



**Corso di
Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale (MCAS)
CLM Ing. Veicoli/Meccanica**

Parte III

Principi di modellazione



Simmetrie geometriche

Possibili proprietà di simmetria delle strutture

- Simmetria assiale
 - assialsimmetria (Plane182, 183 KOpt(3)=1)
 - assialsimmetria armonica (Plane25, 83)
- Simmetria ciclica
- Simmetria rispetto ad un piano
 - **simmetria**
 - **antisimmetria**

Simmetrie geometriche

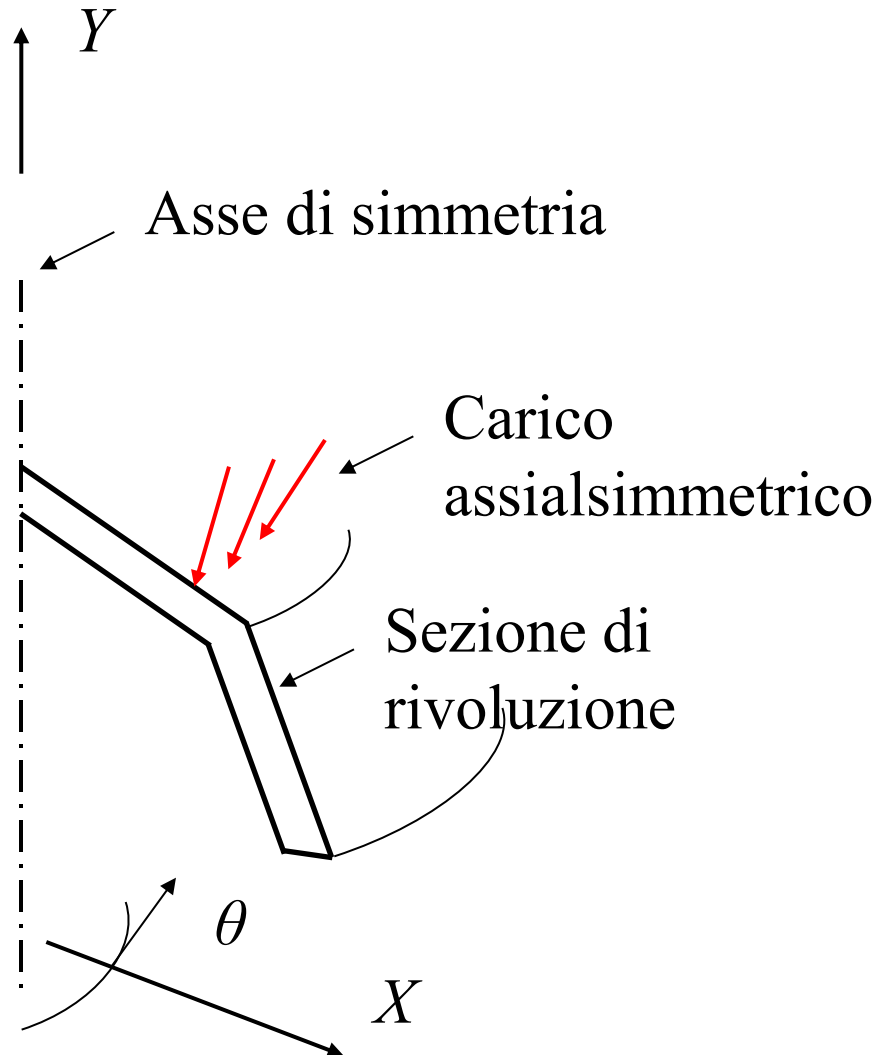
Assialsimmetria (già analizzata)

Condizioni per Assialsimmetria:

- geom. assialsimmetrica
(sez. di rivoluzione)
- vincolo assialsimmetrico
- carico assialsimmetrico
(costante con θ)
- carico nel piano di sez., *oppure*
attivazione della KOpt di tors.
($KOpt(3)=6$)

Condizioni per Assialsimmetria armonica:

- simmetria assiale geometrica
- carico/vincolo generico,
scomponibile in serie di Fourier
ed anche componenti fuori piano
→ Elementi armonici



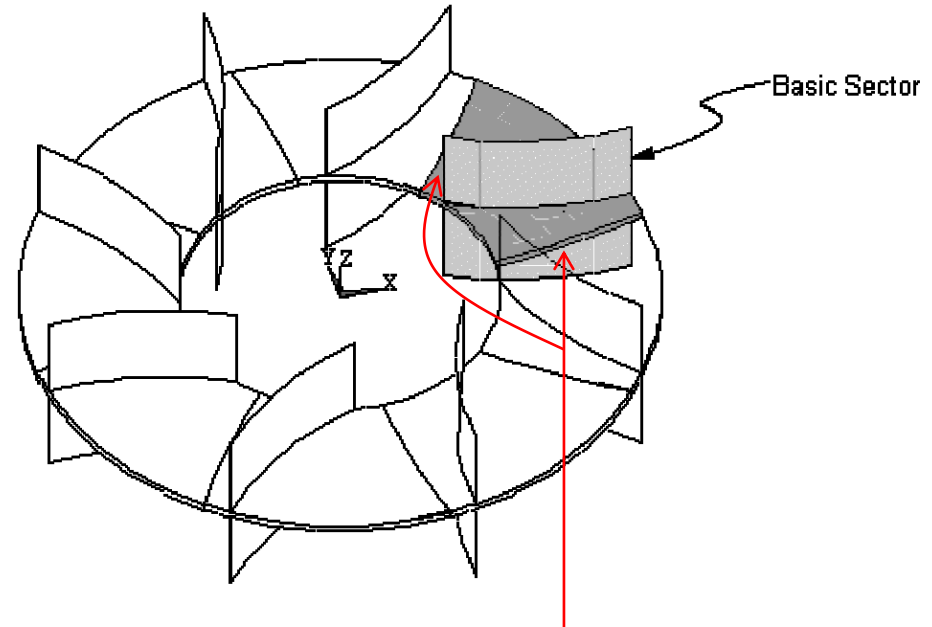
Simmetrie geometriche

Simmetria ciclica

Condizione di simmetria ciclica:

- Presenza di un settore che ripetuto n volte genera la geometria
- Condizioni di carico **generiche** purché cicliche

Figure 6.2. A Basic Sector in a Cyclically Symmetric Structure

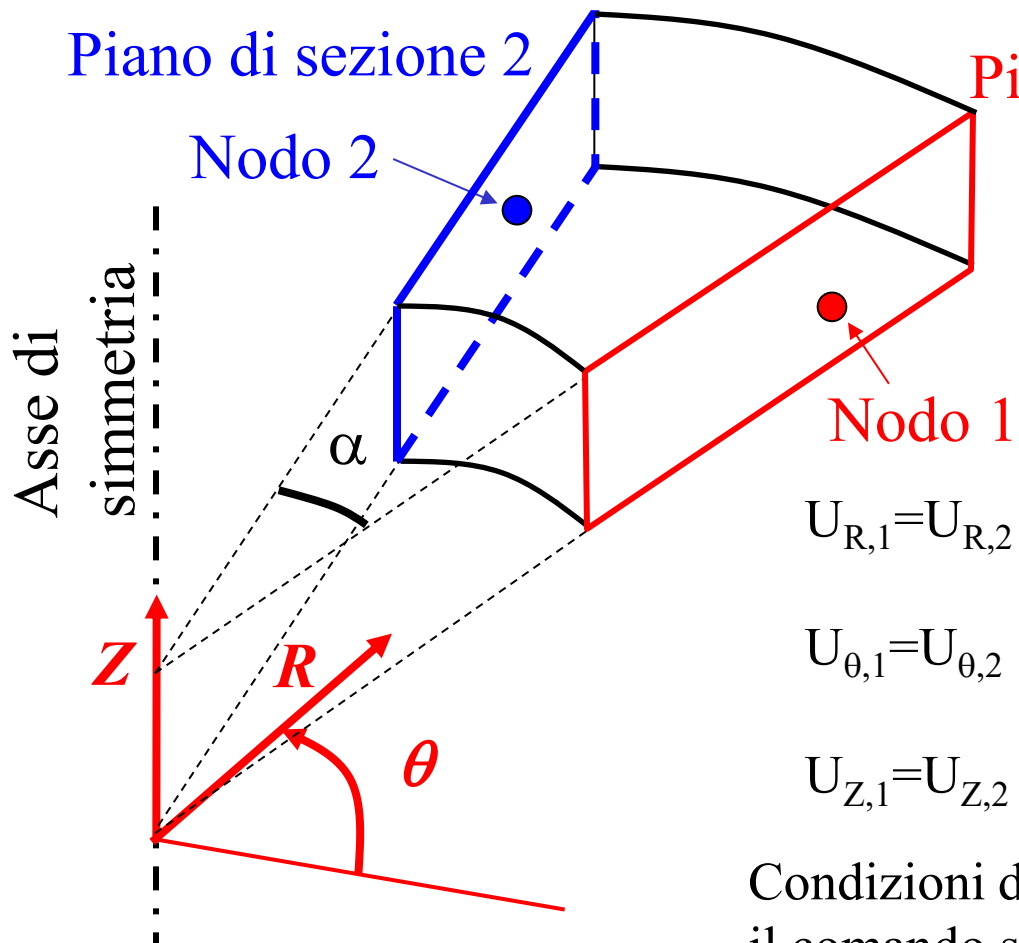


Superfici di interfaccia ciclica, qualunque forma (anche non planare), tuttavia necessariamente stessa forma fra le due e ruotate intorno all'asse di assialsimm. di angolo $360/n$

Simmetrie geometriche

Simmetria ciclica

Sui due piani di sezione è necessario individuare coppie di nodi corrispondenti (la mesh sulle due facce deve essere necessariamente la stessa)



Nodi 1 e 2 sono corrispondenti (si sovrappongono in seguito ad una rotazione α attorno all'asse di simmetria)

$$U_{R,1} = U_{R,2}$$

$$ROT_{R,1} = ROT_{R,2}$$

$$U_{\theta,1} = U_{\theta,2}$$

$$ROT_{\theta,1} = ROT_{\theta,2}$$

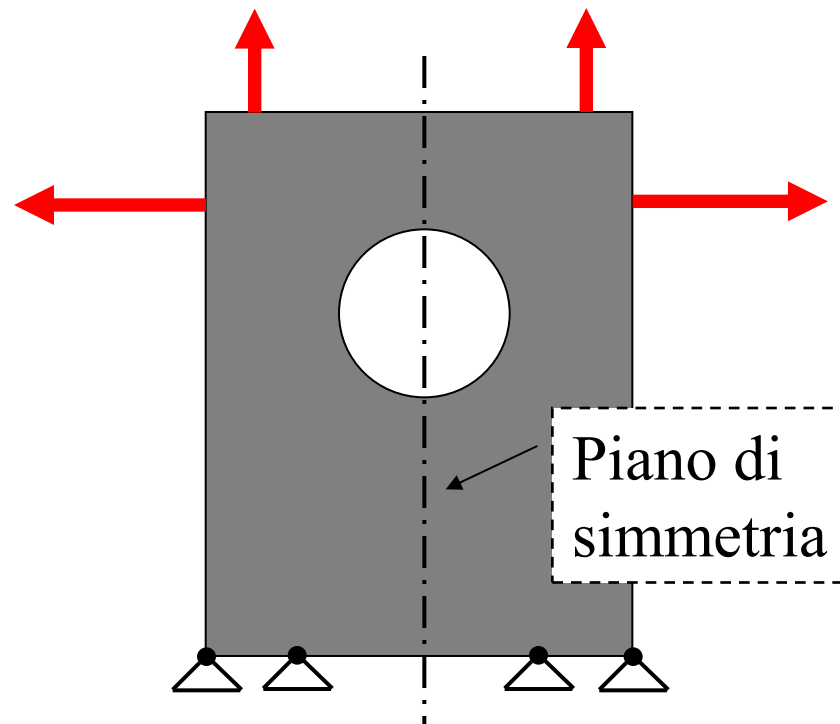
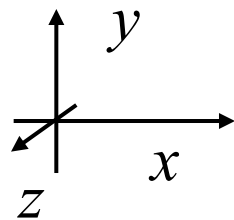
$$U_{Z,1} = U_{Z,2}$$

$$ROT_{Z,1} = ROT_{Z,2}$$

Condizioni da imporre con CE o CP oppure il comando specifico CYCLIC

Simmetrie geometriche

Simmetria rispetto ad un piano



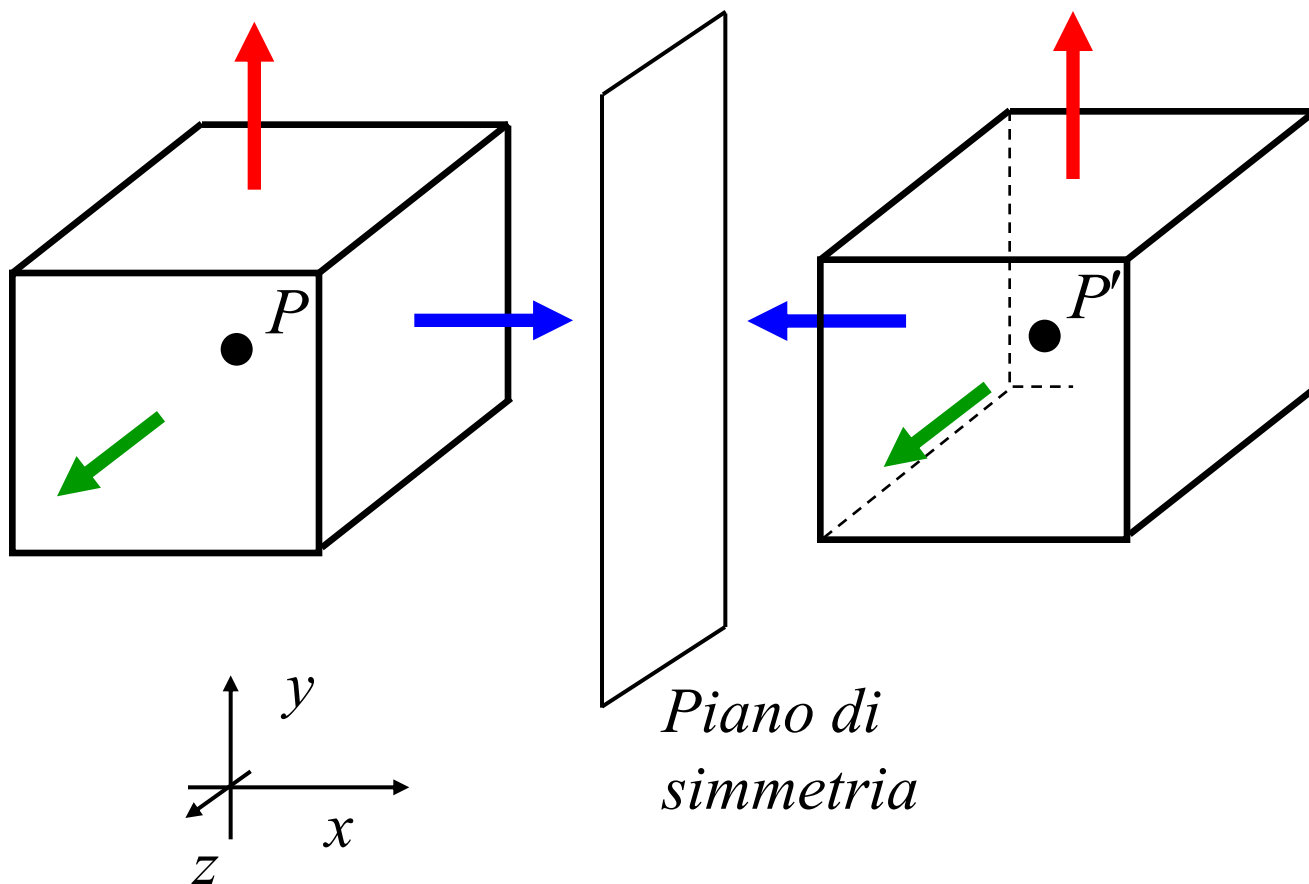
- Geometria, materiali e vincoli simmetrici rispetto al piano

