Fano-Feshbach⁽³¹⁻³³⁾. Nel limite in cui la larghezza $\Delta\nu$ dello stato risonante è sufficientemente grande sulla scala rilevante di energia, cioè E_F , i due approcci hamiltoniani danno risultati qualitativamente corrispondenti. Il vantaggio nell'uso del modello risonante, che include esplicitamente la risonanza di Fano-Feshbach, emerge invece nel limite opposto⁽⁴⁶⁾.

In fig. 11 è riportata la temperatura critica in funzione di ν dal limite BEC ($\nu < 0$) a quello BCS ($\nu > 0$) attraverso la risonanza di Fano-Feshbach, determinata da una soluzione perturbativa della teoria (1) che include le molecole non condensate⁽³²⁾. Nel riquadro di fig. 11 è evidente l'apparire della pseudogap nell'evoluzione dal superfluido BCS a quello BEC. Il massimo

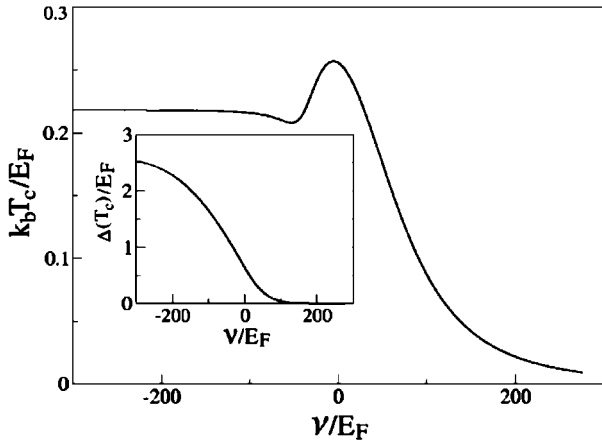


Fig. 11. - Temperatura critica T_c in funzione di ν calcolata per il gas omogeneo nell'ambito della teoria della superfluidità risonante. Nel riquadro è il valore della pseudogap Δ calcolata a T_c . Da ⁽³²⁾.

della temperatura critica sparisce quando questa sia calcolata per il gas nella trappola, e i fenomeni legati alla presenza della pseudogap sono fortemente soppressi ⁽⁴⁷⁾.

Da un punto di vista quantitativo, è necessario che una teoria del *crossover* in presenza della risonanza di Fano-Feshbach riproduca correttamente le interazioni sia nel limite BCS che nel limite BEC. In particolare, mentre nel limite BCS il potenziale di interazione è determinato dalla lunghezza di *scattering* a (fuori risonanza), è stato dimostrato che nell'estremo limite BEC l'interazione fra due molecole di fermioni è parametrizzata da una lunghezza di *scattering* $a_m = 0,6 a$ ⁽⁴⁸⁾. Un'ulteriore condizione che la teoria deve soddisfare è quella in corrispondenza del limite unitario $|a| \rightarrow \infty$ nel quale è atteso un comportamento universale della termodinamica, ovvero indipendente dalla lunghezza di *scattering*, purché $\Delta\nu > E_F$ ⁽⁴⁶⁾. In questa regione, simulazioni Monte Carlo quantistiche a $T = 0$ predicono che il rapporto fra l'energia di interazione e quella cinetica sia $\beta \equiv E_{\text{int}}/E_{\text{cin}} = -0,56$ ⁽⁴⁹⁾.

