Meccanica e Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
Esercitazioni del corso. Periodo II
Prof. Leonardo BERTINI
Ing. Ciro SANTUS

Esercitazione 01:

Calcolo degli spostamenti mediante il teorema del Castigliano

---

Indice

1 Flessione fra tre punti

In Fig.1 è mostrato lo schema di una trave in flessione su tre punti, carico in mezzeria e supporti verticali alle estremità.

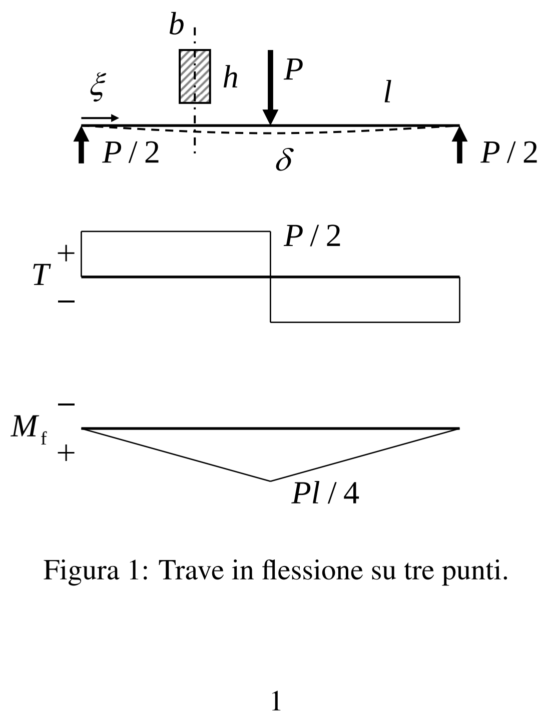


Figura 1: Trave in flessione su tre punti.

Considerando il contributo della sola flessione e applicando il teorema del Castigliano, si può calcolare lo spostamento del punto di mezzeria:

$$
\begin{aligned}
\delta_M &= \frac{\partial}{\partial P} U_M = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{M_\mathrm{f}^2}{2EI} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\partial}{\partial P} 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2EI} P\frac{\xi}{2} P\frac{\xi}{2} \mathrm{d}\xi = \frac{\partial}{\partial P} \frac{P^2}{4EI} \left[\frac{\xi^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Considerando il contributo della flessione e anche quello del taglio (per la sezione rettangole il fattore di taglio è: $\chi = 6/5$):

$$
\delta = \delta_M + \delta_T \tag{2}
$$

$$
\delta_T = \frac{\partial}{\partial P} U_T = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \chi \frac{T^2}{2GA} \mathrm{d}\xi = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{6}{5} \frac{(P/2)^2}{2GA} \mathrm{d}\xi = \frac{3}{10} \frac{Pl}{GA} \tag{3}
$$

A questo punto è interessante valutare quantitativamente il peso dei due contributi.
Considerando una trave "snella": $l = 1\,000$ mm, $b = 12$ mm, $h = 20$ mm, sollecitata con un carico $P = 100$ N (materiale acciaio, costanti elastiche: $E = 205\,000$ MPa, $\nu = 0.3$, $G = 78\,800$ MPa[1]), si ottiene: $\delta_M = 1.270$ mm e $\delta_T = 0.002$ mm. Il contributo del taglio è minore dell'1%.
Considerando, invece, una trave "tozza": $l = 80$ mm, $b = 12$ mm, $h = 20$ mm (stesso materiale e stesso carico) si ottiene: $\delta_M = 0.00065$ mm e $\delta_T = 0.00013$ mm. In questo caso i due contributi sono dello stesso ordine di grandezza, tuttavia la freccia totale è molto piccola.