- Carico **speculare** (simmetrico) rispetto al piano di simmetria

Simmetrie geometriche

Simmetria rispetto ad un piano

Relazioni di simmetria delle **tensioni normali**



$$\sigma_x(P) = \sigma_x(P')$$

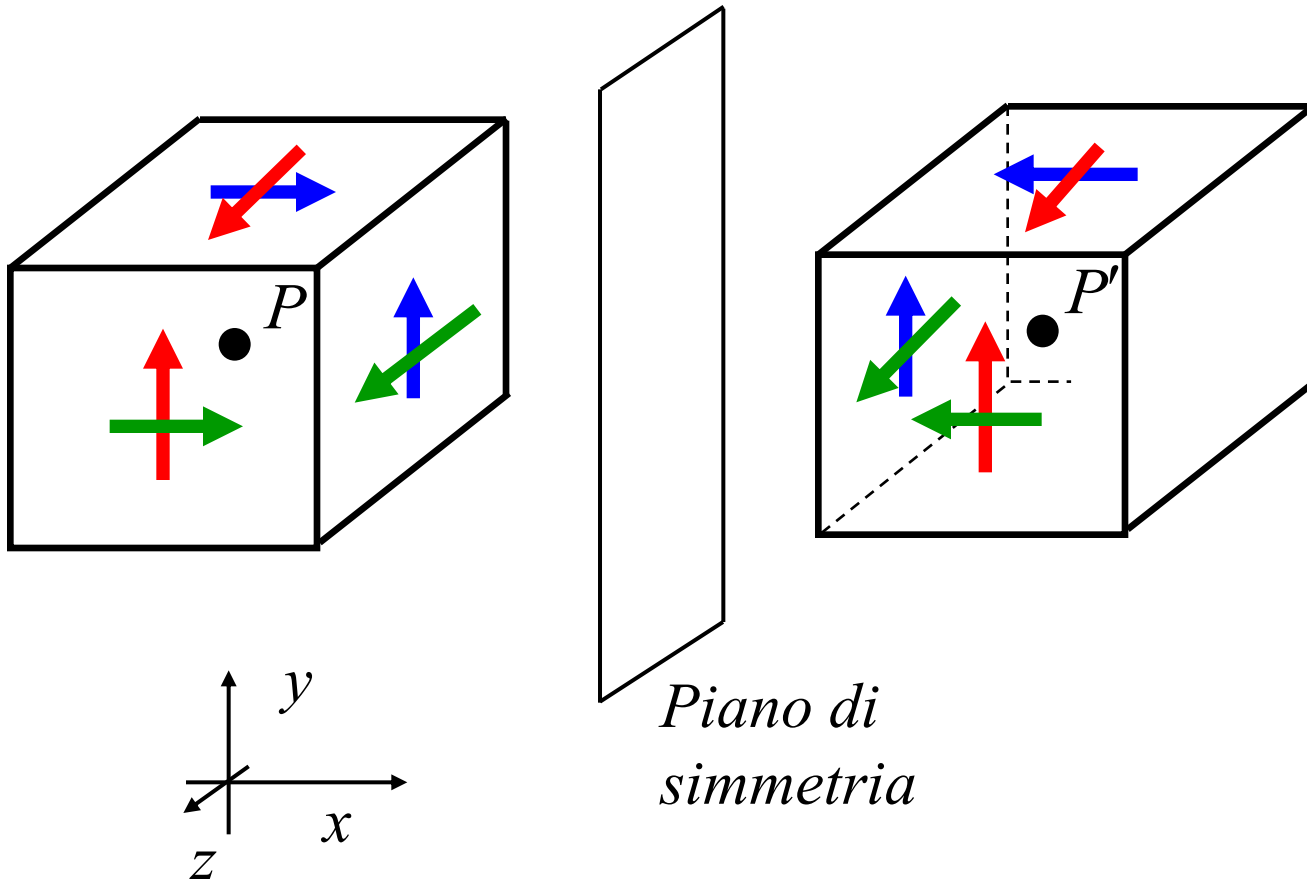
$$\sigma_y(P) = \sigma_y(P')$$

$$\sigma_z(P) = \sigma_z(P')$$

Simmetrie geometriche

Simmetria rispetto ad un piano

Relazioni di simmetria delle tensioni tangenziali



$$\tau_{xy}(P) = -\tau_{xy}(P')$$

$$\tau_{yz}(P) = \tau_{yz}(P')$$

$$\tau_{xz}(P) = -\tau_{xz}(P')$$

$$\Rightarrow$$

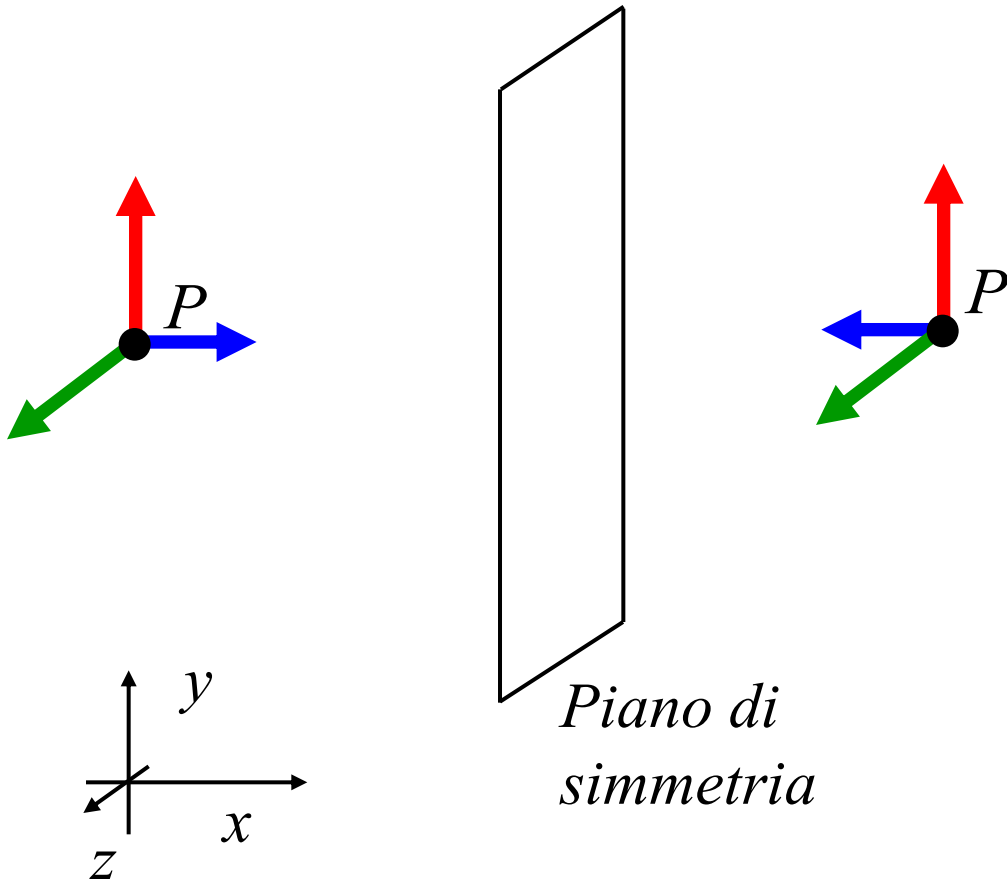
$$\tau_{xy}(\text{sul piano}) = 0$$

$$\tau_{xz}(\text{sul piano}) = 0$$

Simmetrie geometriche

Simmetria rispetto ad un piano

Relazioni di simmetria degli spostamenti



$$U_x(P) = -U_x(P')$$

$$U_y(P) = U_y(P')$$

$$U_z(P) = U_z(P')$$

$$\Rightarrow$$

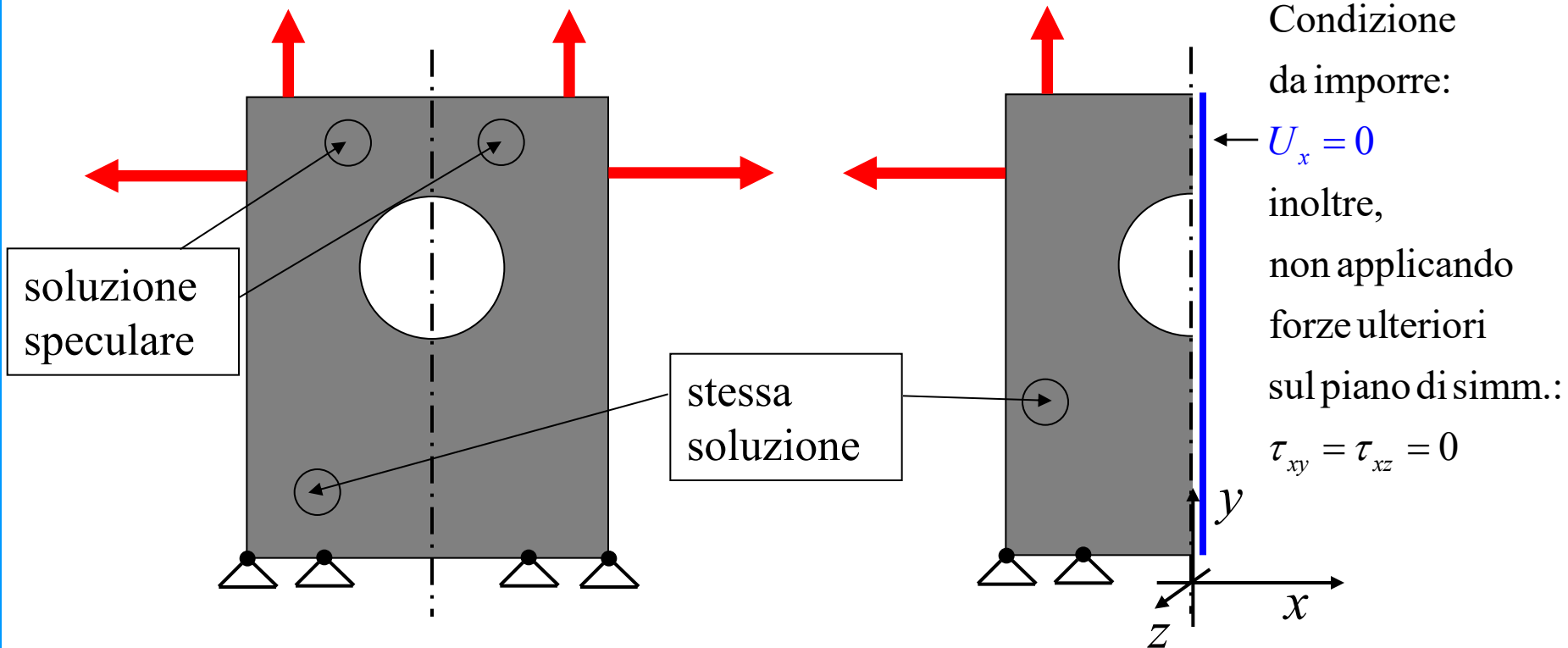
$$U_x(\text{sul piano}) = 0$$

Simmetrie geometriche

Simmetria rispetto ad un piano

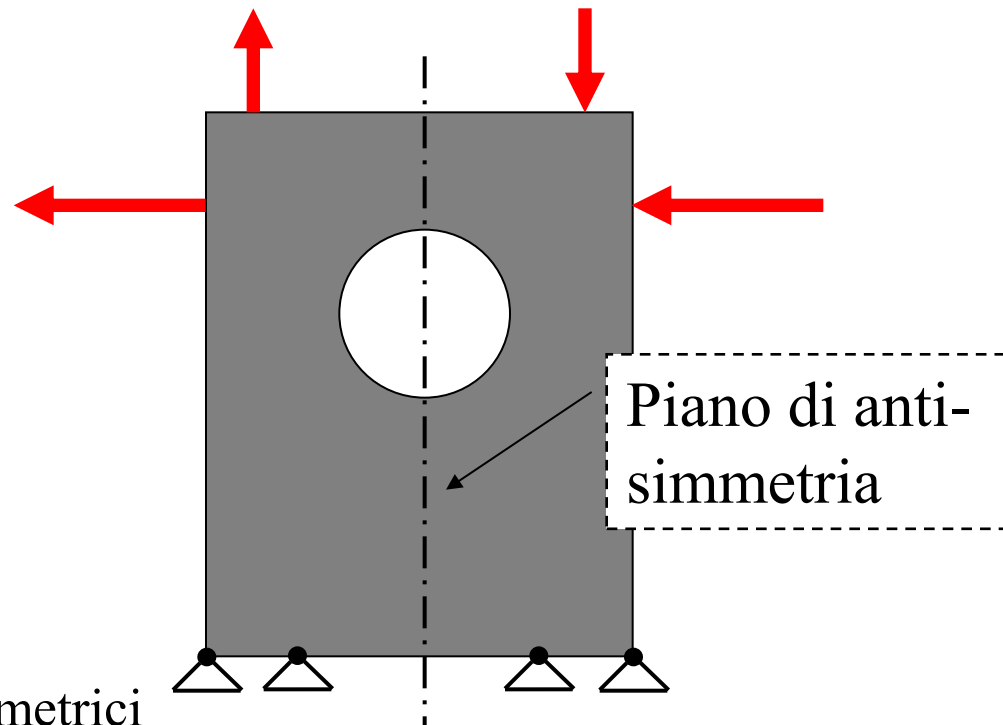
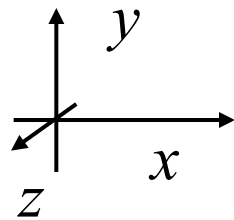
Modellazione equivalente:

metà volume modellato e opportuni vincoli sul piano di simmetria



Simmetrie geometriche

Antisimmetria rispetto ad un piano



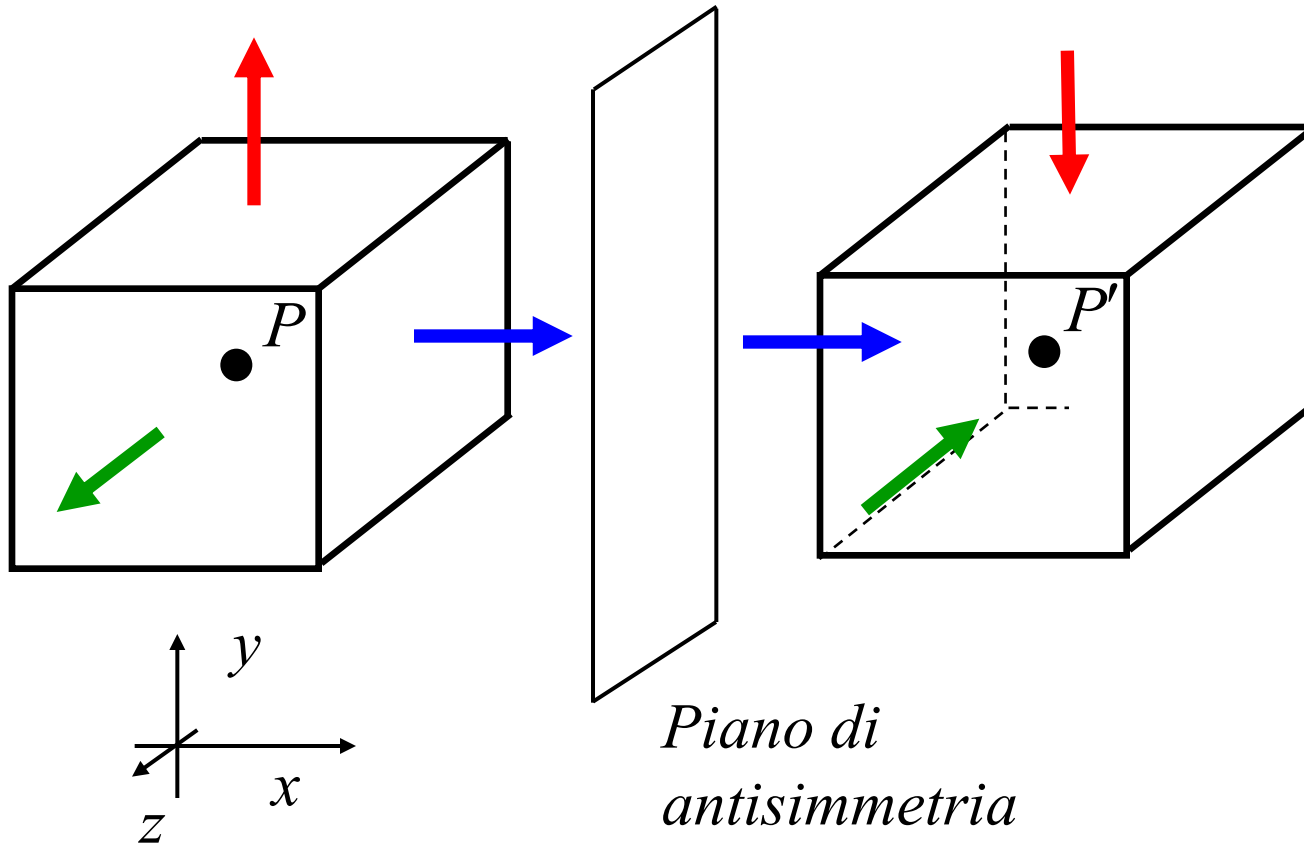
- Geometria, materiali e vincoli simmetrici rispetto al piano

- Carico **speculare + inversione di segno** (antisimmetrico) rispetto al piano di simmetria

Simmetrie geometriche

Antisimmetria rispetto ad un piano

Relazioni di simmetria delle **tensioni normali**



$$\sigma_x(P) = -\sigma_x(P')$$

$$\sigma_y(P) = -\sigma_y(P')$$

$$\sigma_z(P) = -\sigma_z(P')$$

\Rightarrow

$$\sigma_x(\text{sul piano}) = 0$$

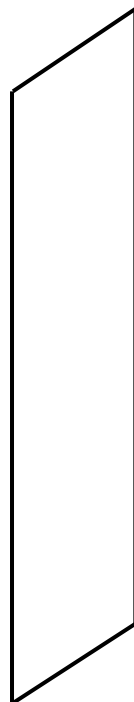
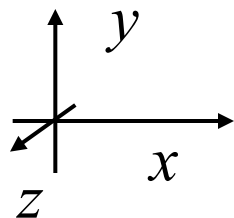
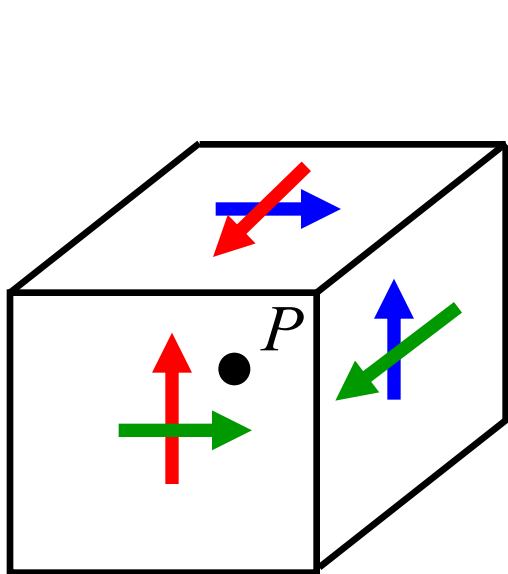
$$\sigma_y(\text{sul piano}) = 0$$

$$\sigma_z(\text{sul piano}) = 0$$

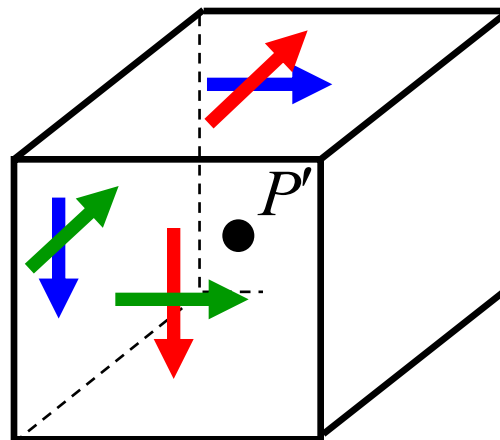
Simmetrie geometriche

Antisimmetria rispetto ad un piano

Relazioni di simmetria delle **tensioni tangenziali**



*Piano di
antisimmetria*



$$\tau_{xy}(P) = \tau_{xy}(P')$$

$$\tau_{yz}(P) = -\tau_{yz}(P')$$

$$\tau_{xz}(P) = \tau_{xz}(P')$$

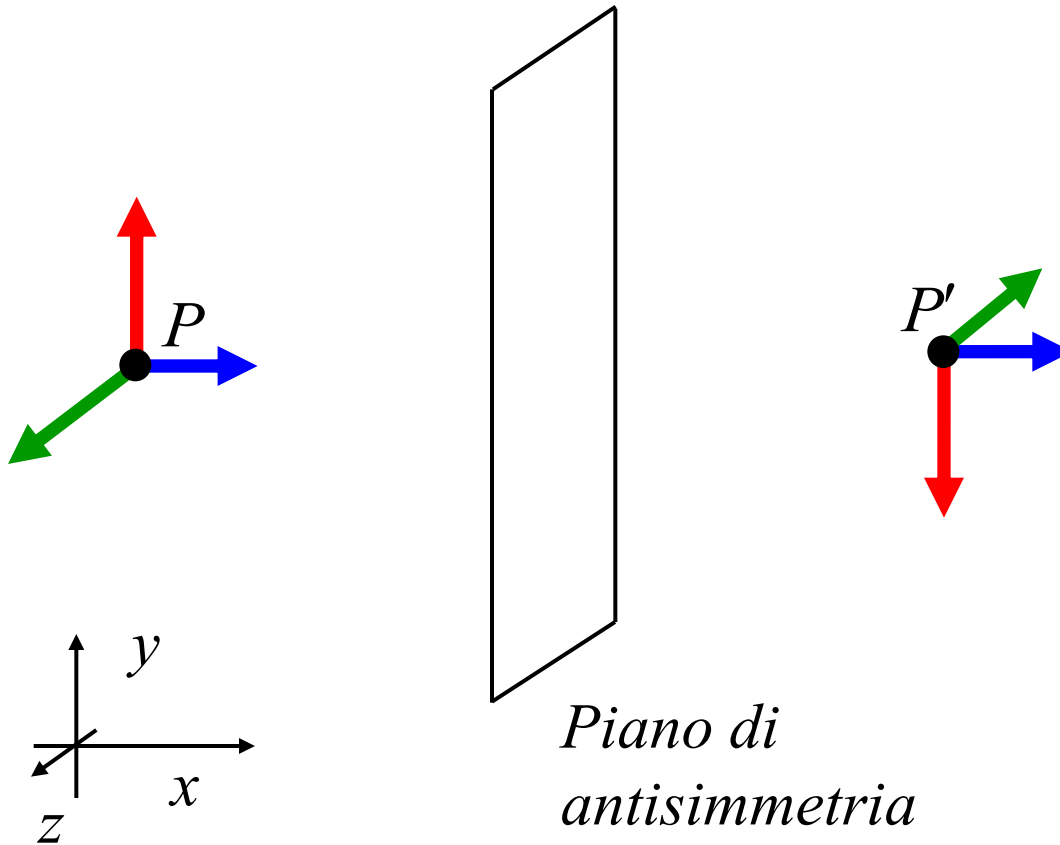
\Rightarrow

$$\tau_{yz}(\text{sul piano}) = 0$$

Simmetrie geometriche

Antisimmetria rispetto ad un piano

Relazioni di simmetria degli **spostamenti**



$$U_x(P) = U_x(P')$$

$$U_y(P) = -U_y(P')$$

$$U_z(P) = -U_z(P')$$

\Rightarrow

$$U_y(\text{sul piano}) = 0$$

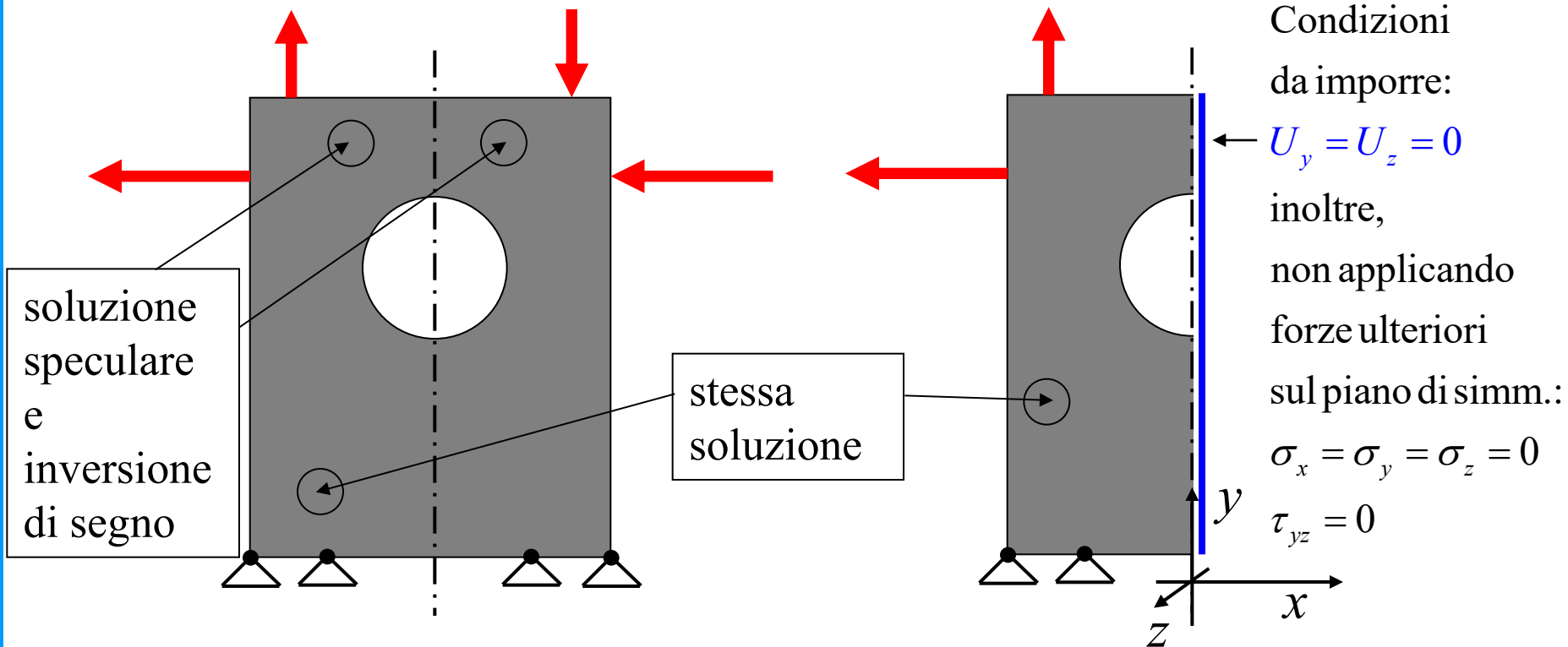
$$U_z(\text{sul piano}) = 0$$

Simmetrie geometriche

Antisimmetria rispetto ad un piano

Modellazione equivalente:

metà volume modellato e opportuni vincoli sul piano di simmetria



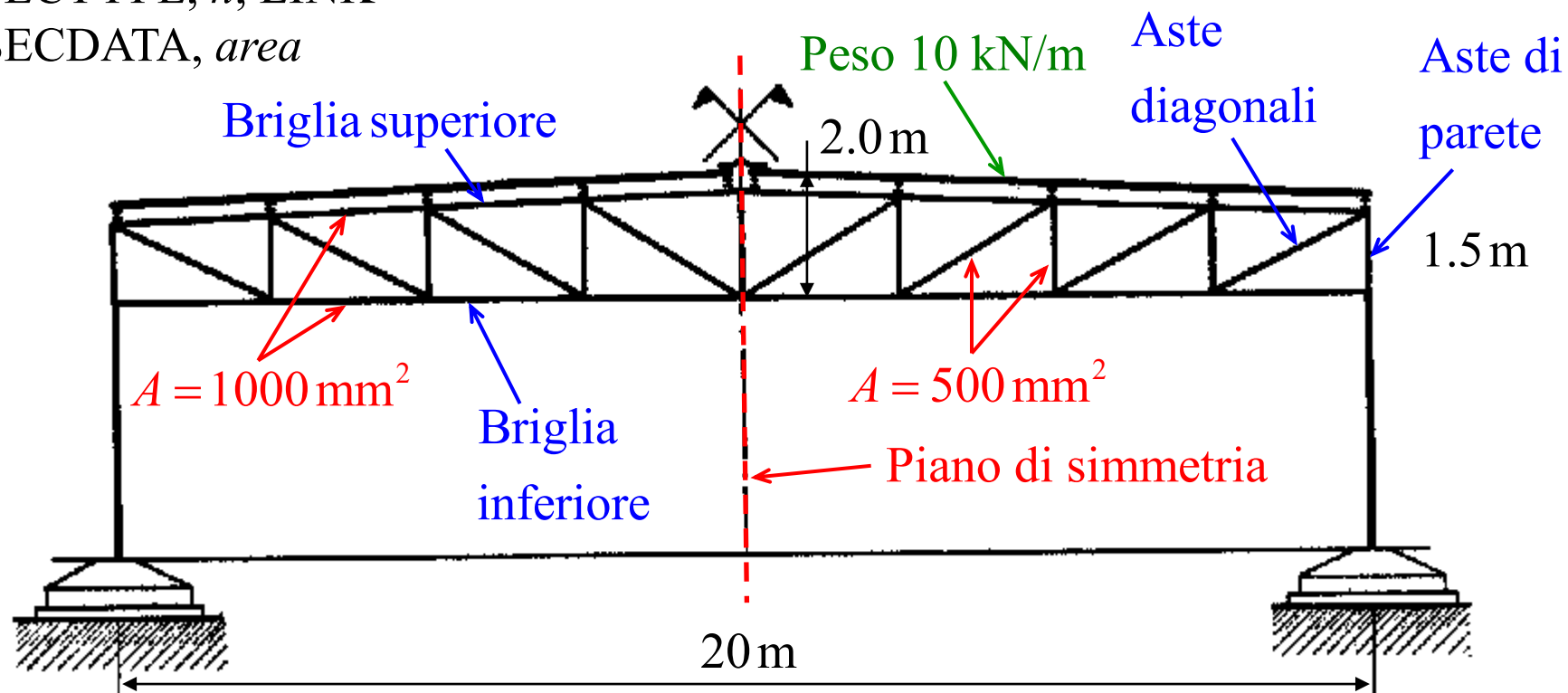
Simmetrie geometriche

Esempio: Travatura reticolare con elementi Link180 e proprietà di simmetria

Attribuzione dell'area con *Real Const.*, oppure con:

SECTYPE, *n*, LINK

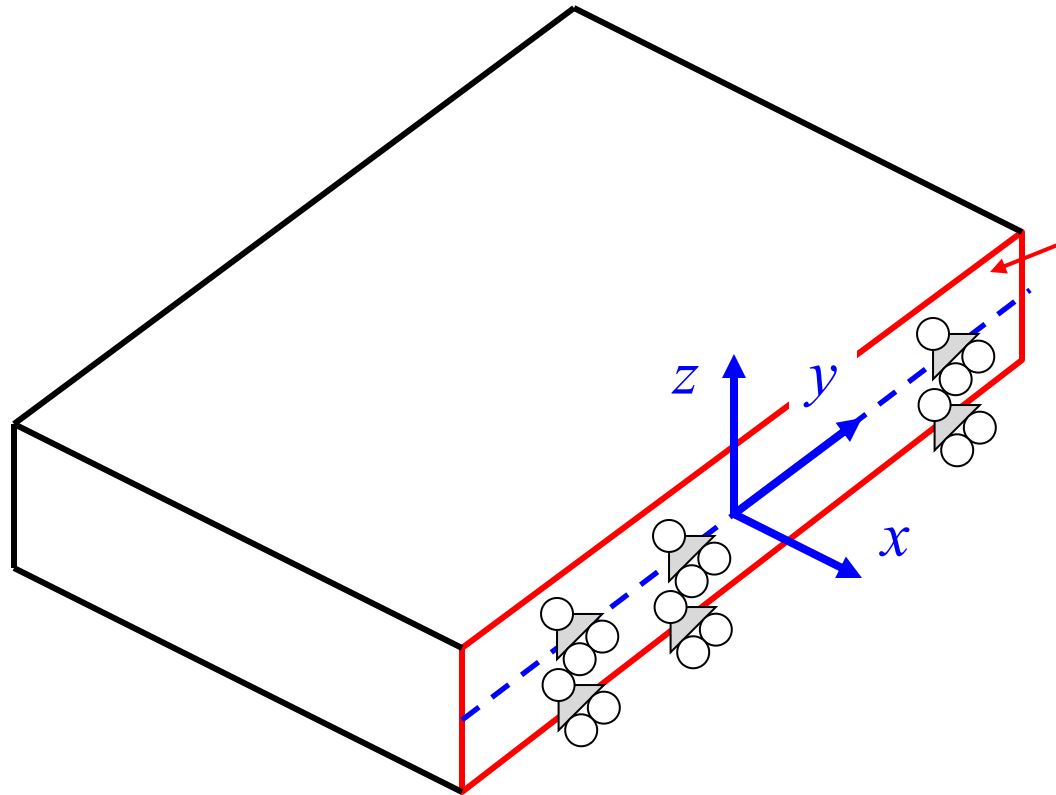
SECDATA, *area*



File di comandi (No simm.): *StrutturaReticolarePiana_Link180.txt*

Simmetrie geometriche

Strutture con g.d.l. di rotazione (elementi Beam e Shell)