Il confronto quantitativo fra teorie ed esperimenti inizia ad essere accessibile, e sarà presumibilmente un aspetto importante della ricerca in questo campo nell'immediato futuro. Di quest'ultimo mese sono i risultati sperimentali che danno accesso al diagramma di fase della condensazione di Bose-Einstein di coppie di fermioni, misurando la frazione di condensato in funzione di T e di B nel passaggio attraverso la risonanza di Fano-Feshbach dal regime BEC al regime BCS ⁽³⁷⁻⁴⁰⁾. Negli esperimenti viene mi-

surata o la distribuzione delle velocità a seguito dello spegnimento della trappola ^(37,39,40) o direttamente il profilo di densità *in situ* ⁽³⁸⁾. Nel primo caso, il carattere a lungo raggio delle correlazioni che formano le coppie nella regione BCS fa sì che queste siano difficilmente osservabili nel corso dell'espansione. Per questo motivo, negli esperimenti del JILA e del MIT ^(37,39), il gas che si trova inizialmente nella regione BCS $a < 0$ della risonanza viene rapidamente proiettato nella regione BEC prima di spegnere la trappola e osservare la distribuzione delle velocità.

In fig. 12 sono riportati i diagrammi di fase misurati al JILA e al MIT, dai quali si evidenzia

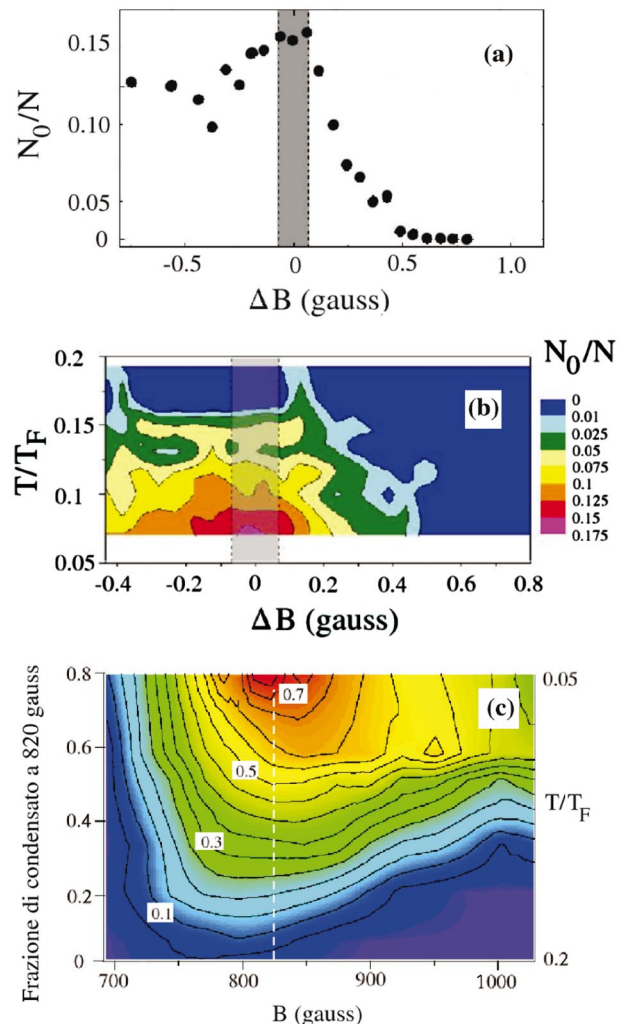


Fig. 12. - Diagramma di fase che mostra la frazione di condensato nel piano T - B per gli esperimenti del JILA ^(37,41) (b) e del MIT ⁽³⁹⁾ (c). In (a) è riportata una sezione del diagramma di fase (b) a temperatura $T = 0,08 T_F$. In (b) l'ascissa riporta il valore $\Delta B = B - B_0$ di campo magnetico relativo a quello di risonanza B_0 , mentre in (c) la posizione di $B_0 \approx 820$ G è indicata dalla linea tratteggiata verticale.

come la frazione di condensato diminuisca nel passaggio dalla regione BEC ($AB < 0, a > 0$) alla regione BCS ($AB > 0, a < 0$) attraverso la risonanza.

7. – Conclusioni e prospettive

Il materiale presentato qui rappresenta solo una selezione all'interno di una letteratura che è divenuta vastissima, ma pur nella sua incompletezza testimonia un campo di ricerca estremamente interessante ed in continua evoluzione.