Da notare che nello svolgimento dell'esempio precedente è stata determinata l'energia elastica e successivamente è stata eseguita l'operazione di derivazione. Tuttavia si può osservare che vale il teorema:

$$
\frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{M_\mathrm{f}^2}{2EI} = \int_0^l \frac{M_\mathrm{f} \dfrac{\partial M_\mathrm{f}}{\partial P}}{EI} \tag{4}
$$

Ritrovare la soluzione δ_M relativa al caso precedente, sfruttando il teorema di derivazione introdotto. Notare come l'onere di calcolo sia minore.

[1] Il modulo tangenziale G è legato al modulo di Young E e al modulo di Poisson ν attraverso la relazione: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

2 Flessione generata da più carichi

In Fig.2 è mostrato lo schema di un telaio caricato da due forze, che entrambe produco un contributo sullo spostamento orizzontale δ_1 del punto C.

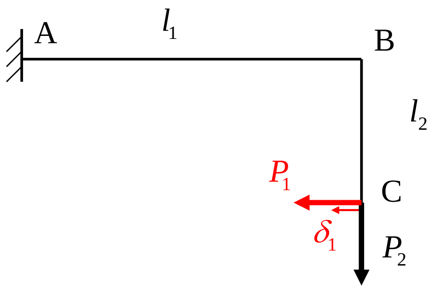


Figura 2: Telaio sollecitato da due carichi, o forze attive.

Determinare lo spostamento δ_1, considerando soltanto i termini flessionali.

Soluzione:

$$\delta_1 = \frac{1}{EI}\left[l_1 l_2\left(P_1 l_2 + \frac{1}{2}P_2 l_1\right) + \frac{1}{3}P_1 l_2^3\right] \tag{5}$$

Trovare lo spostamento δ_1 dello stesso telaio di Fig.2, nel caso in cui non ci sia la forza P_1

Soluzione:
Sostituire $P_1 = 0$ nell'equazione del risultato precedente:

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\frac{P_2 l_1^2 l_2}{EI} \tag{6}$$

3 Utilizzo del carico fittizio

La possibilità di introdurre un carico e successivamente imporre tale carico nullo, al fine di trovare una componente di spostamento in un punto, suggerisce la tecnica del carico fittizio.

Determinare lo spostamento di rotazione φ_B, per effetto del carico P_1, nello schema di telaio di Fig.3

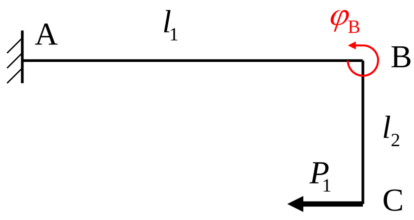


Figura 3: Utilizzo del carico fittizio.

Suggerimento:
Determinare il momento flettente sui vari tratti, introducendo un momento fittizio M_B (con direzione e verso secondo φ_B), eseguire la derivata rispetto a M_B, eseguire l'integrale sulla struttura ed infine imporre $M_B = 0$. È anche possibile imporre $M_B = 0$ prima di eseguire l'integrale, ottenendo calcoli più veloci.

Soluzione:

$$\varphi_B = -\frac{P_1 l_1 l_2}{EI} \tag{7}$$

Determinare la componente, secondo la direzione indicata, dello spostamento del punto C, dove è applicata la forza P_1, Fig.4

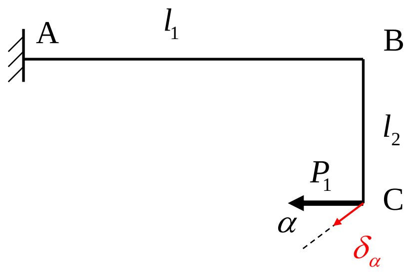
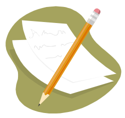


Figura 4: Componente di spostamento non allineata con il carico applicato.

Suggerimento:
Trovare il *vettore* spostamento ed infine la componente secondo la direzione indicata.



Soluzione:

$$\delta_\alpha = \frac{P_1 l_2^2}{EI}\left(l_1 + \frac{1}{3} l_2\right)\cos(\alpha) + \frac{P_1 l_1^2 l_2}{EI}\sin(\alpha) \tag{8}$$