Piano di Simmetria

VINCOLI SUI NODI

Carichi simmetrici:

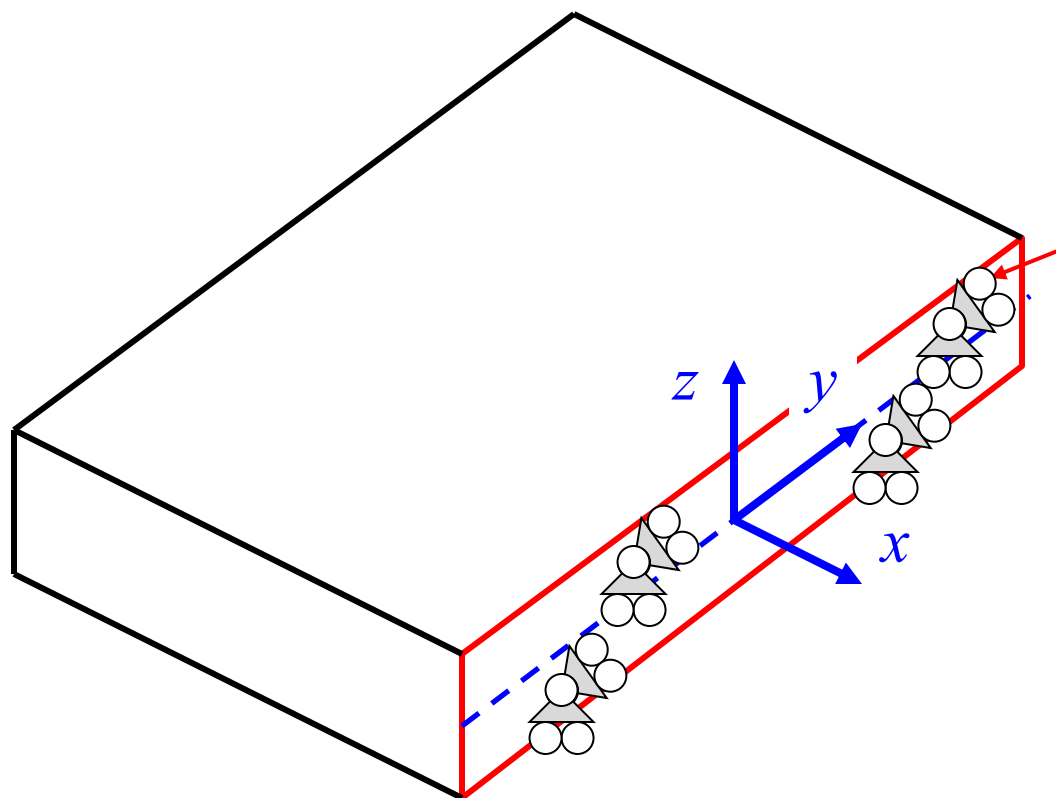
$$U_x = 0 \rightarrow$$

$$ROT_y = 0$$

$$ROT_z = 0$$

Simmetrie geometriche

Strutture con g.d.l. di rotazione (elementi Beam e Shell)



Piano di Antisimmetria

VINCOLI SUI NODI

Carichi simmetrici:

$$U_y = 0, U_z = 0 \rightarrow$$

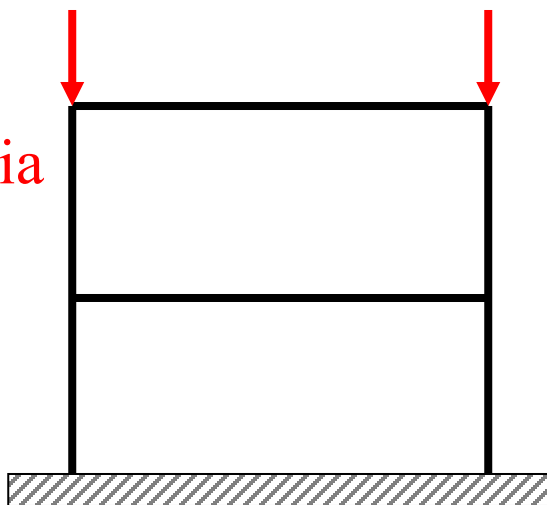
$$ROT_x = 0$$



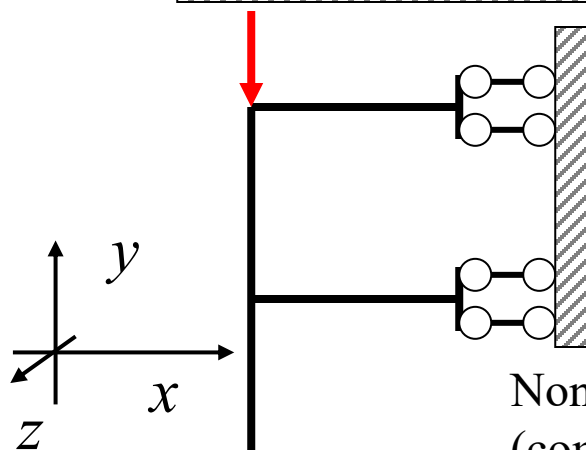
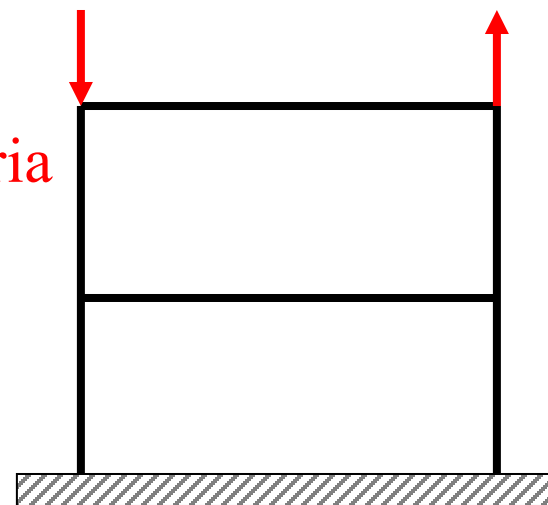
Simmetrie geometriche

Esempi di strutture simmetriche **nel piano** con elementi Beam, assenza di alcuni g.d.l. quindi corrispondenti vincoli non necessari:

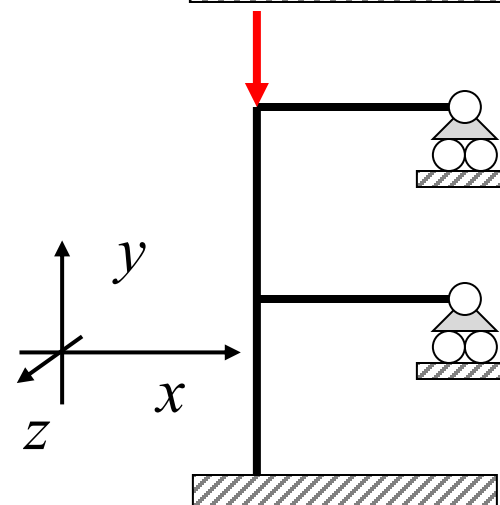
Simmetria



Antisimmetria



Non necessario
(comunque corretto):
 $ROT_y = 0$

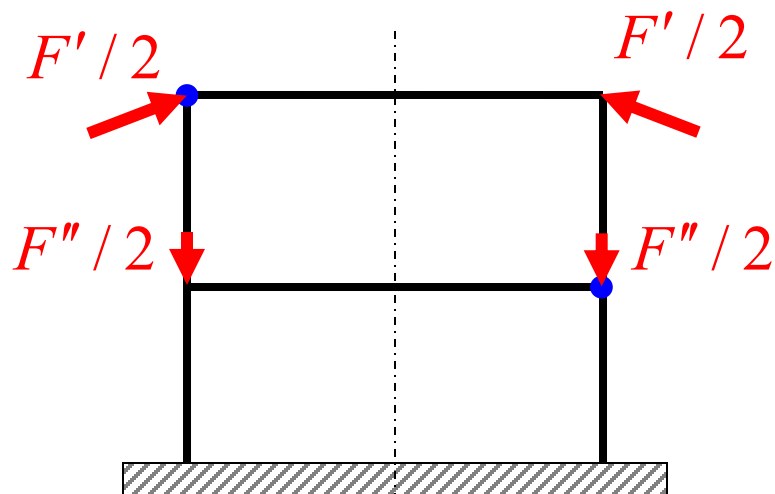


Non necessario:
 $U_z = 0$
 $ROT_x = 0$

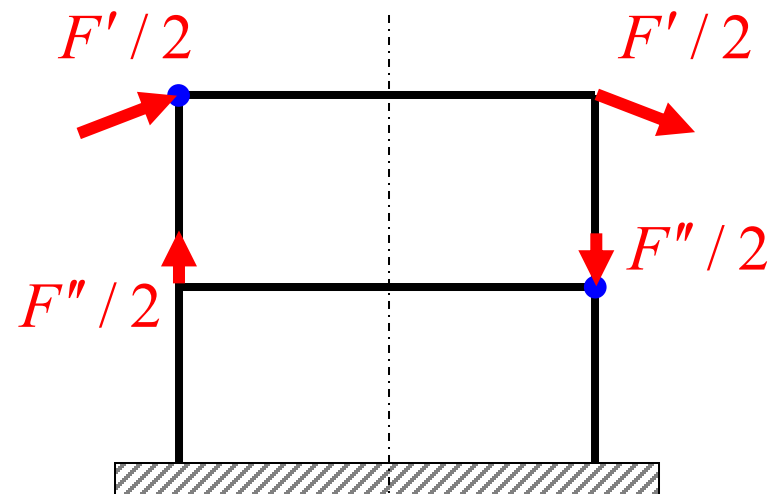
Simmetrie geometriche

Qualunque struttura simmetrica, sia Solida sia Beam & Shell, qualunque carico:
analisi per sovrapposizione di una componente Simmetrica ed una Antisimmetrica

Simulazione con
Simmetria

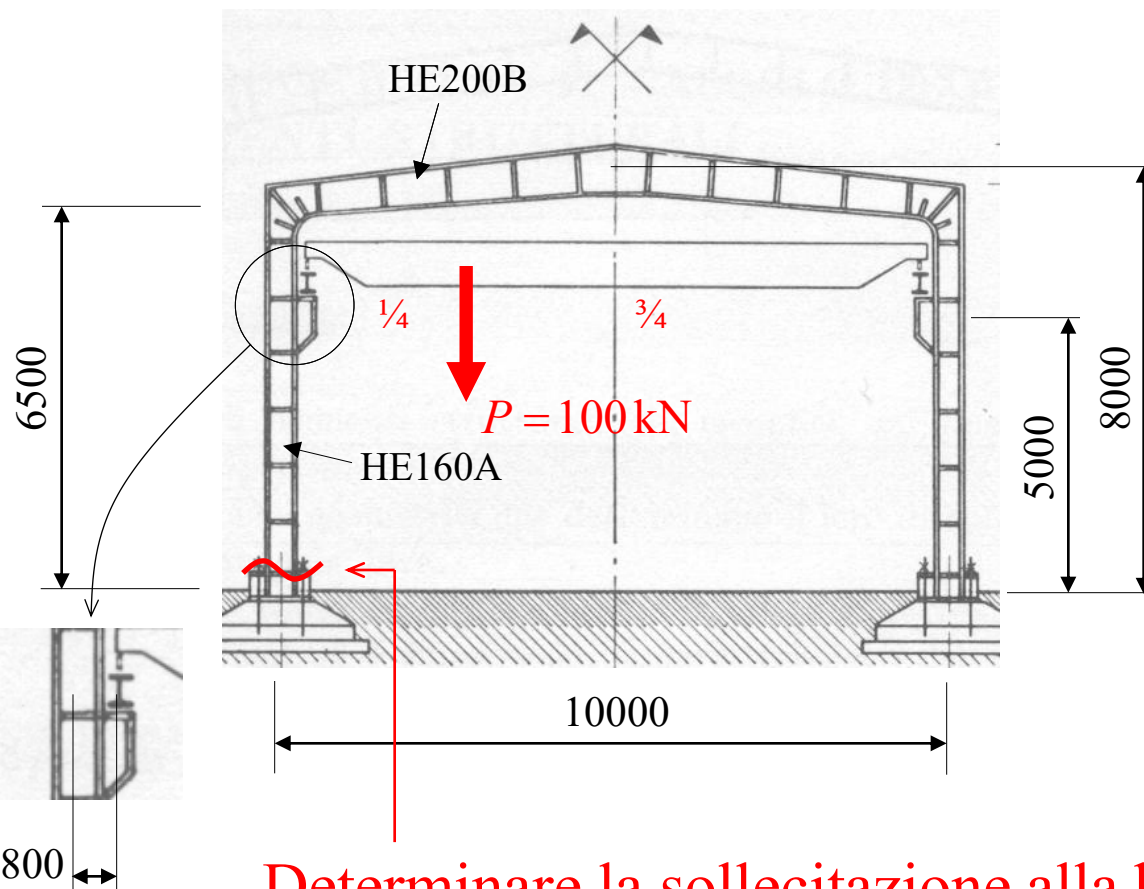
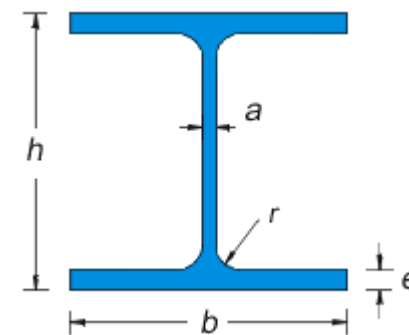


Simulazione con
Antisimmetria



Simmetrie geometriche

Esercitazione da svolgere: Telaio con elementi **BEAM188** e proprietà di simmetria



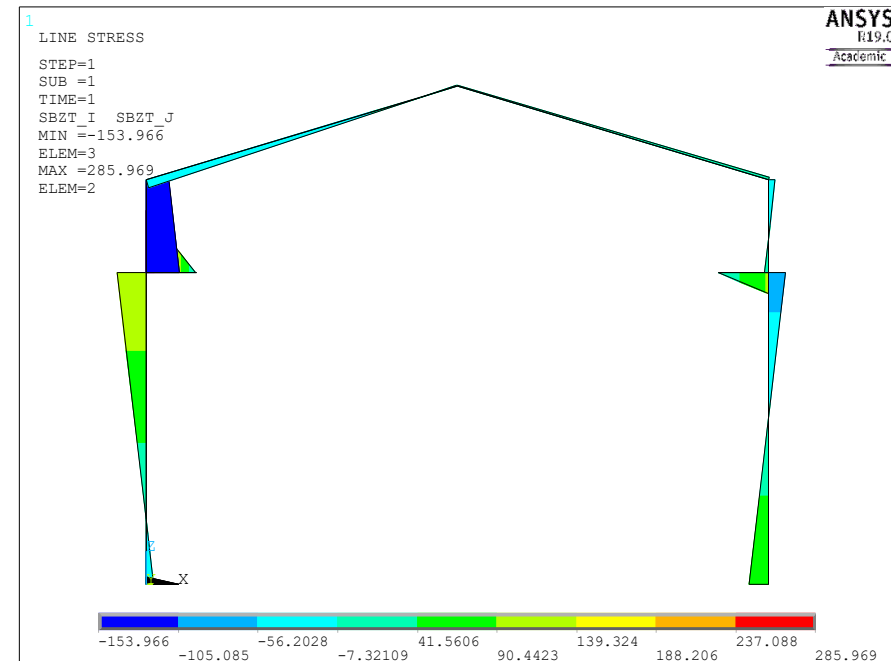
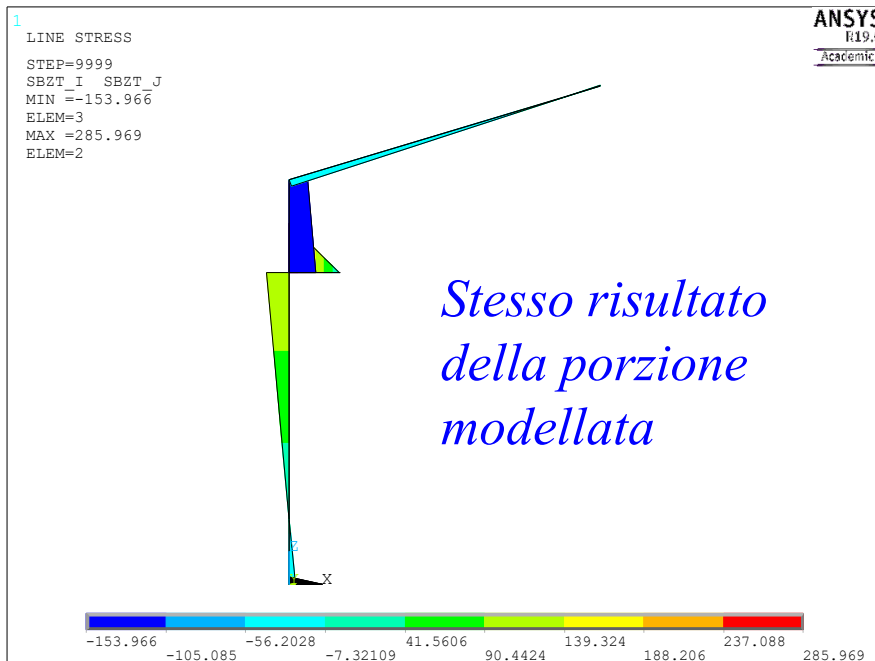
HE200B				
Sigla HEB	b mm	h mm	a mm	e mm
200	200	200	9,0	15,0

HE160A				
sigla HEA	b mm	h mm	a mm	e mm
160	160	152	6,0	9,0

Determinare la sollecitazione alla base della colonna verticale sfruttando al meglio la simmetria del problema

Simmetrie geometriche

Risultato finale, confronto con il modello “Full”

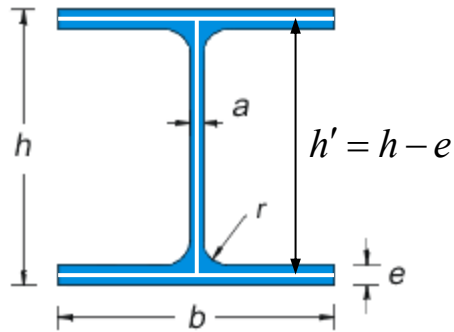


Analisi con 2 Load Step (simmetria, antisimmetria), successiva ricostruzione della soluzione con LCASE
Alternativamente sommare i risultati dei due Load Step visualizzati separatamente

Analisi con il modello completo e un solo Load Step per riferimento

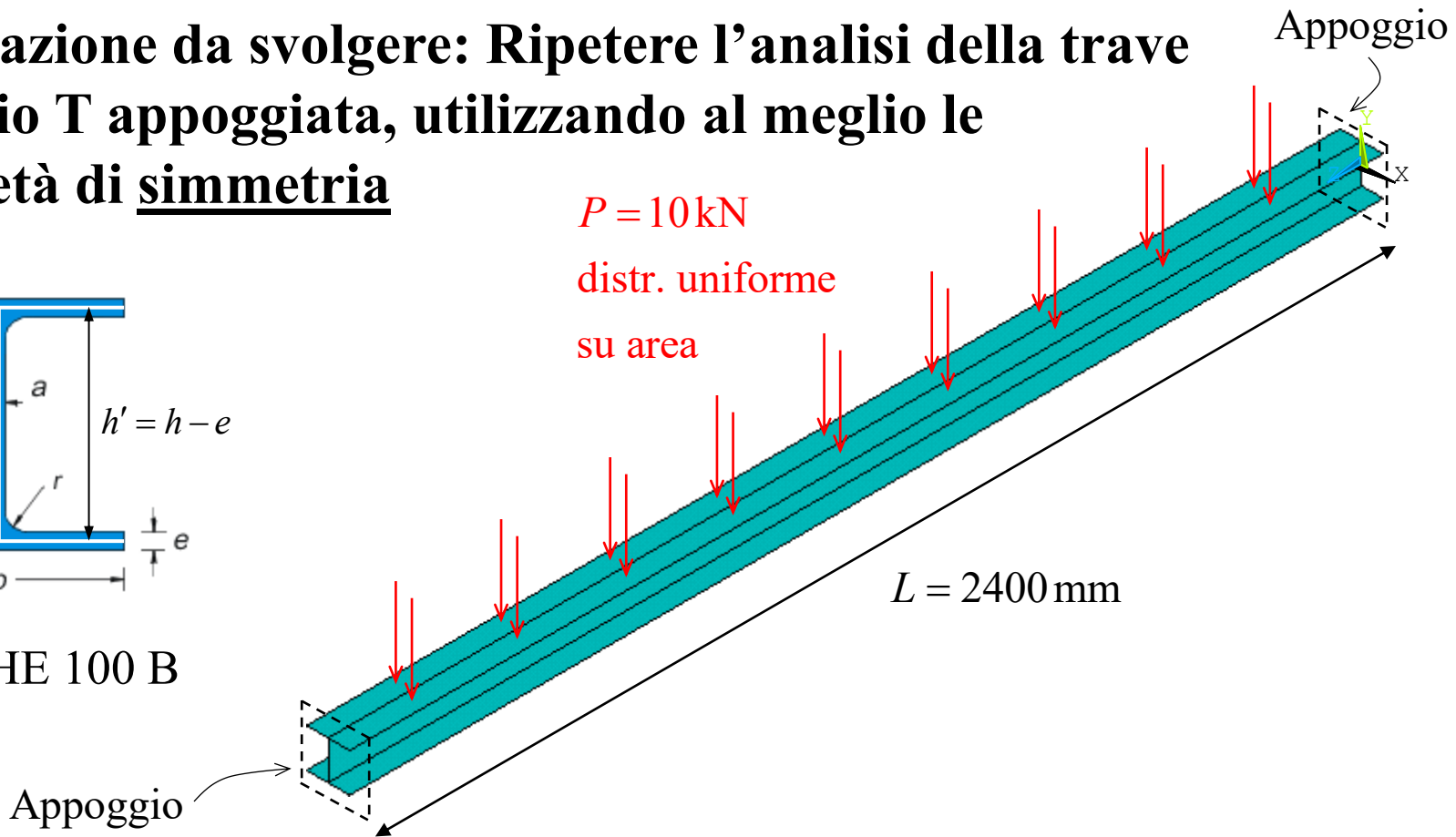
Simmetrie geometriche

Esercitazione da svolgere: Ripetere l'analisi della trave a doppio T appoggiata, utilizzando al meglio le proprietà di simmetria



Sezione HE 100 B

$P = 10 \text{ kN}$
distr. uniforme
su area



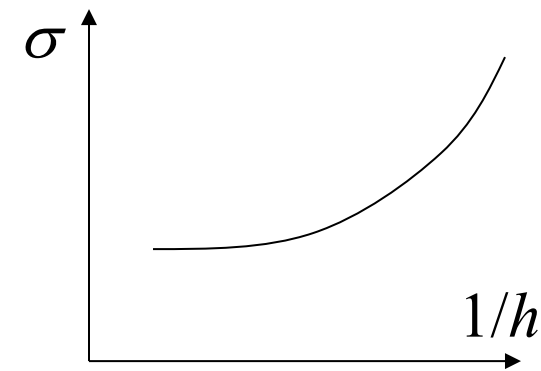
Sigla HEB	b mm	h mm	a mm	e mm	r mm	Peso kg/m	Sezione cm ²	Momenti di inerzia		Moduli di resistenza		Raggi di inerzia	
								J _x cm ⁴	J _y cm ⁴	W _x cm ³	W _y cm ³	i _x cm	i _y cm
100	100	100	6,0	10,0	12	20,4	26,04	449,5	167,3	89,91	33,45	4,16	2,53
120	120	120	6,5	11,0	12	26,7	34,01	864,4	317,5	144,1	52,92	5,04	3,06
140	140	140	7,0	12,0	12	33,7	42,96	1.509	549,7	215,6	78,52	5,93	3,58

Singularità dello stato di tensione

Se lo stato di tensione del modello presenta dei punti di singolarità (valori tendenti a ∞), il valore calcolato tramite gli EF nei punti stessi mostra un andamento sempre crescente (divergente) con l'affinamento del “mesh”. Non è quindi possibile uno studio di convergenza.