Molte sono le questioni sperimentali e teoriche che devono essere chiarite, soprattutto da un punto di vista quantitativo. L'osservazione della superfluidità nel regime BCS non è ancora evidente⁽⁵⁰⁾, e il ruolo della dinamica nella formazione delle coppie può essere rilevante. Su questi aspetti, il supporto della teoria diventa di fondamentale importanza. Innanzitutto, è importante la costruzione di soluzioni approssimate alle teorie del *crossover*, che siano in grado di recuperare quantitativamente gli estremi limiti BEC e BCS, il limite unitario⁽⁵¹⁾, e il limite in cui anche la larghezza della risonanza diventa un parametro rilevante. In questo modo la teoria può fornire una definizione adeguata del parametro d'ordine che determina la natura dello stato superfluido e suggerire esperimenti che possano osservarlo senza ambiguità. Il supporto di metodi di simulazione quantistica può essere molto utile al lavoro teorico. In secondo luogo, sarebbe importante formulare una teoria dinamica della formazione delle coppie, che possa verificare se le teorie fondate sull'equilibrio termodinamico sono sufficienti a descrivere gli esperimenti.

La superfluidità, dalla condensazione di Bose-Einstein di bosoni composti alla BCS di coppie di Cooper, non è l'unico motivo di interesse dei vapori di atomi alcalini fermionici ultrafreddi confinati. La possibilità di confinare gli atomi in potenziali periodici realizzati mediante fasci laser contropropaganti, e di poterne accuratamente determinare e controllare la dinamica apre un capitolo a parte della fisica di questi sistemi. Questo include: lo studio della superfluidità con la possibilità di realizzare diagrammi di fase più complessi con stati antiferromagnetici e accoppiamento in onda d ⁽⁵²⁾; la possibilità di realizzare un array di giunzioni Josephson come già fatto per BEC di bosoni⁽⁵³⁾;

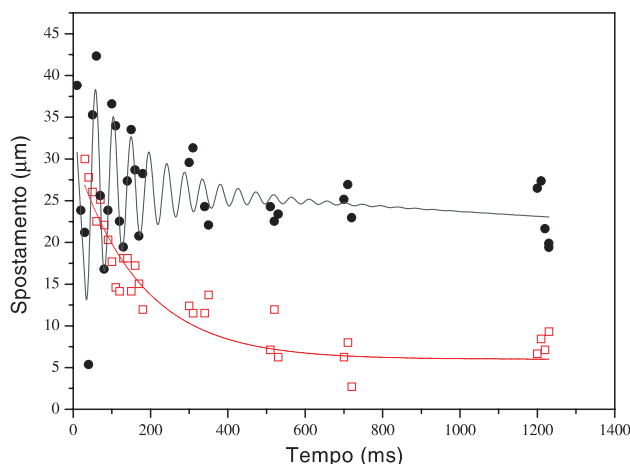


Fig. 13. – I vapori di atomi fermionici ultrafreddi sono interessanti anche per altre applicazioni, in particolare quando vengano confinati in potenziali periodici. Ad esempio, un campione di ^{40}K non interagente puro (cerchi) e in presenza di ^{87}Rb (quadrati) viene messo in moto in un potenziale periodico con elevati valori dell'altezza di barriera, a seguito di un repentino spostamento del centro della trappola armonica sovrainposta al reticolo. A differenza del caso in presenza di ^{87}Rb , gli atomi fermionici compiono oscillazioni smorzate senza mai arrivare al centro della trappola. Questo dimostra che il trasporto di densità di particelle in un potenziale periodico perfetto richiede la presenza di interazioni, che in questo caso sono mediate dalle collisioni fra le due specie. Da⁽⁵⁴⁾.

la possibilità di studiare in condizioni controllate concetti comuni alla fisica dei solidi, quali oscillazioni di Bloch, effetti di scambio e correlazione (si veda ad esempio la fig. 13 e relativa descrizione), transizione di Mott⁽⁵⁵⁾; la realizzazione di interferometri per misure di precisione nell'ambito della fisica fondamentale, in relazione ad esempio ad effetti di tipo Casimir o Casimir-Polder in prossimità di superfici, o a forze gravitazionali su scale micrometriche⁽⁵⁶⁾; la realizzazione di dispositivi per il calcolo quantistico⁽⁵⁷⁾. Certamente questo campo di ricerca riserva ancora molte sorprese.