Le singolarità possono avere un'origine geometrica (es. l'apice di una fessura o un intaglio a raggio nullo) oppure dipendere dalla struttura del modello, vale a dire dal modo di rappresentare:

- carichi
- vincoli



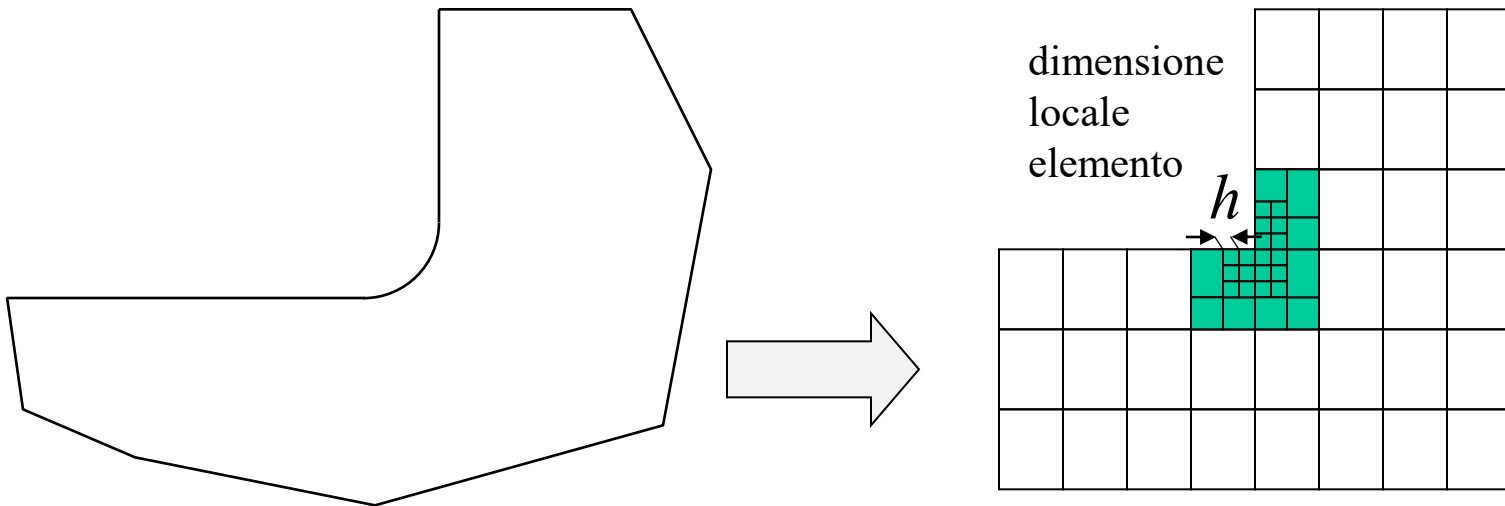
Andamento tipico della tensione calcolata in un punto di singolarità al variare dell'infittimento locale della mesh

Il **modello** può essere comunque **utile** anche se contiene una singolarità (dipende dalle sue finalità) in quanto la soluzione interessa in zone lontane dalla singolarità stessa

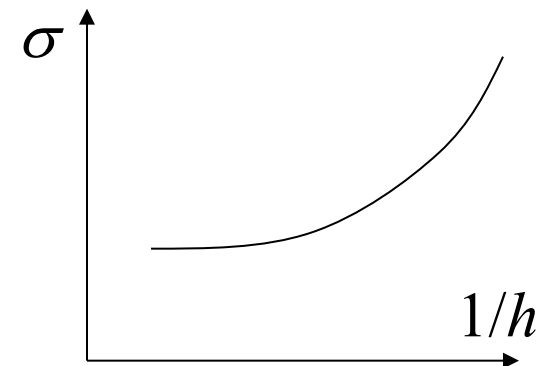
Singularità dello stato di tensione

Schematizzazione di particolari geometrici

Una rappresentazione approssimata dei dettagli geometrici del corpo, in particolare la sostituzione di raggi di raccordo con spigoli vivi, può provocare singolarità nello stato di tensione presente nel modello



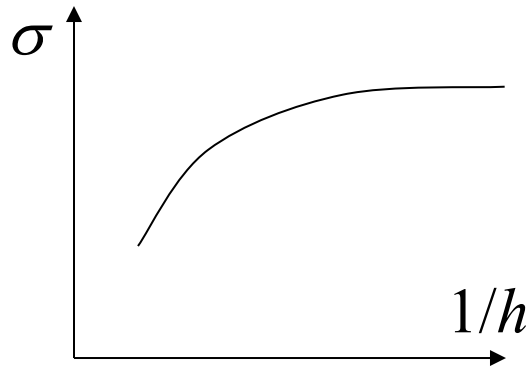
Lo stato di tensione è divergente e non rappresentativo del corpo reale in tutto un intorno dello spigolo



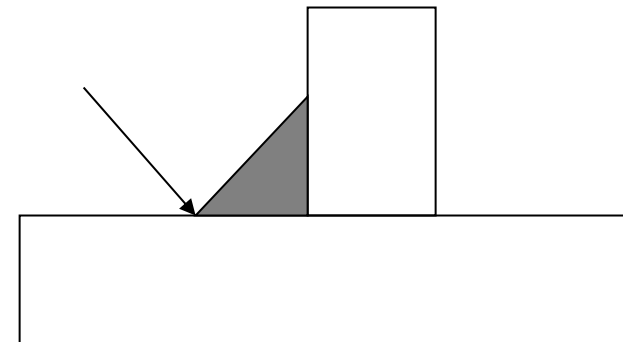
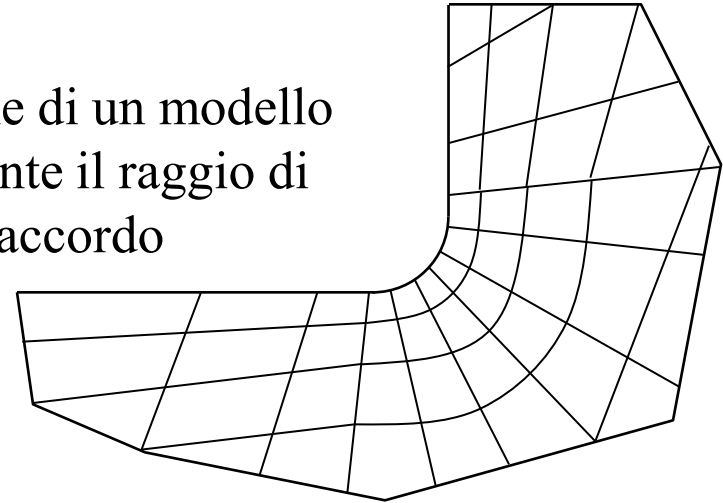
Singularità dello stato di tensione

Schematizzazione di particolari geometrici

Soluzioni possibili



Creazione di un modello
contenente il raggio di
raccordo



N.B.: In alcuni casi il raggio di raccordo è piccolo e non è noto, non essendo quotato, o varia da un componente all'altro nonostante nominalmente uguali (es. saldature)

Singularità dello stato di tensione

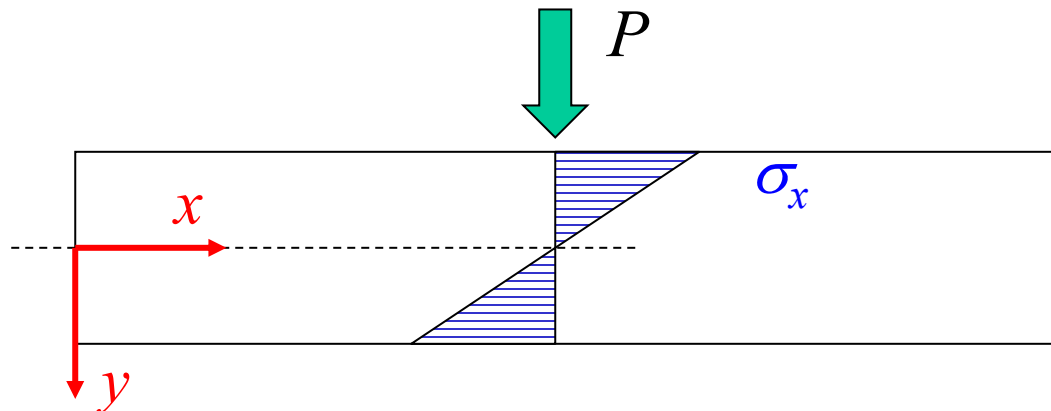
Schematizzazione dei carichi

Il modo di rappresentare i carichi (Es. Forza concentrata o Pressione distribuita) può influenzare sensibilmente le informazioni ottenibili dal modello, tuttavia l'effetto è limitato alle zone in prossimità del punto di applicazione.

Gli effetti del modo di applicazione del carico dipendono anche fortemente dal tipo di elemento utilizzato (Beam, Shell, Solid).

Nel caso di **elementi trave** non si riscontrano singularità dello stato di tensione, qualunque sia la schematizzazione dei carichi (concentrati o distribuiti).

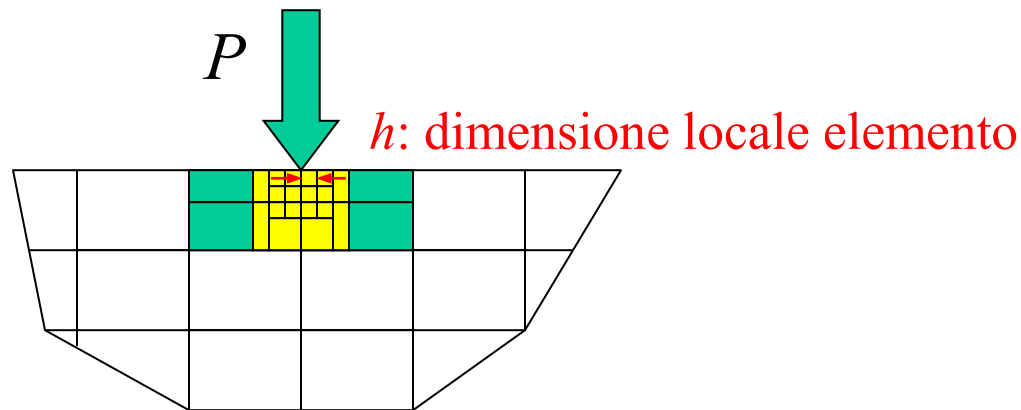
L'andamento delle tensioni è quello dato dalle teoria delle travi, in cui è ammessa l'applicazione di una forza concentrata.



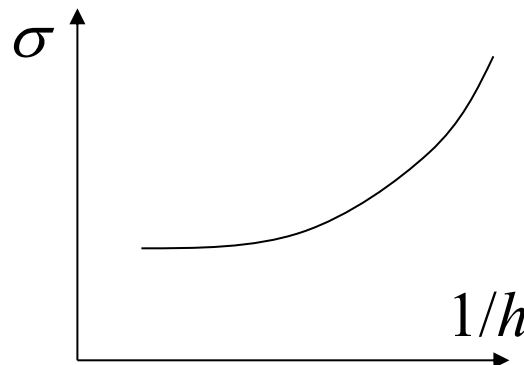
Singularità dello stato di tensione

Schematizzazione dei carichi

Nel caso di elementi Solid e Shell si riscontrano singolarità nello stato di tensione in presenza di carichi concentrati.



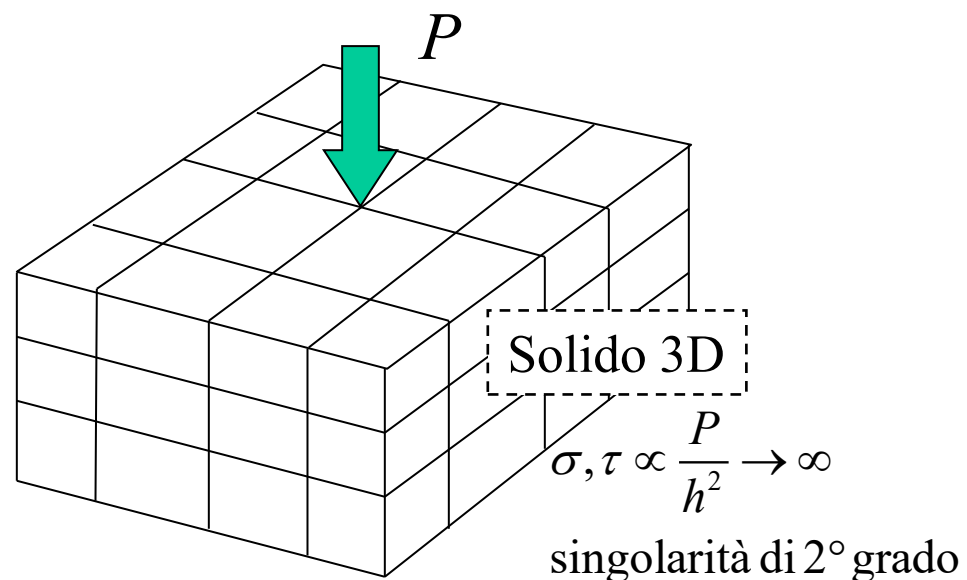
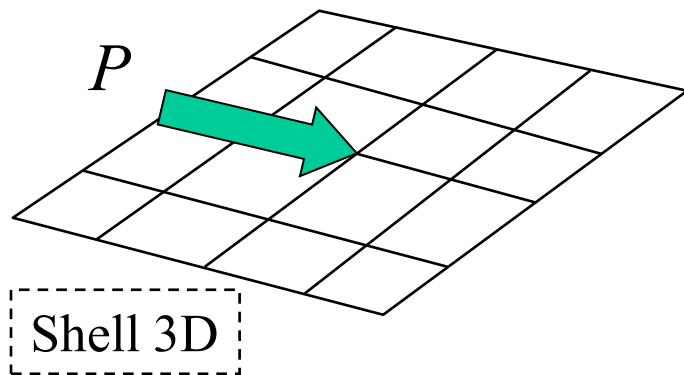
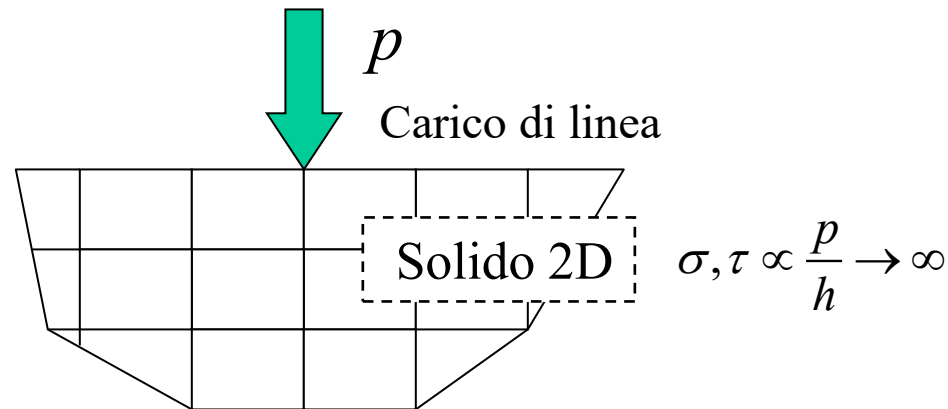
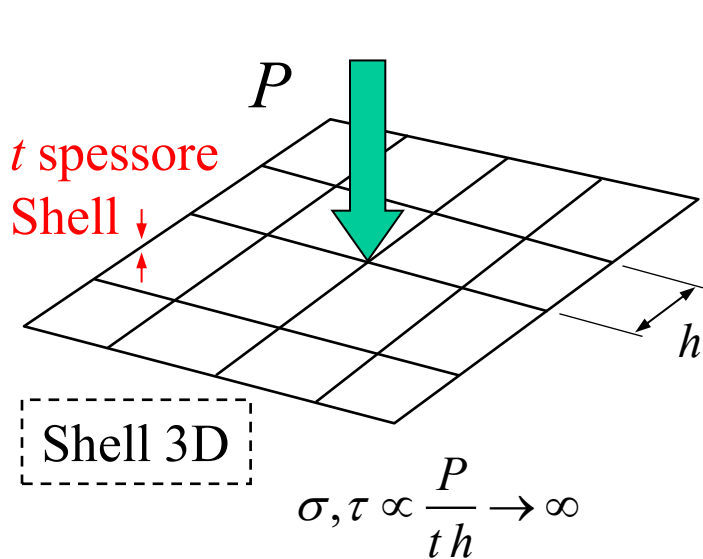
Infittendo progressivamente si osserva infatti che le dimensioni (h) degli elementi su cui è applicato il carico tendono a zero. Quindi le tensioni, al nodo di applicazione del carico, tendono a infinito.



Singularità dello stato di tensione

Schematizzazione dei carichi

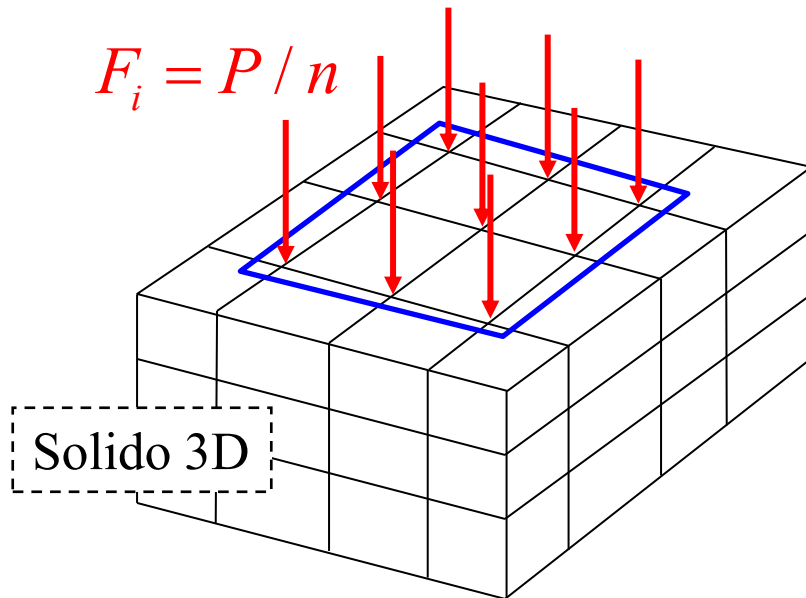
Carichi **concentrati** che producono stati di tensione singolari:



Singularità dello stato di tensione

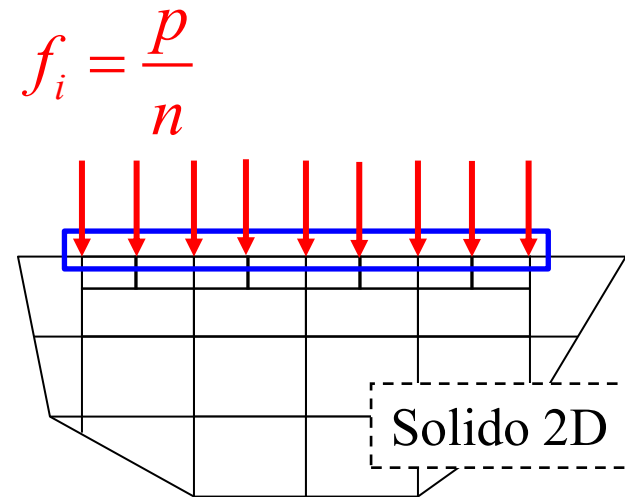
Schematizzazione dei carichi

Un carico distribuito su di un'area non produce singolarità



Al fine di annullare la singolarità di 2° grado è necessaria una redistribuzione della forza su un'area finita, che non scala con la dimensione dell'elemento

$$\sigma, \tau \propto \frac{P/n}{h^2} (n \propto 1/h^2) \rightarrow \text{finito}$$



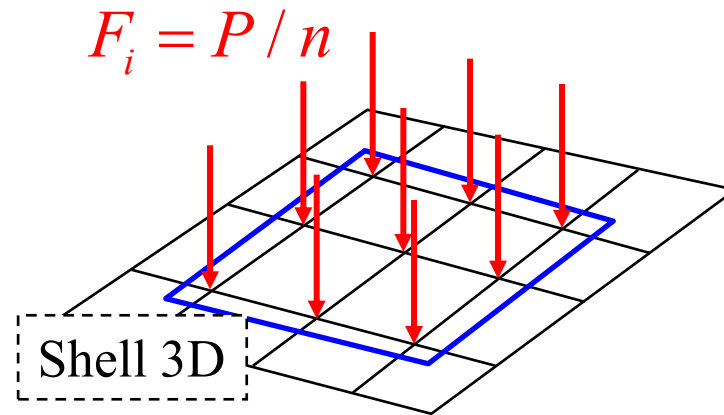
Per il caso piano, il carico per unità di lunghezza deve essere redistribuito sui nodi di una linea

$$\sigma, \tau \propto \frac{p/n}{h} (n \propto 1/h) \rightarrow \text{finito}$$

Singularità dello stato di tensione

Schematizzazione dei carichi

Un carico distribuito su di un'area non produce singularità



$$\sigma, \tau \propto \frac{P / n}{t h} (n \propto 1 / h^2) \rightarrow 0$$

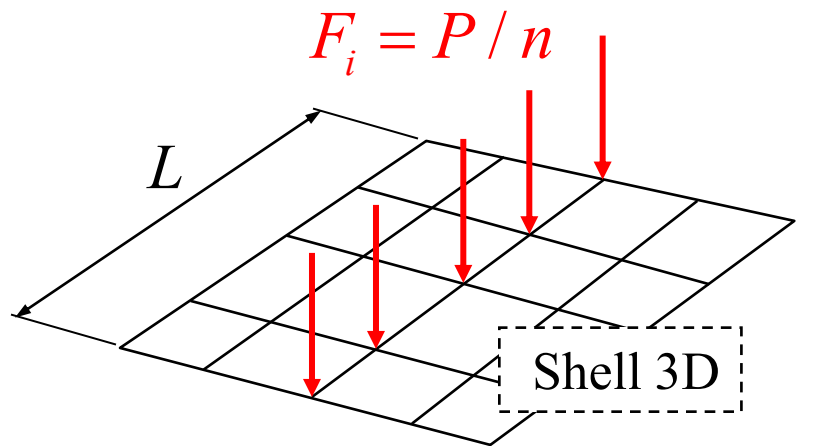
Le tensioni locali indotte dall'applicazione di una forza, su un'area (fissa), tendono a zero, tuttavia in quella zona possono essere presenti altre tensioni strutturali, ad esempio di flessione, generate da carichi remoti

Singularità dello stato di tensione

Schematizzazione dei carichi

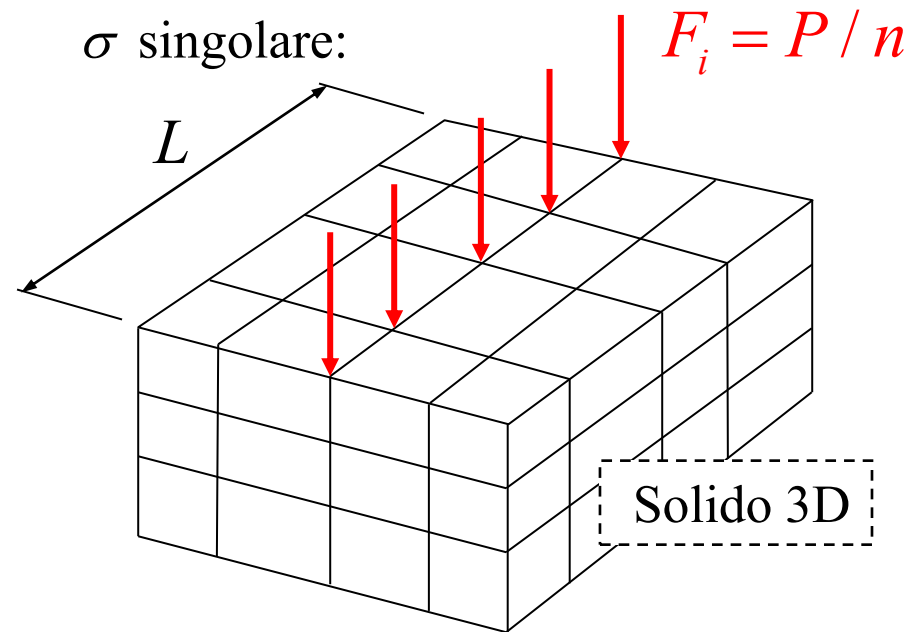
Carichi distribuiti su di una **linea**: producono tensioni non singolari su di un modello Shell mentre singolari su di un modello Solid