Bibliografia

- (1) P. C. HOHENBERG e P. C. MARTIN, *Ann. Phys. (NY)*, **34** (1965) 291.
- (2) J. BARDEEN, L. N. COOPER, e J. R. SCHRIEFFER, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175; J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1999).
- (3) Eagles, *Phys. Rev.* **186** (1969) 456.
- (4) A. G. LEGGETT, *J. Phys. (Paris)* **C7** (1980) 19.
- (5) P. NOZIÈRES e S. SCHMITT-RINK, *J. Low Temp. Phys.* **59** (1982) 195.
- (6) Sui primi esperimenti effettuati al JILA da E. A. Cornell e C. E. Wieman *et al.* e al MIT da W. Ketterle *et al.* si veda *Bose-Einstein Condensation in Atomic gases*, a cura di M. INGUSCIO, S. STRINGARI e C. E. WIEMAN (IOS, Am-

- sterdam, 1999); E. A. CORNELL e C. E. WIEMAN, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 875; W. KETTERLE, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 1131.
- (7) Si veda anche l'articolo G. FERRARI, M. INGUSCIO, G. MODUGNO, e G. ROATI, "Realizzazione della condensazione di Bose-Einstein di potassio mediante raffreddamento simpatico con rubidio", *Il Nuovo Saggiatore* **18**, N. 1-2 (2002) 40.
- (8) A. J. LEGGETT, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 331.
- (9) Per una rassegna su teoria ed esperimenti si veda ad esempio *Models and Phenomenology for conventional and high- T_c superconductivity*, a cura di G. IADONISI, R. J. SCHRIEFFER e M. L. CHIOFALO (IOS, Amsterdam, 1998).
- (10) Per una rassegna si veda ad esempio il lavoro di M. Randeria nel volume⁽⁹⁾; F. PISTOLESI e G. C. STRINATI, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 15168; Q. CHEN, I. KOSZTIN, B. JANKO, e K. LEVIN, *Phys. Rev. B* **59** (1999) 7083; P. PIERI e G. C. STRINATI, *Phys. Rev. B* **61** (2000) 15370.
- (11) J. RANNINGER e S. ROBASKIEWICZ, *Physica B* **53** (1985) 468; R. FRIEDBERG e T. D. LEE, *Phys. Rev. B* **40** (1989) 6745. Per una rassegna, si veda il lavoro di J. Ranninger e J. M. Robin nel volume⁽⁹⁾.
- (12) Sui primi esperimenti si vedano ad esempio i contributi di J. P. MYSYROWICZ e di J. P. WOLFE in: *Bose-Einstein condensation*, a cura di A. GRIFFIN, D.W. SNOKE e S. STRINGARI (Cambridge Un. Press, Cambridge, 1995). Fra gli esperimenti più recenti: L. V. BUTOV, C. W. LAI, A. L. IVANOV, A. C. GOSSARD, and D. S. CHEMLA, *Nature* **418** (2002) 751.
- (13) Una lettura consigliata è ad esempio: *Perspectives on Quantum Hall Effects*, a cura di S. DAS SARMA e A. PINCZUK (Wiley, New York, 1997).
- (14) B. DEMARCO e D. S. JIN, *Science* **285** (1999) 1703.
- (15) G. TRUSCOTT, K. E. STRECKER, W. I. MCALEXANDER, G. B. PARTRIDGE, e R. G. HULET, *Science* **291** (2001) 2570.
- (16) F. SCHRECK, L. KHAYKOVICH, K. L. CORWIN, G. FERRARI, T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, e C. SALOMON, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 080403.
- (17) G. MODUGNO, G. FERRARI, G. ROATI, R. J. BRECHA, A. SIMONI, e M. INGUSCIO, *Science* **294** (2001) 1320; G. ROATI, F. RIBOLI, G. MODUGNO, e M. INGUSCIO, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 150403.
- (18) Z. HADZIBABIC, C. A. STAN, K. DIECKMANN, S. GUPTA, M. W. ZWIERLEIN, A. GORLITZ, e W. KETTERLE, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 160401.