σ non singolare:



$$\sigma, \tau \propto \frac{P/n}{th} \quad (n \propto 1/h) \rightarrow \text{finito}$$

σ singolare:



$$\sigma, \tau \propto \frac{P/n}{h^2} \quad (n \propto 1/h) \rightarrow \infty$$

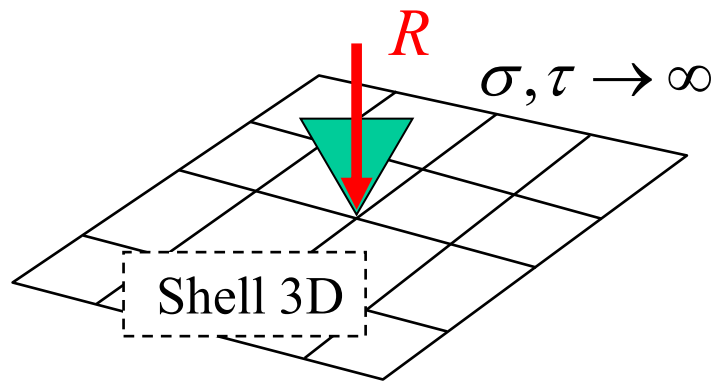
Singularità di 1° grado

Singularità dello stato di tensione

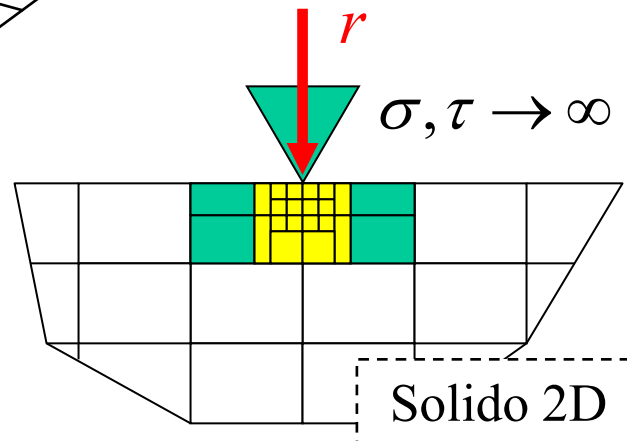
Schematizzazione dei vincoli

Dal momento che il vincolo trasferisce al modello una forza, può produrre singolarità dello stato di tensione analoghe a quelle viste per i carichi

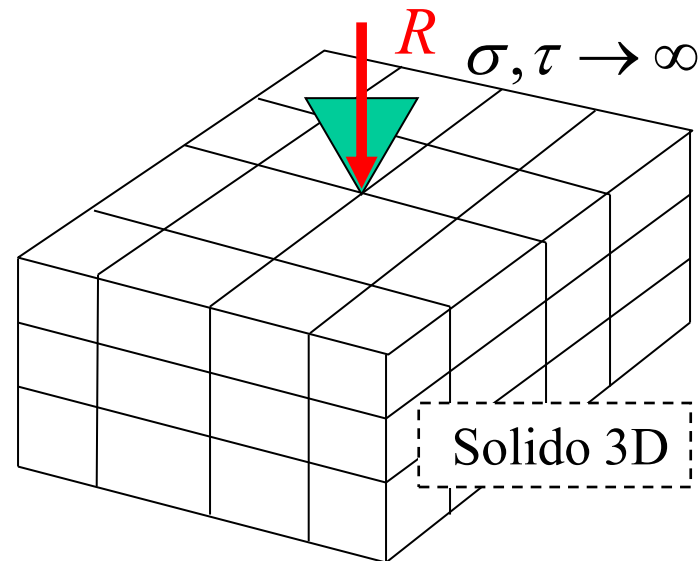
Esempi di vincoli concentrati in un solo nodo:



Sing. di 1° grado



Sing. di 1° grado



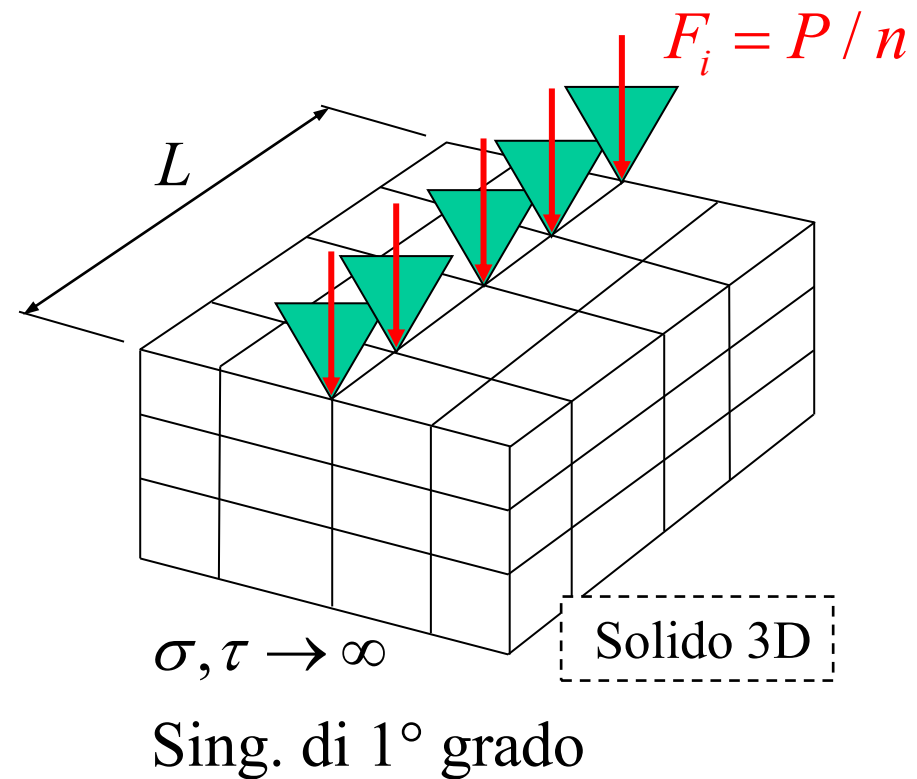
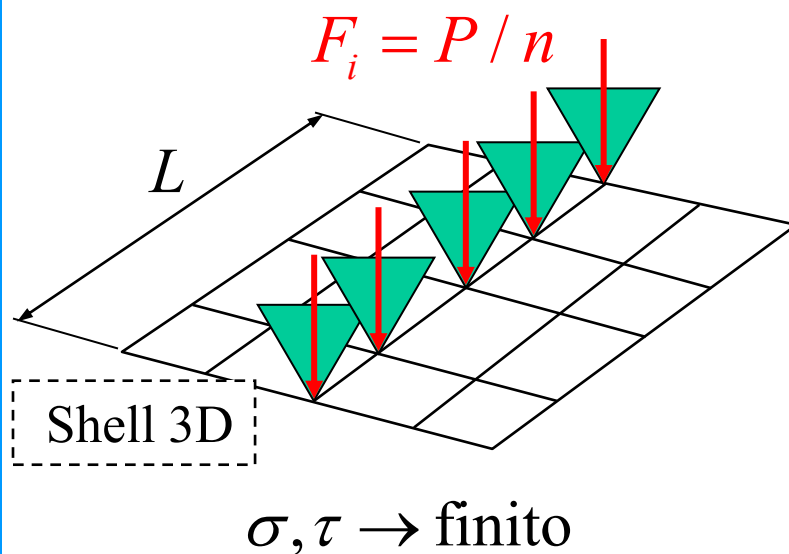
Sing. di 2° grado

Singularità dello stato di tensione

Schematizzazione dei vincoli

Dal momento che il vincolo trasferisce al modello una forza, può produrre singularità dello stato di tensione analoghe a quelle viste per i carichi

Esempi di vincoli lungo una linea:

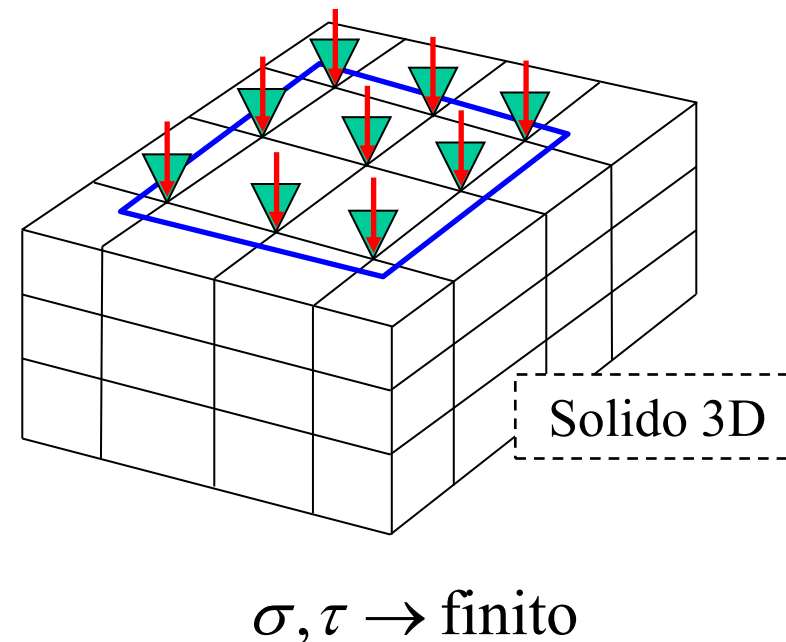
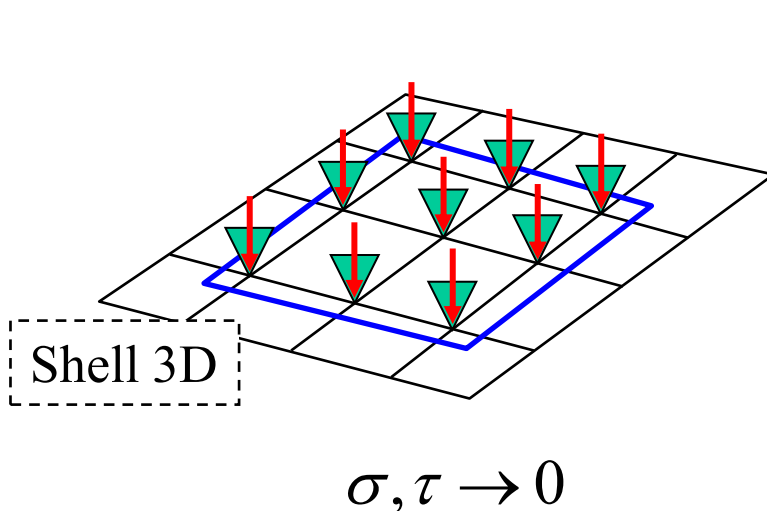


Singularità dello stato di tensione

Schematizzazione dei vincoli

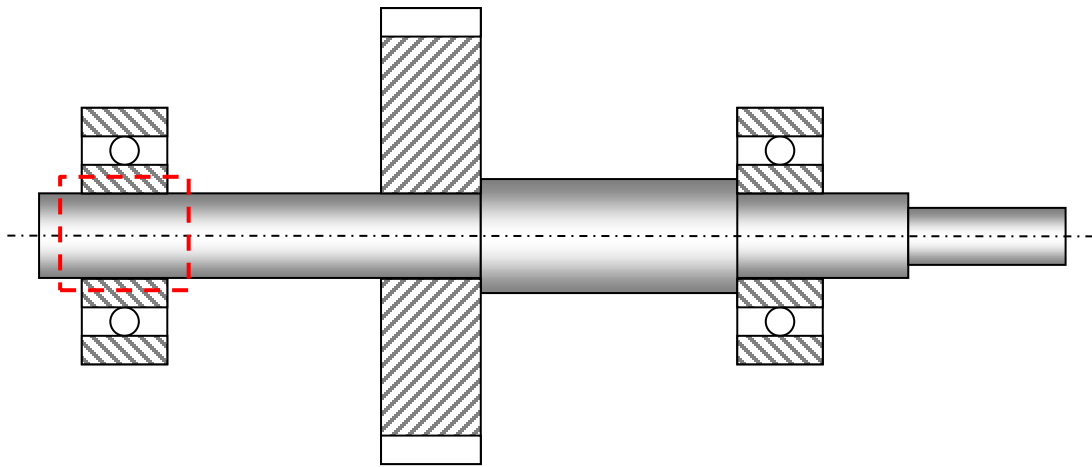
Dal momento che il vincolo trasferisce al modello una forza, può produrre singularità dello stato di tensione analoghe a quelle viste per i carichi

N.B.: un vincolo di spostamento su una zona estesa elimina la singularità, però produce due **vincoli di rotazione** che potrebbero essere non desiderati

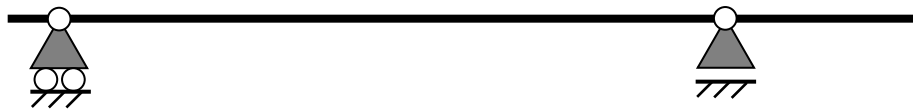


Schematizzazione vincoli

Vincoli di una struttura di tipo monodimensionale, in cui è necessario gestire i g.d.l. di rotazione



Con elementi trave la schematizzazione immediata, essendo applicabili vincoli e carichi concentrati

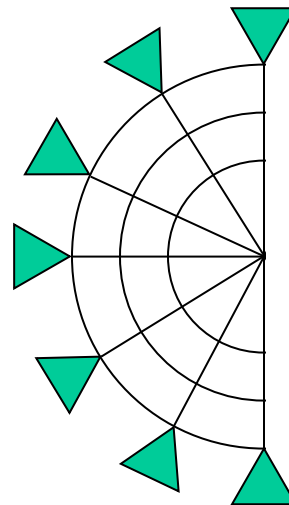
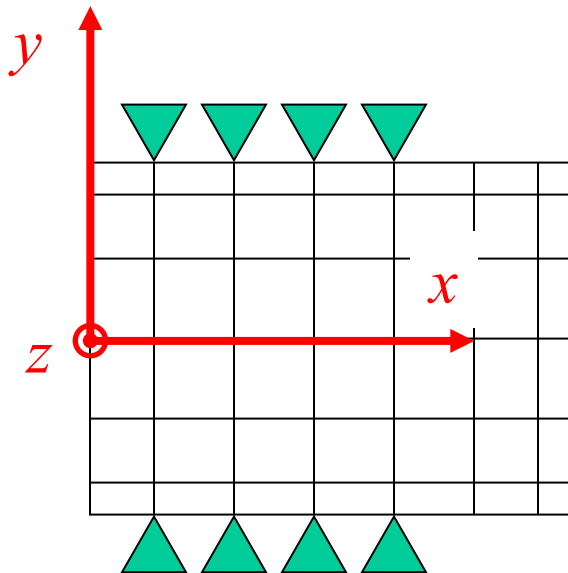
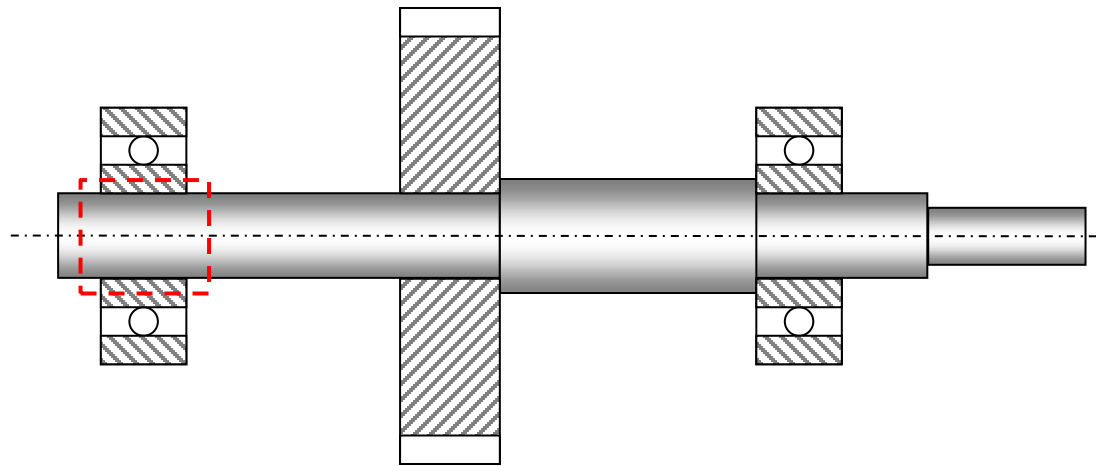


Appoggio (3D)
Rotazioni libere sezione

Cerniera (3D)
Rotazioni libere sezione

Schematizzazione vincoli

Struttura equivalente con elementi solidi 3D

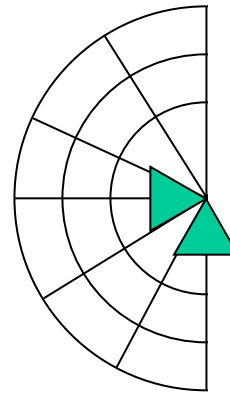
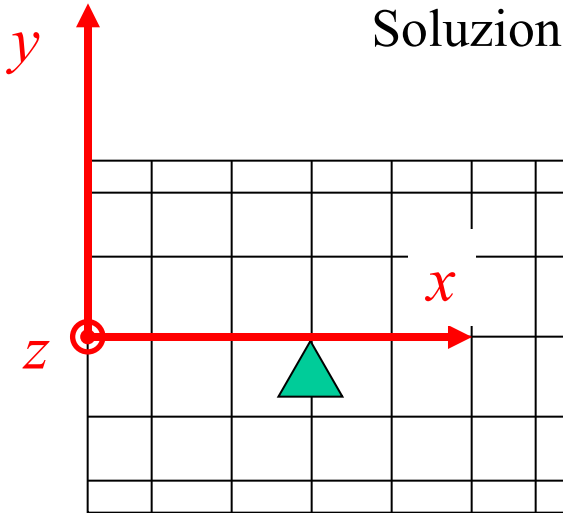


Nonostante non singolare, un vincolo in direzione radiale su tutti i nodi dell'area di appoggio del cuscinetto impedisce anche la rotazione attorno a y e a z , e quindi non è corretto, considerando il normale gioco del cuscinetto

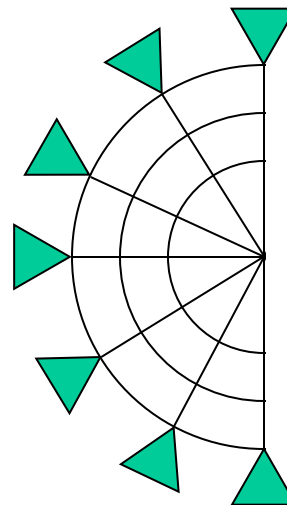
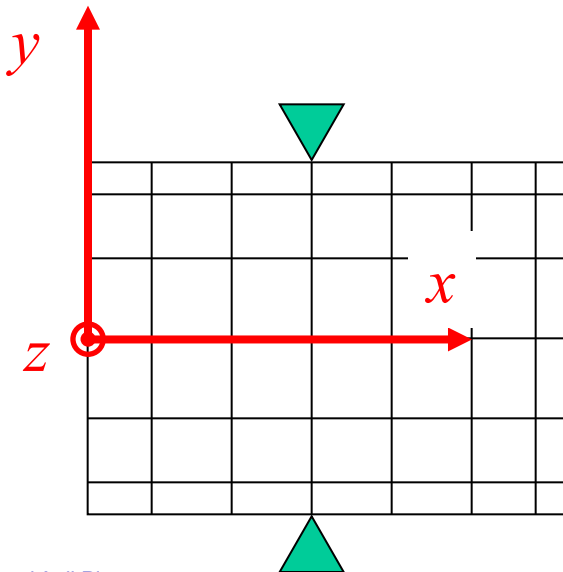
Schematizzazione vincoli

Struttura equivalente con elementi solidi 3D

Soluzioni cinematicamente corrette:



Vincolare solo un nodo, in posizione corrispondente al centro di rotazione del cuscinetto
N.B.: tensioni singolari di 2° grado, vincolo cinematicamente corretto



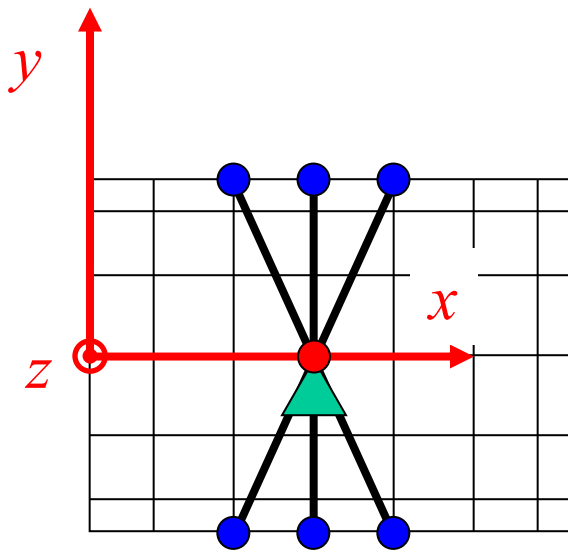
Alternativamente si può vincolare in direzione radiale tutti i nodi esterni che giacciono sul piano medio del cuscinetto

N.B.: tensioni singolari, però carico di linea e quindi ordine di singolarità più basso, e vincolo cinematicamente corretto

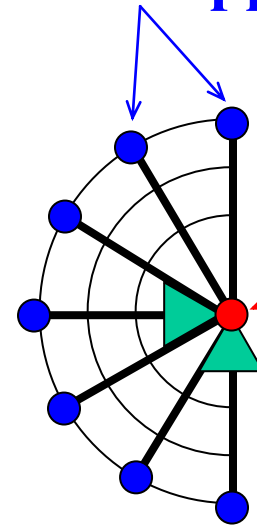
Schematizzazione vincoli

Equivalenza cinematica

Per eliminare la singolarità e lasciare libere le rotazioni si può vincolare in direzione y e z un nodo non appartenente all'albero (nodo **Master**), posizionato in corrispondenza del centro di rotazione del cuscinetto



Nodi appartenenti all'albero (Slave)



Nodo non appartenente all'albero (Master)

Successivamente si può connettere tale nodo a quelli della superficie di appoggio del cuscinetto (nodi **Slave**) tramite una regione rigida: comando CERIG. Questa connessione Master-Slave potrebbe essere fatta alternativamente con elementi *Beam* di rigidezza molto elevata.

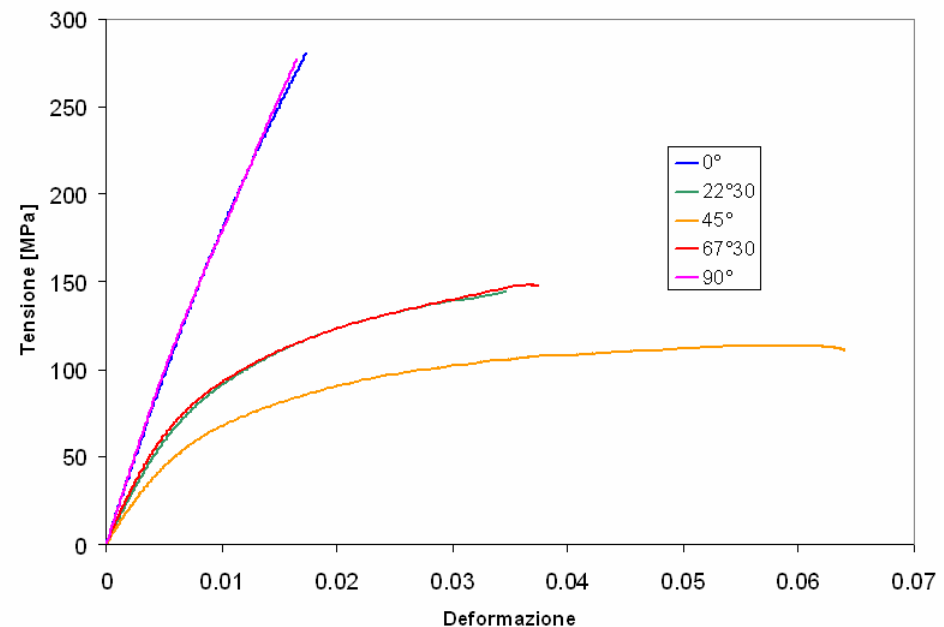
Schematizzazione vincoli

Vincolo in corrispondenza dell'applicazione del carico

In alcuni casi la regione di applicazione dei carichi può coincidere con quella di applicazione di alcuni vincoli, ovviamente secondo altre direzioni.