- (19) K. M. O'HARA, S. L. HEMMER, M. E. GEHM, S. R. GRANADE, and J. E. THOMAS, *Science* **298** (2002) 2179.
- (20) T. LOFTUS, C. A. REGAL, C. TICKNOR, J. L. BOHN, and D. S. JIN, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 173201.
- (21) T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, L. KHAYKOVICH, K. M. MAGALHÃES, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, G. V. SHLYAPNIKOV, e C. SALOMON, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 020402.
- (22) H. FESHBACH, *Ann. Phys.* **5** (1958) 357 e **19** (1962) 287; U. FANO, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1866.
- (23) J. L. ROBERTS, N. R. CLAUSSEN, S. L. CORNISH, E. A. DONLEY, E. A. CORNELL, e C. E. WIEMAN, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 4211.
- (24) C. A. REGAL, C. TICKNOR, J. L. BOHN, and D. S. JIN, *Nature* **424** (2003) 47.
- (25) S. GUPTA, Z. HADZIBABIC, M. W. ZWIERLEIN, C. A. STAN, K. DIECKMANN, C. H. SCHUNCK, E. G. M. VAN KEMPEN, B. J. VERHAAR, e W. KETTERLE, *Science* **300** (2003) 1723.
- (26) K. E. STRECKER, G. B. PARTRIDGE, e R. G. HULET, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 080406.
- (27) J. CUBIZOLLES, T. BOURDEL, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, G. V. SHLYAPNIKOV, e C. SALOMON, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 240401.
- (28) S. JOCHIM, M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, G. HENDL, C. CHIN, J. HECKER DENSCHLAG, e R. GRIMM, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 240402.
- (29) M. HOLLAND, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, M. L. CHIOFALO, e R. WALSER, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 120406.
- (30) E. TIMMERMANS, K. FURUYA, P. W. MILONNI, A. K. KERMAN, *Phys. Rev. Lett.* **A 285** (2001) 228.
- (31) Y. OHASHI e A. GRIFFIN, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 130402; J. N. MILSTEIN, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, e M. J. HOLLAND, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 043604.
- (32) JELENA STAJIC, J. N. MILSTEIN, QJIN CHEN, M. L. CHIOFALO, M. J. HOLLAND, e K. LEVIN, cond-mat/0309329.
- (33) A. PERALI, P. PIERI, L. PISANI, e G. C. STRINATI, cond-mat/0311309.
- (34) H. T. C. STOOF, M. HOUBIERS, C. A. SACKETT, e R. G. HULET, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 10; R. COMBESCOT, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3766; G. BRUUN *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **7** (1999) 433-439; H. HEISELBERG, C. J. PETHICK, H. SMITH, e L. VIVERIT, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 2418.
- (35) M. GREINER, C. A. REGAL, e D. S. JIN, *Nature* **426** (2003) 537.
- (36) M. W. ZWIERLEIN, C. A. STAN, C. H. SCHUNCK, S. M. F. RAUPACH, S. GUPTA, Z. HADZIBABIC, e W. KETTERLE, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 250401.
- (37) C. A. REGAL, M. GREINER, e D. S. JIN, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 040403.
- (38) M. BARTESTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, C. CHIN, J. HECKER DENSCHLAG, e R. GRIMM, cond-mat/0401109.
- (39) M. W. ZWIERLEIN, C. A. STAN, C. H. SCHUNCK, S. M. F. RAUPACH, A. J. KERMAN, e W. KETTERLE, cond-mat/0403049.