Esempio: provino piatto in materiale composito, diversi test al variare dell'angolo delle fibre



Schematizzazione vincoli

Vincolo in corrispondenza dell'applicazione del carico

Le ganasce di serraggio impediscono le deformazioni alle estremità di afferraggio del provino



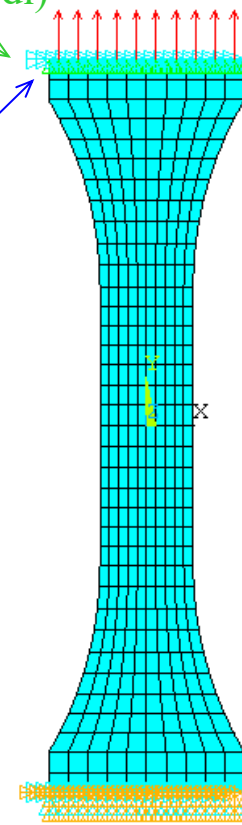
Vincolo di uguaglianza degli spostamenti "y" (comando CP su più nodi)

Vincolo sugli spostamenti "x" e "z"

Pressione uniforme

Inoltre, anche vincoli di rotazione

Incastro completo

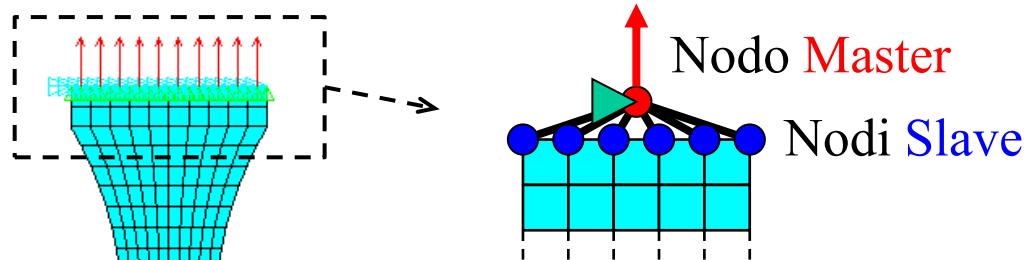


N.B.: Se la forza (pressione) agisce secondo la direzione del vincolo si scarica direttamente su di esso e non sul resto della struttura. Per questo motivo, il vincolo in direz. y è solo relativo (CP) e non vincolo rispetto al ground (D)

Schematizzazione vincoli

Equivalenza cinematica

Alternativamente si può usare la regione rigida (precedentemente introdotta) che fa riferimento ad un nodo Master



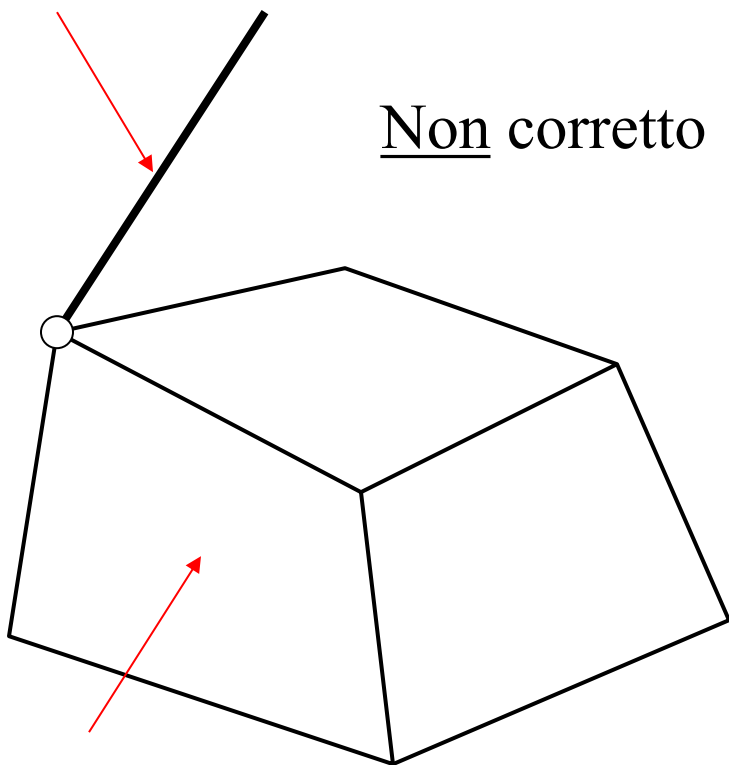
Al nodo Master si impone i vincoli secondo tutti i g.d.l., compreso le rotazioni, escluso però lo spostamento in direzione y , ed infine si applica la forza (totale) secondo y

A differenza del caso precedente anche i nodi Slave hanno i g.d.l. di rotazione che verranno anch'essi vincolati a quelli del Master

Compatibilità tra elementi

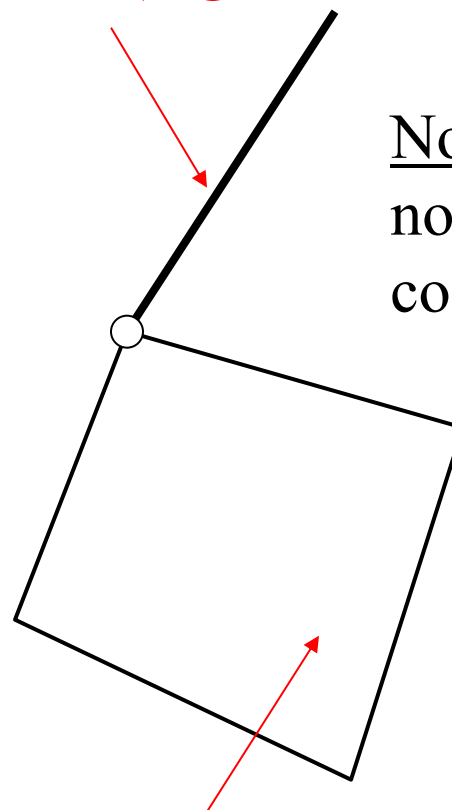
Elementi di tipo diverso possono essere usati nello stesso modello, tuttavia una connessione mediante nodi a comune funziona in termini di modello EF, però tipicamente, non porta ad una modellazione concettualmente corretta

Beam (6 g.d.l./nodo)



Solid 3D (3 g.d.l./nodo)

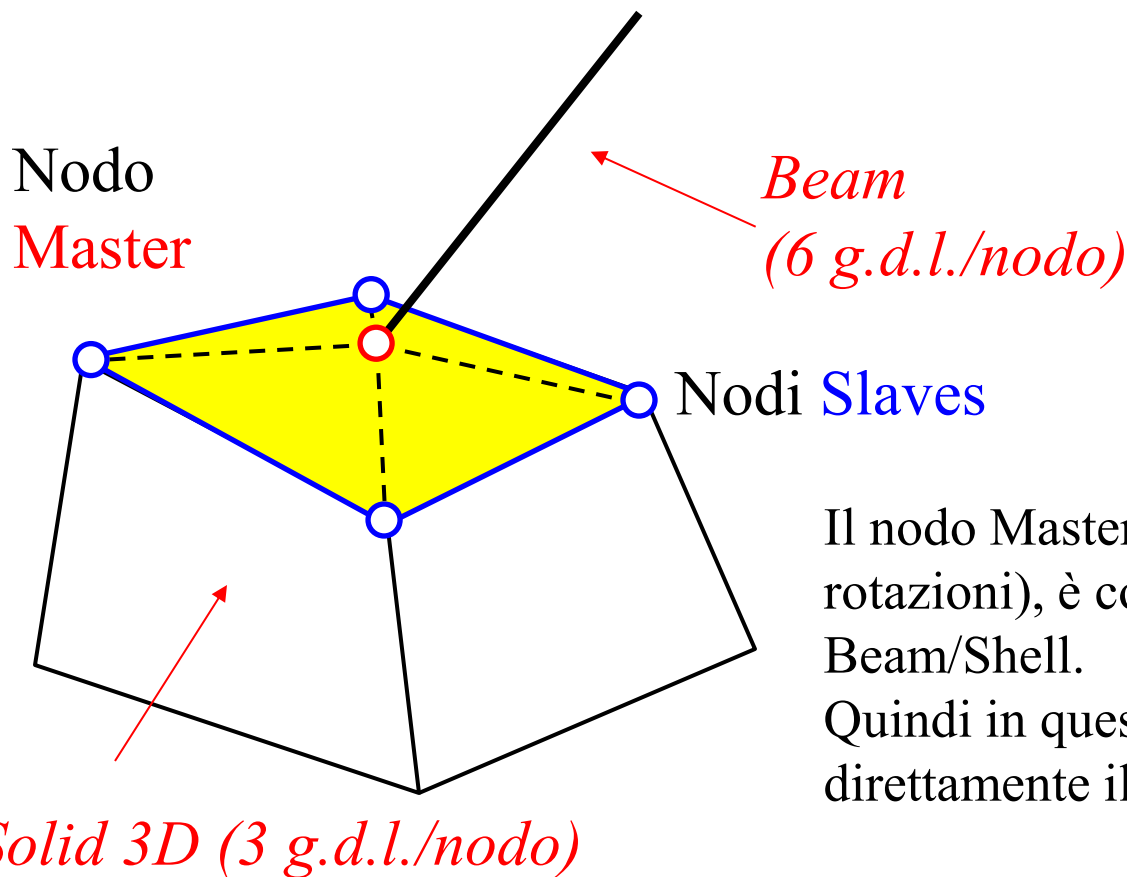
Beam (6 g.d.l./nodo)



Shell 3D (6 g.d.l./nodo)

Compatibilità tra elementi

Un nodo di un elemento Beam (o Shell) con 6 g.d.l. può essere connesso ad un insieme di nodi di elementi Solid solo se vincolati a comportarsi come una regione rigida (comando CERIG) rispetto a quel nodo

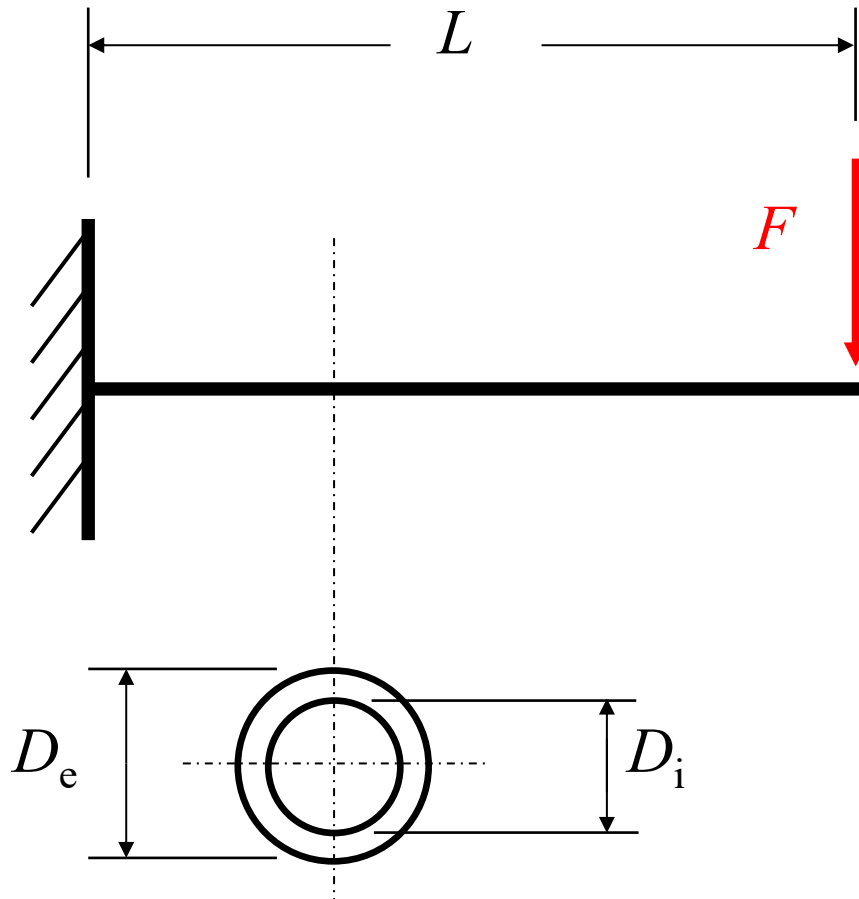


Il nodo Master, avendo 6 g.d.l. (anche le rotazioni), è compatibile con un nodo Beam/Shell.

Quindi in questo caso si può usare direttamente il nodo Beam come Master

Compatibilità tra elementi

Esempio: Trave incastrata modellata a tratti con diversi tipi di elemento



Dati

Parametri di geometria

$$D_e = 40 \text{ mm}$$

$$D_i = 20 \text{ mm}$$

$$L = 390 \text{ mm}$$

Parametri di carico

$$P = 200 \text{ N}$$

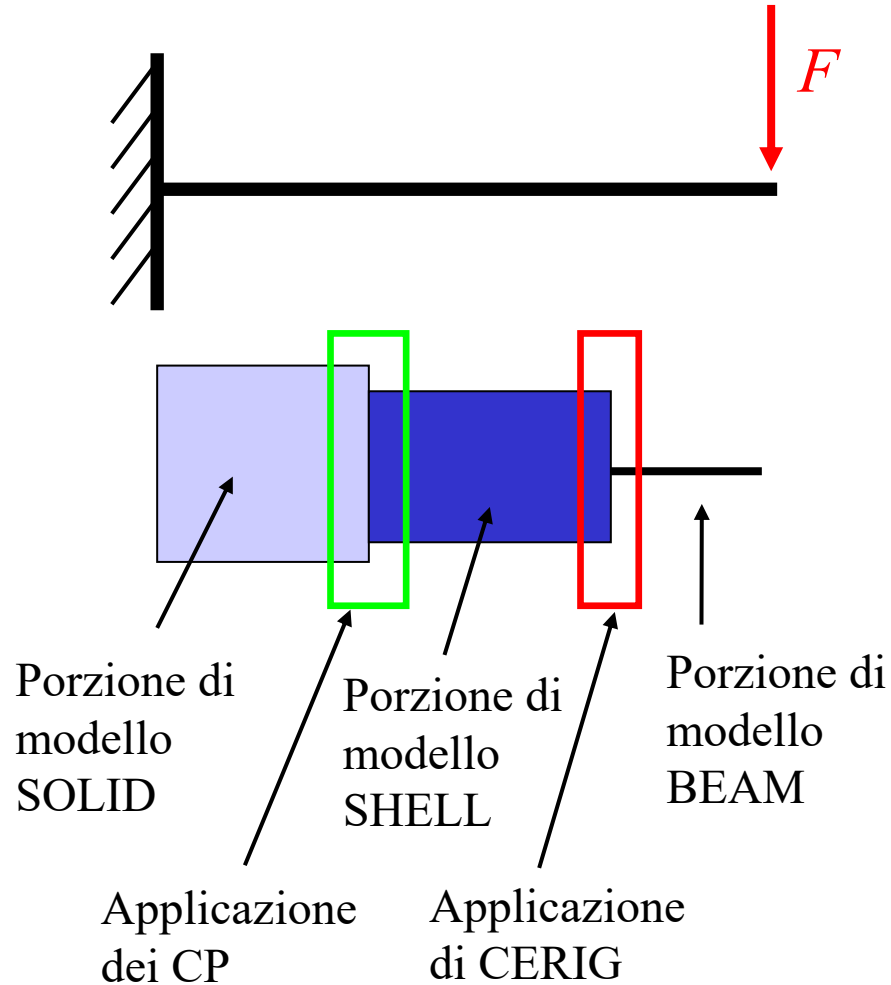
Parametri di materiale

$$E = 205\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

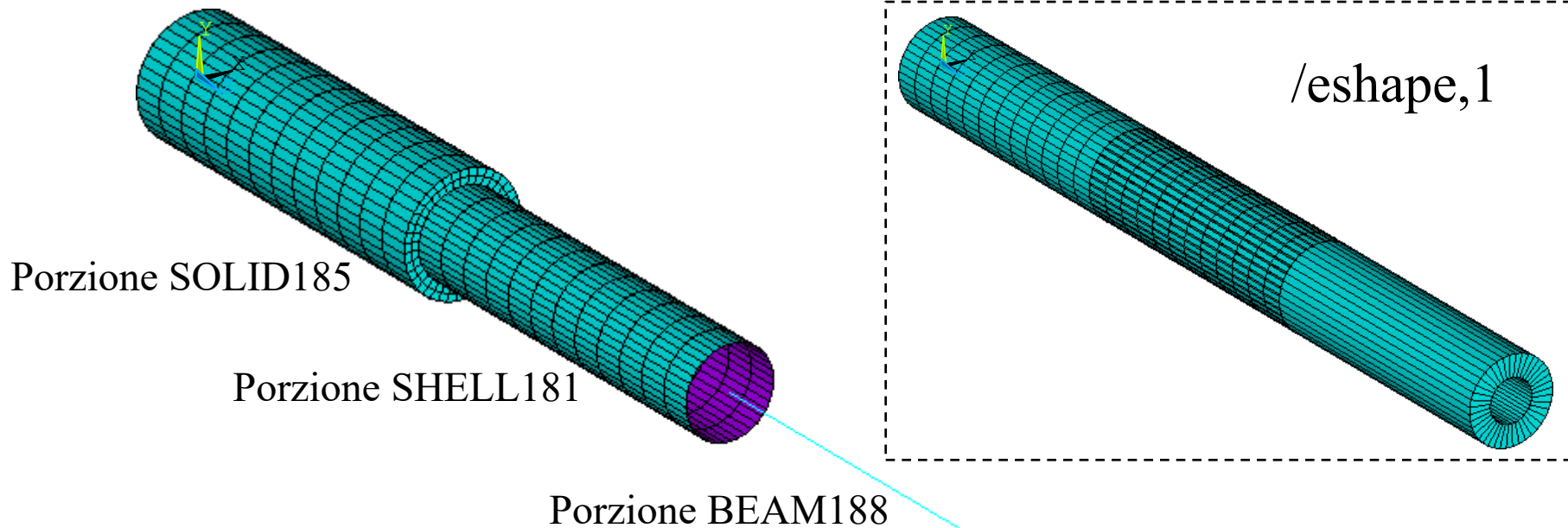
Compatibilità tra elementi

Tipi di elemento da utilizzare e vincoli da imporre fra le diverse porzioni del modello



Compatibilità tra elementi

Tipi di elemento da utilizzare e vincoli da imporre fra le diverse porzioni del modello



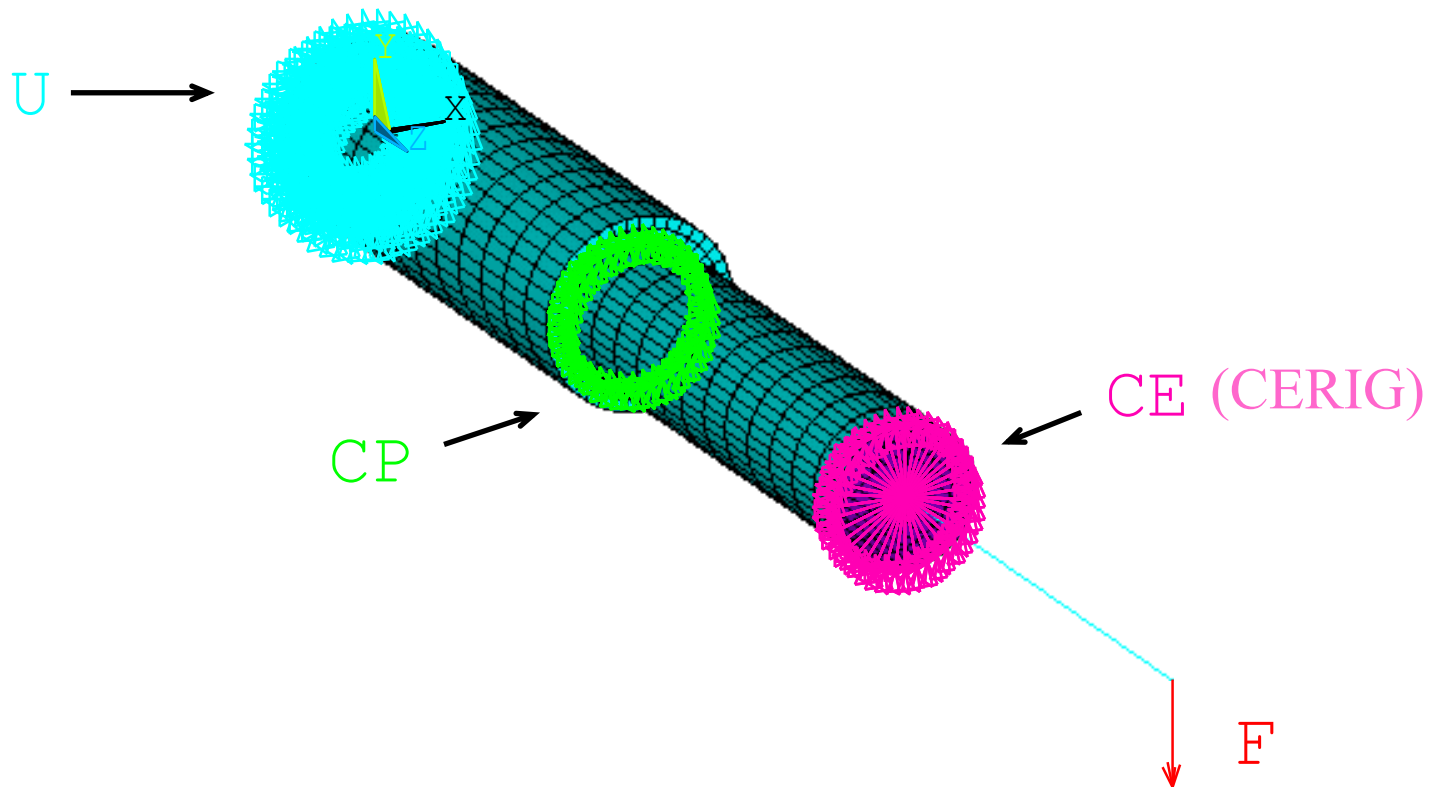
File di comandi: *CombinazioneTipiElementi_TraveIncastrata.txt*

Compatibilità tra elementi

Vincoli relativi:

CP fra nodi elementi Shell e nodi elementi Solid

CE fra nodo elemento Beam e nodi elementi Shell

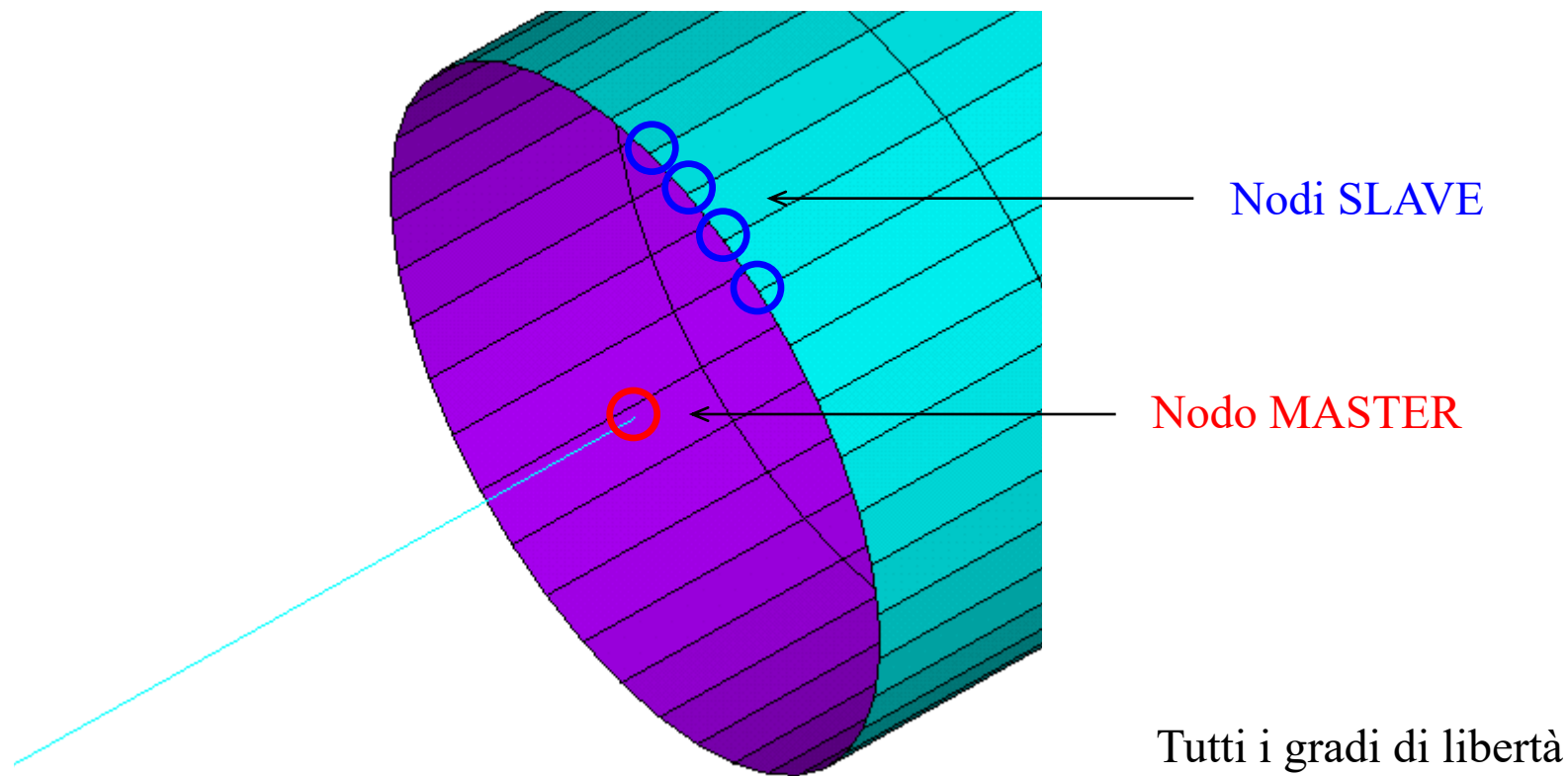


File di comandi: *CombinazioneTipiElementi_TraveIncastrata.txt*



Compatibilità tra elementi

Vincoli relativi: CE fra nodo elem. Beam e nodi elem. Shell



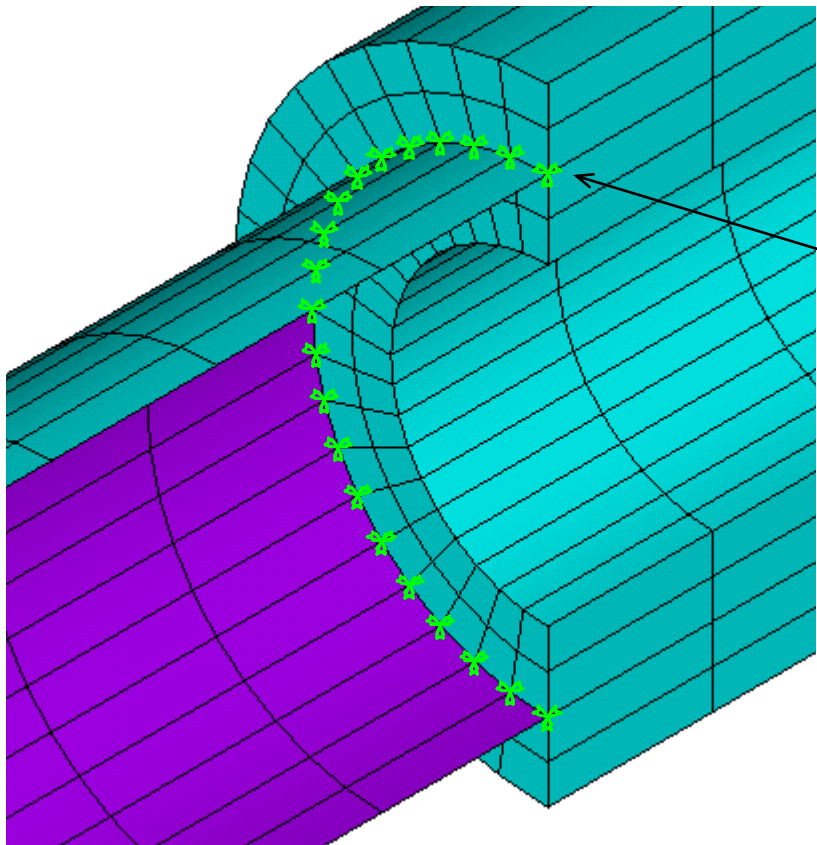
CERIG, **NodoMaster**, all, all

Numero del nodo MASTER:
NodoMaster = node(x,y,z)

Nodi SLAVE
 selezionati

Compatibilità tra elementi

Vincoli relativi: CP fra nodi elem. Shell e nodi elem. Solid



Applicazione dei CP:

nodi SHELL coincidenti con
i nodi SOLID

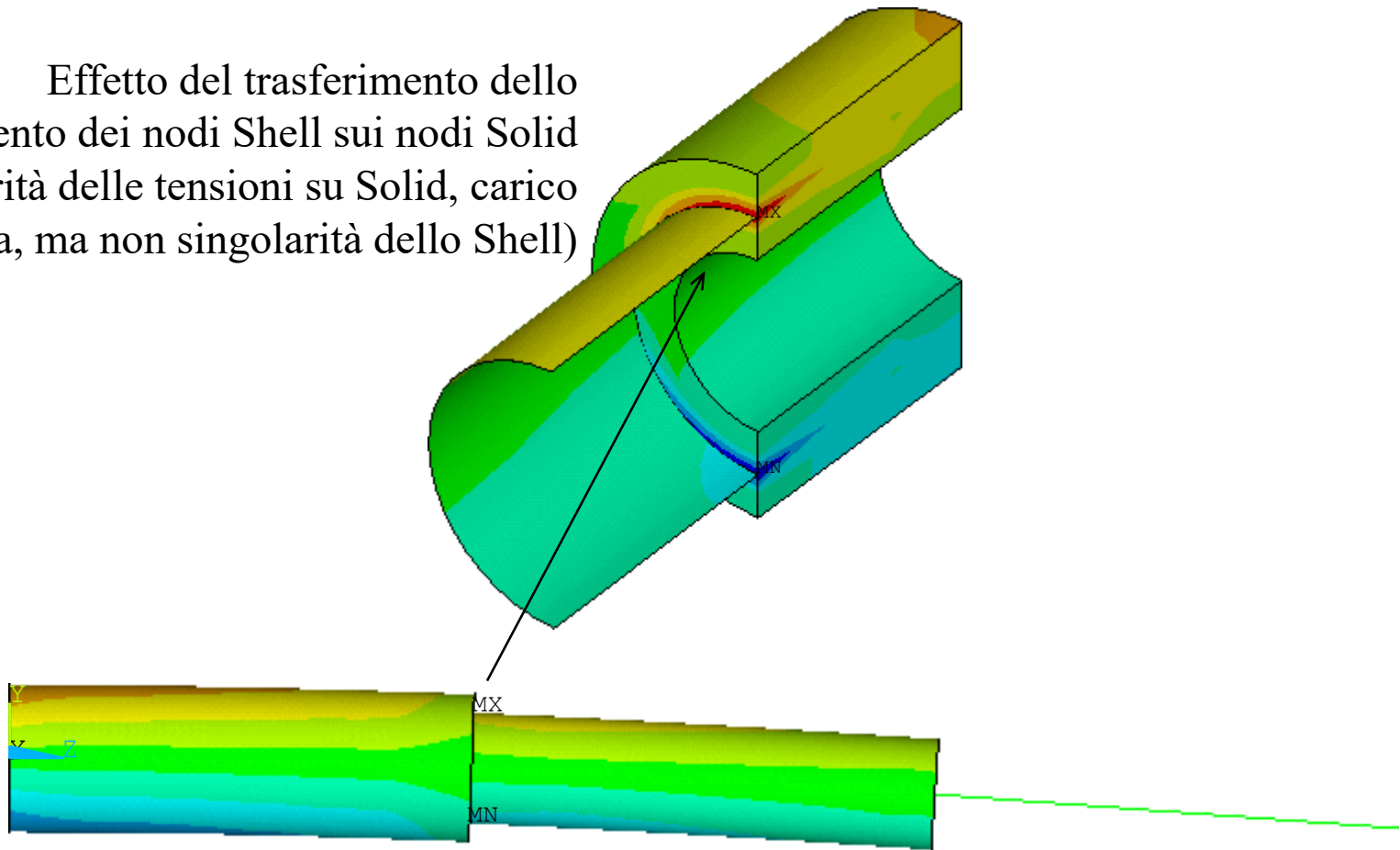
L'intero carico per settore
viene trasferito ad un solo
nodo solido, ed inoltre la
rotazione degli elementi
Shell non viene trasferita
agli elementi Solid

File di comandi: CombinazioneTipiElementi_TraveIncastrata.txt

Compatibilità tra elementi

Tensione flessionale con linea di singolarità

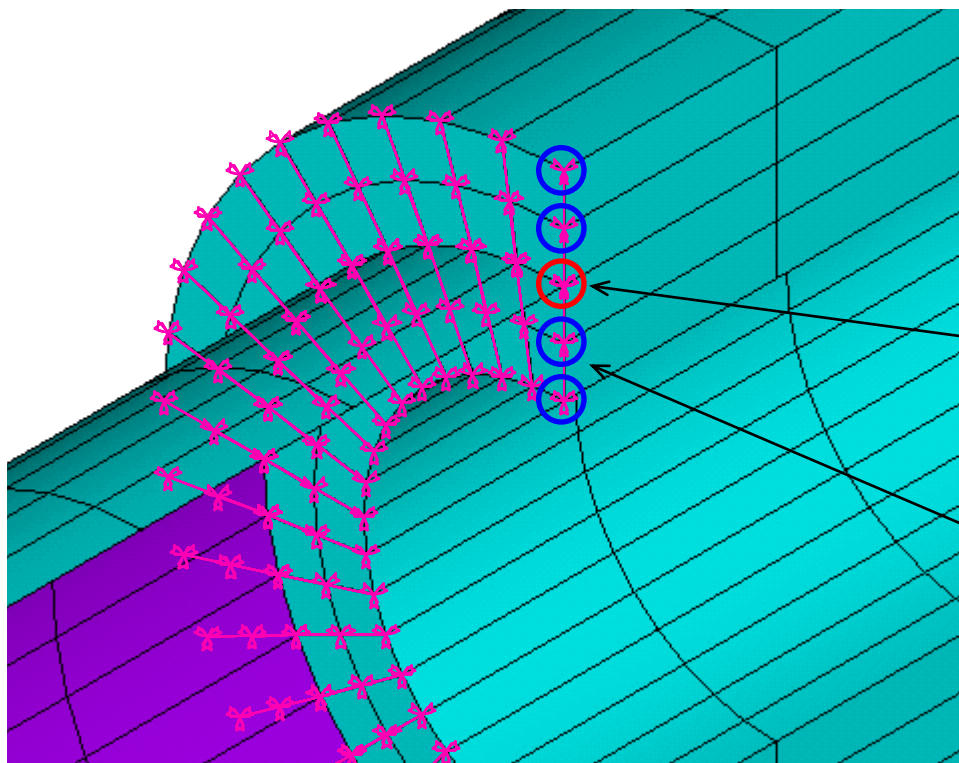
Effetto del trasferimento dello spostamento dei nodi Shell sui nodi Solid (singolarità delle tensioni su Solid, carico di linea, ma non singolarità dello Shell)



File di comandi: CombinazioneTipiElementi_TraveIncastrata.txt

Compatibilità tra elementi

Vincoli relativi CP sostituiti da vincoli CERIG



Nodo **MASTER**
appartenente
all'elemento SHELL

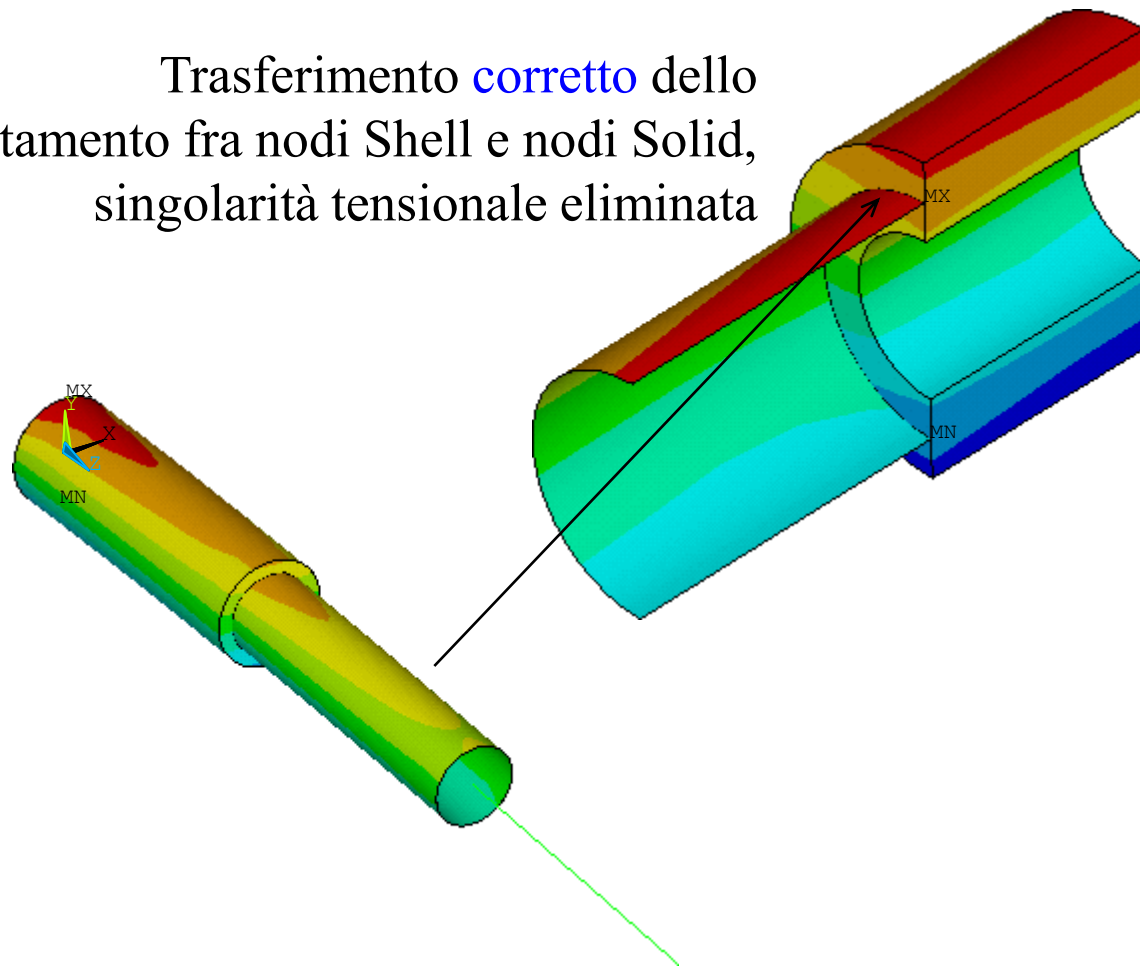
Nodi **SLAVE**
appartenenti agli
elementi SOLID

File di comandi: CombinazioneTipiElementi_TraveIncastrata.txt

Compatibilità tra elementi

Vincoli relativi CP sostituiti da vincoli CERIG

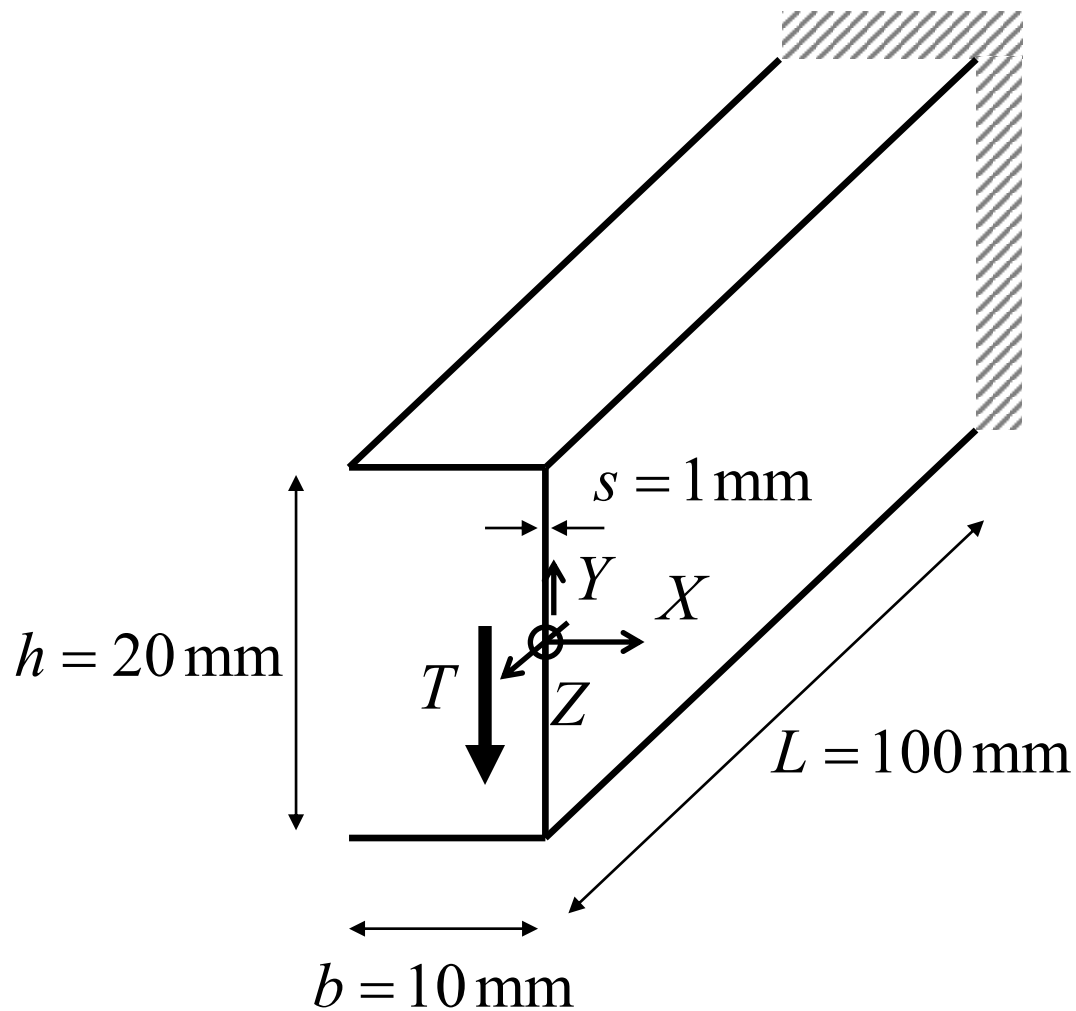
Trasferimento **corretto** dello spostamento fra nodi Shell e nodi Solid, singolarità tensionale eliminata



File di comandi: CombinazioneTipiElementi_TraveIncastrata.txt

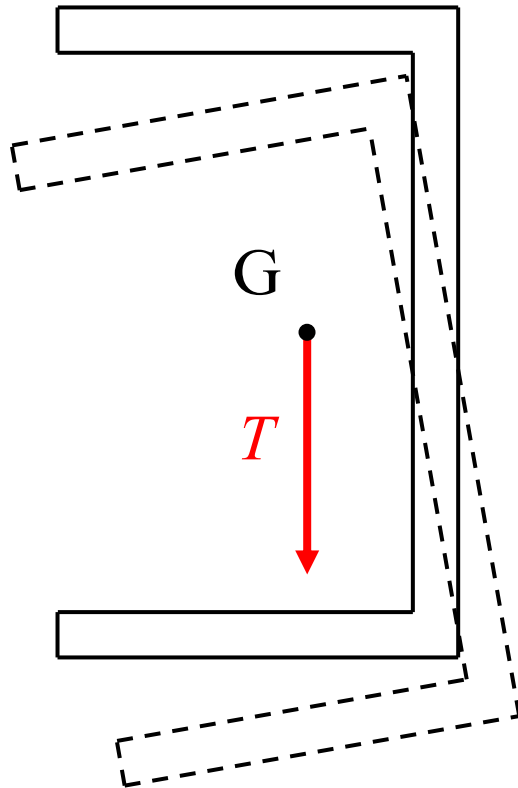
Esercitazione da svolgere:

Trave a C, determinazione del centro di taglio

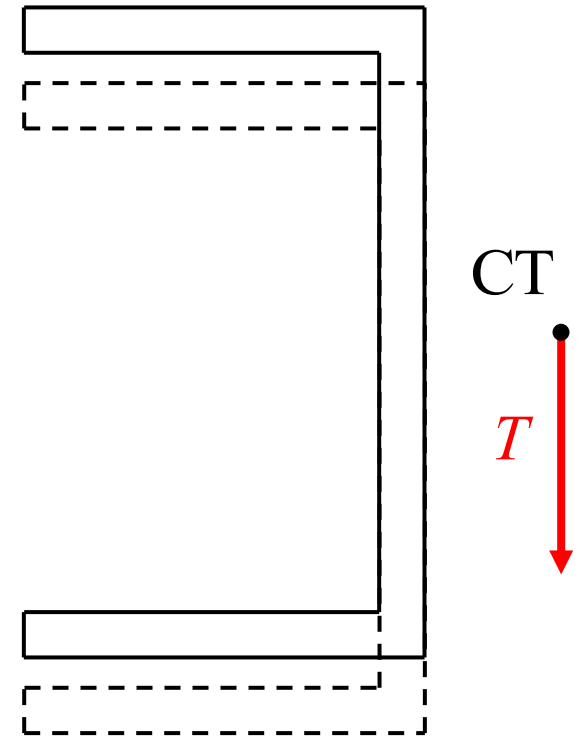


Esercitazione da svolgere:

Trave a C, determinazione del centro di taglio



Carico sul baricentro, momento torcente nullo, ma rotazione della sezione



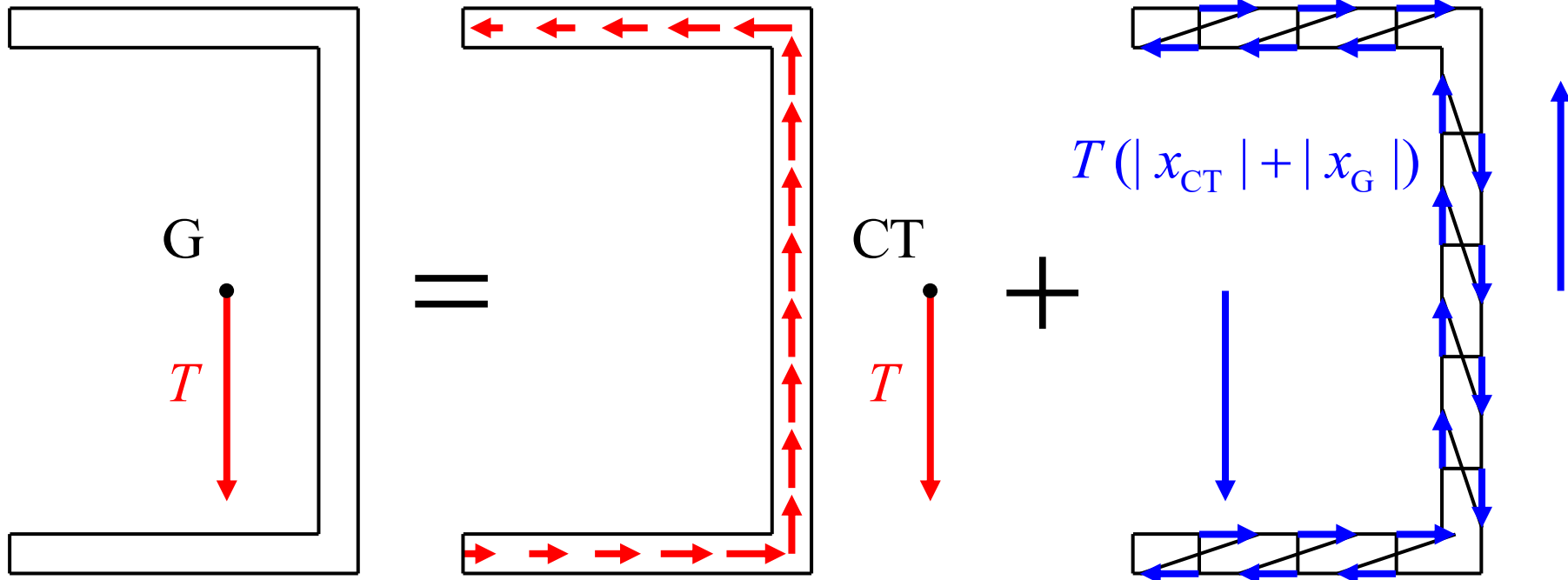
Carico sul centro di taglio, momento torcente, ma rotazione della sezione nulla