- (40) T. BOURDEL, L. KHAYKOVICH, J. CUBIZOLLES, J. ZHANG, F. CHEVY, M. TEICHMANN, L. TARRUELL, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, e C. SALOMON, cond-mat/0403091.
- (41) A questi temi è stato dedicato un convegno di grande rilevanza, *Ultracold Fermi Gases* (Levico, Trento, Marzo 2004) organizzato da R. COMBESCOT, C. SALOMON e S. STRINGARI. Si veda il sito <http://bec.science.unitn.it/fermi04/>.
- (42) C. J. MYATT, E. A. BURT, R. W. GHRIST, E. A. CORNELL e C. A. WIEMAN, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1997) 586.
- (43) M. HOLLAND, D. JIN, M. L. CHIOFALO e J. COOPER, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 3801.
- (44) M. L. CHIOFALO, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, J. N. MILSTEIN, e M. HOLLAND, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 90402; S. J. J. M. F. KOKKELMANS, J. N. MILSTEIN, M. L. CHIOFALO, R. WALSER e M. J. HOLLAND, *Phys. Rev. A* **65** (2002) 053617.
- (45) I valori di U_{bg} , v e g in (1) sono determinati da quelli misurati o calcolati a seguito di una opportuna rinormalizzazione. Il fatto che questi vengano approssimati indipendenti da k deve introdurre un vettore d'onda massimo K che renda finite le integrazioni in k .
- (46) G. M. BRUUN e C. J. PETHICK, in corso di stampa su *Phys. Rev. Lett.*, cond-mat/0304535; S. De Palo, M. L. CHIOFALO, M. J. HOLLAND e S. J. J. M. F. KOKKELMANS, preprint.
- (47) P. PIERI e G. C. STRINATI, cond-mat/0307421.
- (48) D. S. PETROV, C. SALOMON, G. V. SHLYAPNIKOV, cond-mat/0309010.
- (49) H. HEISELBERG, *Phys. Rev. A* **63** (2001) 043606; T. L. HO, cond-mat/0309109; J. CARLSON, S.-Y. CHANG, V. R. PANDHARIPANDE, e K. E. SCHMIDT, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 50401.
- (50) P. TÖRMA e P. ZOLLER, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 487; M. A. BARANOV e D. S. PETROV, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 041601(R); A. MINGUZZI e M. P. TOSI, *Phys. Rev. A* **63** (2001) 023609; C. MENOTTI, P. PEDRI e S. STRINGARI, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 250402.
- (51) M. J. HOLLAND, C. MENOTTI e L. VIVERIT, cond-mat/0404234
- (52) W. HOFSTETTER, J. I. CIRAC, P. ZOLLER, E. DEMLER, e M. D. LUKIN, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 220407.
- (53) B. P. ANDERSON e M. A. KASEVICH, *Science* **281** 1686 (1998); F. S. CATALIOTTI, *Science* **293** (2001) 843.
- (54) H. OTT, E. de MIRANDES, F. FERLAINO, G. ROATI, G. MODUGNO e M. INGUSCIO, cond-mat/0311261, in corso di stampa su *Phys. Rev. Lett.*
- (55) La transizione da superfluido a isolante di Mott è stata realizzata con BEC. Si veda: M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH e I. BLOCH, *Nature* **415** (2002) 39.
- (56) A. WIDERA, O. MANDEL, M. GREINER, S. KREIM, T. W. HÄNSCH, I. BLOCH cond-mat/0310719; G. ROATI, E. de MIRANDES, F. FERLAINO, H. OTT, G. Modugno, e M. INGUSCIO, cond-mat/0402328.
- (57) O. MANDEL, M. GREINER, A. WIDERA, T. ROM, T. W. HÄNSCH, e I. BLOCH, *Nature* **425** (2003) 937; D. JAKSCH, H. J. BRIEGEL, J. I. CIRAC, C. W. GARDINER, e P. ZOLLER, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 1975.