Esercitazione da svolgere:

Trave a C, determinazione del centro di taglio

Componente deformativa solo
flessionale, compatibile con Jourawski

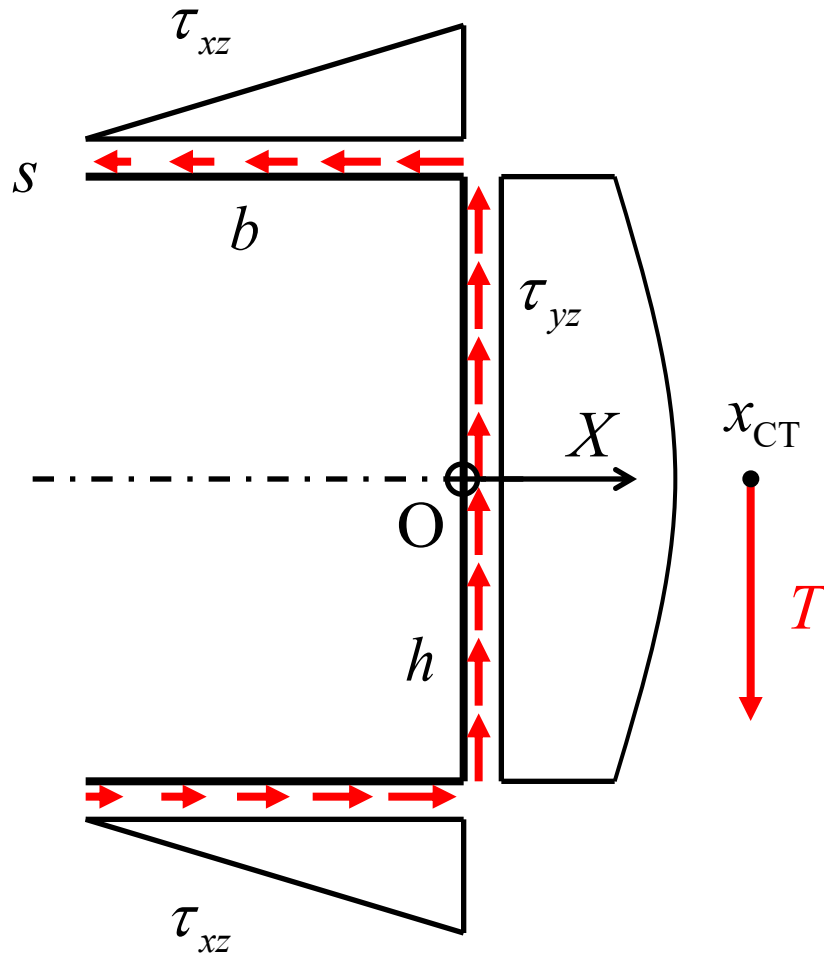
Componente deformativa
solo torsionale



Sovrapposizione degli effetti, nel caso in cui il carico T sia applicato in un punto diverso dal Centro di Taglio, ad esempio nel Baricentro

Esercitazione da svolgere:

Trave a C, determinazione del centro di taglio



$$J_x = \frac{1}{12} s h^3 + \frac{1}{2} s b h^2$$

$$S_x^{(\tau \max)} = b s \frac{h}{2}$$

$$\tau_{yz}^{(\max)} = \frac{T S_x^{(\tau \max)}}{J_x s}$$

$$M_t = \frac{1}{2} \tau_{xz}^{(\max)} s b h$$

$$x_{CT} = \frac{M_t}{T} = \frac{3b^2}{h + 6b}$$

Calcolo con Jourawski della posizione del centro di taglio: si assume solo la componente di taglio delle tensioni e si calcola il momento

Esercitazione da svolgere: Trave a C, determinazione del centro di taglio

Elemento trave solo
per “attivare” il nodo
Master

/eshape,1

Regione rigida:
CERIG

Nodo Master

Anti-simmetria
(piano $X-Z$)

**Come determinare la posizione
del centro di taglio con analisi EF,
senza Jourawski?**



Valutazione dell'errore

Il metodo EF fornisce sempre soluzioni **approssimate**

Se le f.ni di forma rispettano le condizioni descritte e non ci sono cause di singolarità, il metodo risulta **convergente** alla soluzione esatta, all'aumentare del numero di g.d.l.

Tuttavia Risulta di particolare interesse:

- analizzare la **velocità di convergenza**
- fornire **stime “a posteriori”** dell'errore associato ad un determinato risultato del modello
- stabilire come **modificare un modello per ridurre l'errore** entro limiti prestabiliti

Valutazione dell'errore

Definizioni:

Errore nodale di spostamento: $e_U^n = (u^n - \hat{u}^n)$

Errore nodale di tensione: $e_\sigma^n = (\sigma^n - \hat{\sigma}^n)$

Valori nodali esatti
(non noti)

Energia di elem. associata all'errore:

- per l'elemento i (**ETABLE**, *Lab*, **SERR**) $e_i = \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\sigma^i\}^T \{\Delta\varepsilon^i\} dV =$ *vedi dopo...*

valore stimato dal software

$$= \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\sigma^i\}^T D^{-1} \{\Delta\sigma^i\} dV$$

in cui: $\Delta\sigma^i \approx e_\sigma^n$

- totale sul modello (***GET**, *Par*, **PRERR**, 0, **SERSM**)

valore stimato dal software

$$e = \sum_i e_i$$

Norma dell'errore percentuale associato all'energia dell'errore
(*Structural percent error in energy norm*):

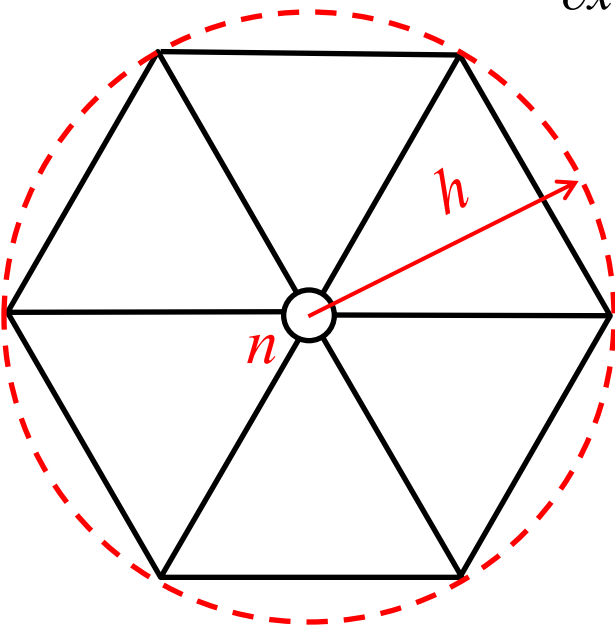
(***GET**, *Par*, **PRERR**, 0, **SEPC**)

$$E = \sqrt{\frac{e}{U + e}} \times 100\% \quad U \text{ è l'energia elastica dell'intero modello}$$

Valutazione dell'errore

Le funzioni di forma forniscono una rappresentazione polinomiale della funzione di spostamento nelle vicinanze di un nodo, simile a quella ottenibile attraverso una serie di Taylor:

$$\begin{aligned}
 u = u(x_n, y_n) &+ \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_n) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_n) + \\
 &+ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - x_n)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y - y_n)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x - x_n)(y - y_n) + \\
 &+ \text{altri termini di ordine superiore...}
 \end{aligned}$$



Il dominio di validità di tale sviluppo corrisponde alle dimensioni “ h ” degli elementi, pertanto:

$$\max(x - x_n, y - y_n) \approx h$$



Valutazione dell'errore

L'errore connesso con tale approssimazione sarà un infinitesimo *al più* dello stesso ordine del primo termine non incluso nello sviluppo, vale a dire:

p = grado polinomiale utilizzato per lo sviluppo = grado delle funzioni di forma

$e_U^n = O(h^{p+1})$ "O – grande": infinitesimo dello stesso ordine di (.)

Due infinitesimi si dicono

dello stesso ordine se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

e se il limite del loro rapporto esiste

ed è finito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{costante} \neq 0$$

In tal caso si può scrivere:

$$f(x) = O(g(x))$$

oppure anche in modo analogo:

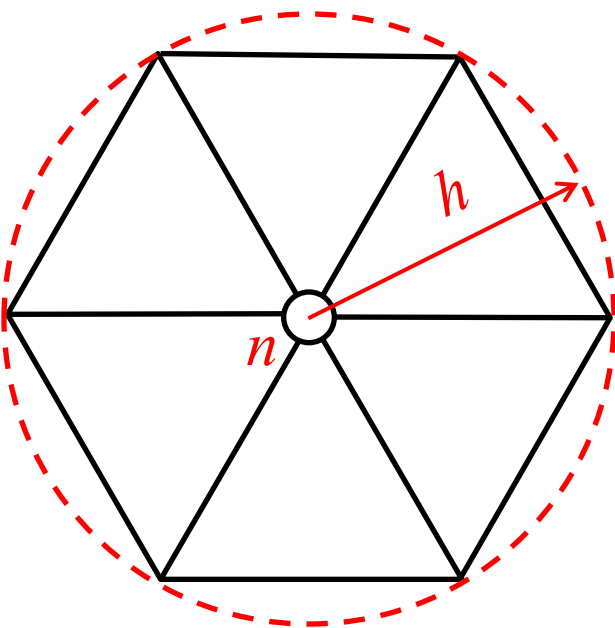
$$g(x) = O(f(x))$$

Valutazione dell'errore

L'errore connesso con tale approssimazione sarà un infinitesimo *al più* dello stesso ordine del primo termine non incluso nello sviluppo, vale a dire:

p = grado polinomiale utilizzato per lo sviluppo = grado delle funzioni di forma

$e_U^n = O(h^{p+1})$ "O – grande": infinitesimo dello stesso ordine di (.)



Essendo le tensioni proporzionali alle derivate m -esime degli spostamenti, l'errore sulle tensioni risulta:

$$e_\sigma^n = O(h^{p+1-m})$$

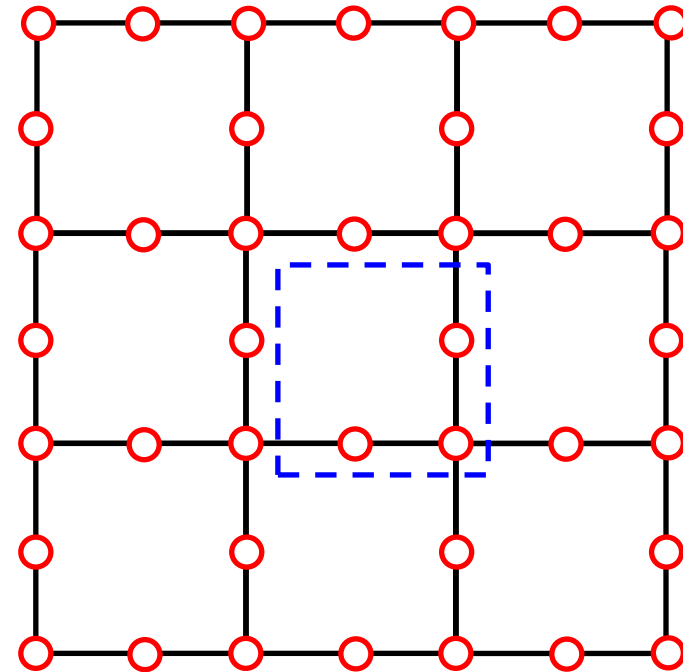
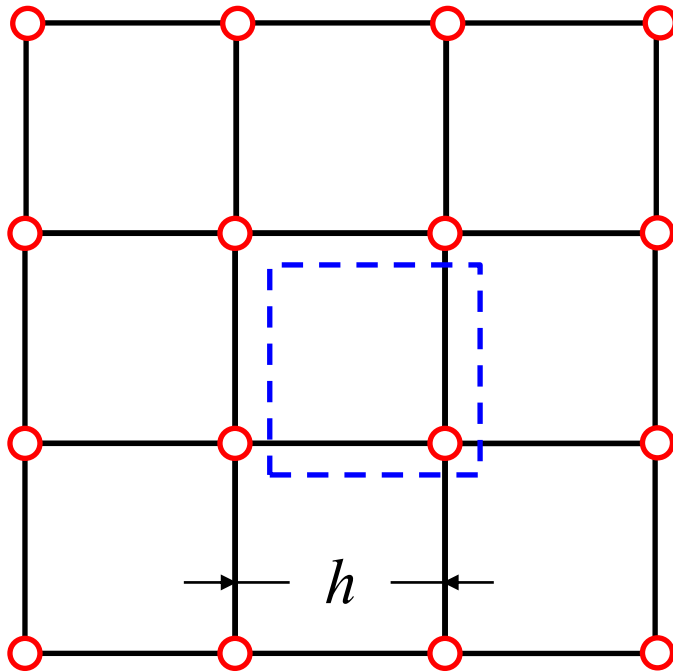
L'energia (elastica) è legata al quadrato delle tensioni e quindi l'energia associata all'errore è:

$$e_i = O(h^{2(p+1-m)})$$

Infine, la norma percentuale dell'energia associata all'errore è: $E = O(h^{p+1-m})$ (dello stesso ordine dell'errore delle tensioni)

Relazione fra dimensione di elemento e numero di g.d.l

Esempio con elementi piani, analogo per elementi solidi 3D



Considerando una cella sfalsata della stessa dimensione dell'elemento è evidente che, escluso i bordi, ad ogni elemento (senza nodi *midside*) corrisponde 1 nodo, e 3 nodi per elementi con nodi centrali.

Mentre in 3D, di nuovo 1 nodo per elemento senza nodi centrali, e 4 con i nodi centrali.

Ad ogni modo vale sempre una relazione di proporzionalità fra elementi e nodi, a cui si aggiunge una relazione ulteriore di proporzionalità fra nodi e gradi di liberta:

$$2D: n_{\text{gdl}} \propto \frac{1}{h^2} \rightarrow h \propto n_{\text{gdl}}^{-1/2}$$

$$3D: n_{\text{gdl}} \propto \frac{1}{h^3} \rightarrow h \propto n_{\text{gdl}}^{-1/3}$$

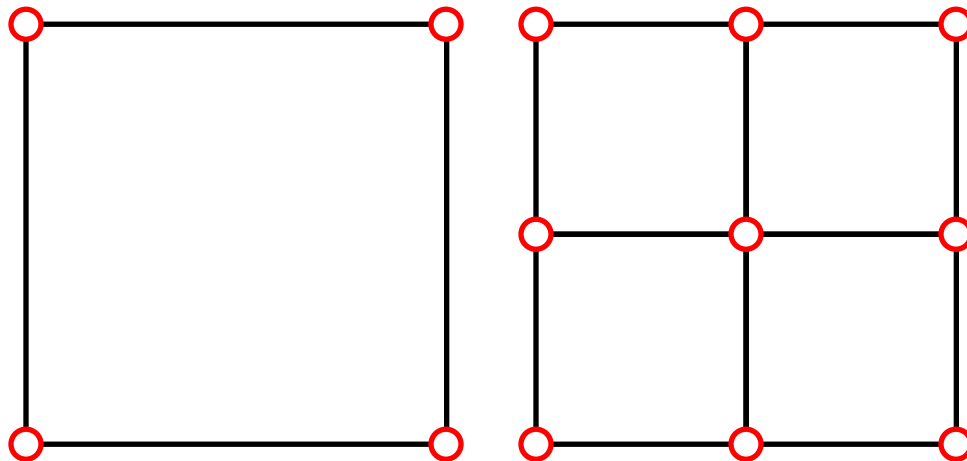
Velocità di convergenza

Problema piano
Elementi lineari: $p = 1$

$$e_U^n = O(h^2)$$

$$e_\sigma^n = O(h^1)$$

Dato che: $n_{\text{gdl}} \propto h^{-2} \rightarrow h \propto n_{\text{gdl}}^{-1/2}$



Segue che:

$$e_U^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1}$$

$$e_\sigma^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1/2}$$

Es.: aumentando di un fattore 10 il numero di g.d.l. l'errore su U si riduce di 10 mentre quello sulle tensioni di $10^{1/2} = 3.16$

Velocità di convergenza

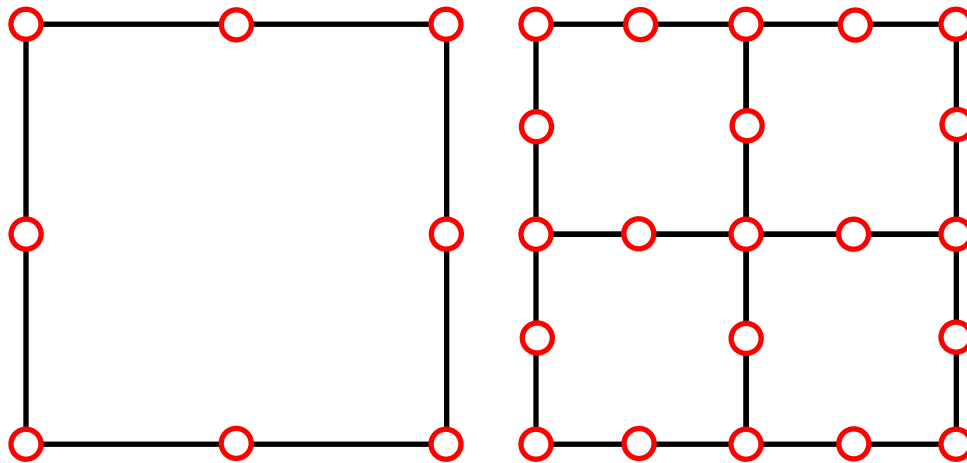
Problema piano

Elementi quadratici: $p = 2$

$$e_U^n = O(h^3)$$

$$e_\sigma^n = O(h^2)$$

Dato che: $n_{\text{gdl}} \propto h^{-2} \rightarrow h \propto n_{\text{gdl}}^{-1/2}$



Segue che:

$$e_U^n \propto n_{\text{gdl}}^{-3/2}$$

$$e_\sigma^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1}$$

Es.: aumentando di un fattore 10 il numero di g.d.l. l'errore su U si riduce di $10^{3/2} = 31.6$ mentre quello sulle tensioni di 10

Velocità di convergenza

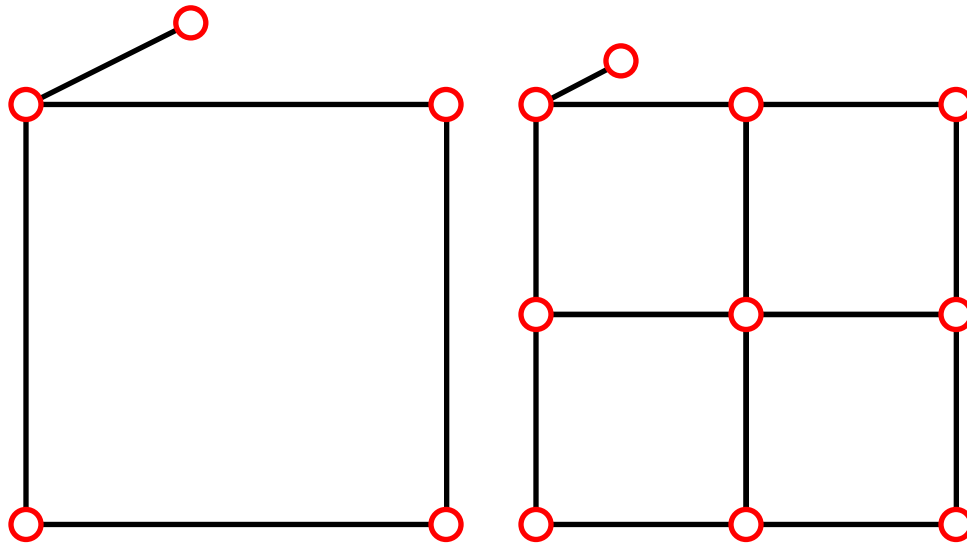
Problema 3D

Elementi lineari: $p = 1$

$$e_U^n = O(h^2)$$

$$e_\sigma^n = O(h^1)$$

Dato che: $n_{\text{gdl}} \propto h^{-3} \rightarrow h \propto n_{\text{gdl}}^{-1/3}$



Segue che:

$$e_U^n \propto n_{\text{gdl}}^{-2/3}$$

$$e_\sigma^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1/3}$$

Es.: aumentando di un fattore 10 il numero di g.d.l. l'errore su U si riduce di $10^{2/3} = 4.64$ mentre quello sulle tensioni di $10^{1/3} = 2.15$
in 2D, per confronto, rispettivamente 10 e 3.16

Velocità di convergenza

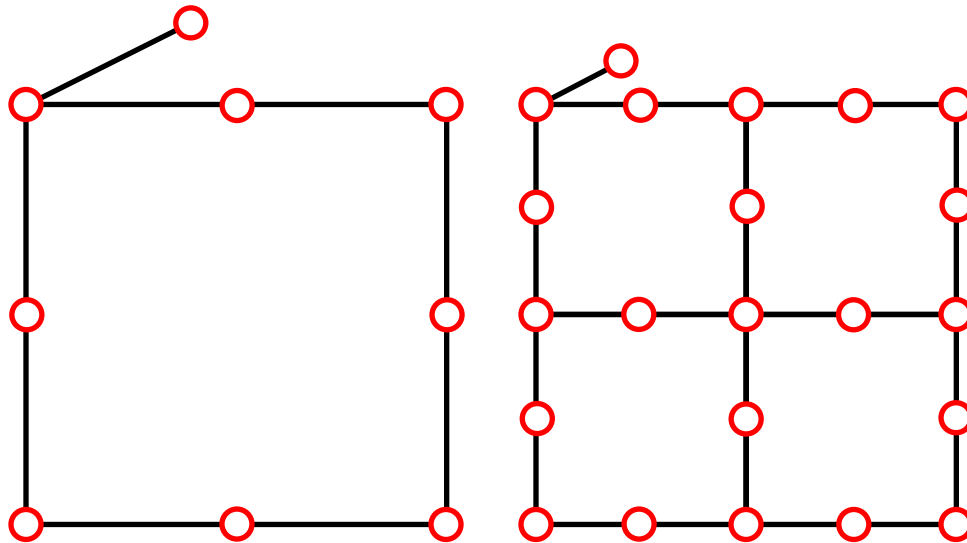
Problema 3D

Elementi quadratici: $p = 2$

$$e_U^n = O(h^3)$$

$$e_\sigma^n = O(h^2)$$

Dato che: $n_{\text{gdl}} \propto h^{-3} \rightarrow h \propto n_{\text{gdl}}^{-1/3}$



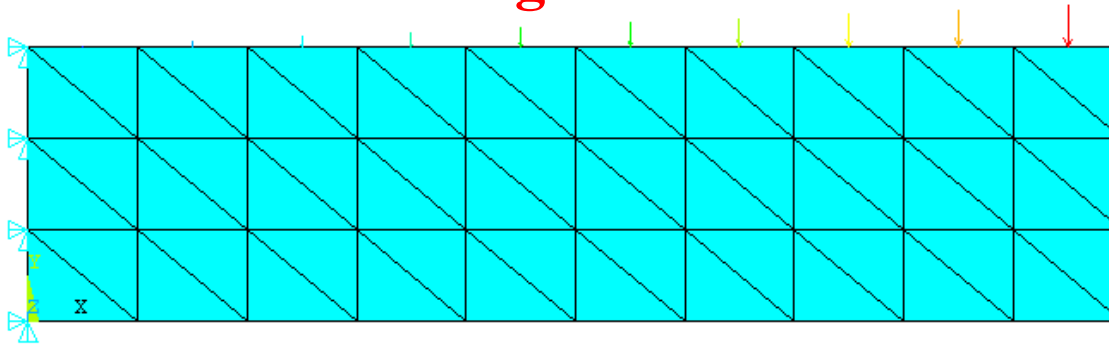
Segue che:

$$e_U^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1}$$

$$e_\sigma^n \propto n_{\text{gdl}}^{-2/3}$$

Es.: aumentando di un fattore 10 il numero di g.d.l. l'errore su U si riduce di 10 mentre quello sulle tensioni di $10^{2/3} = 4.64$
in 2D, per confronto, rispettivamente 31.6 e 10

Velocità di convergenza

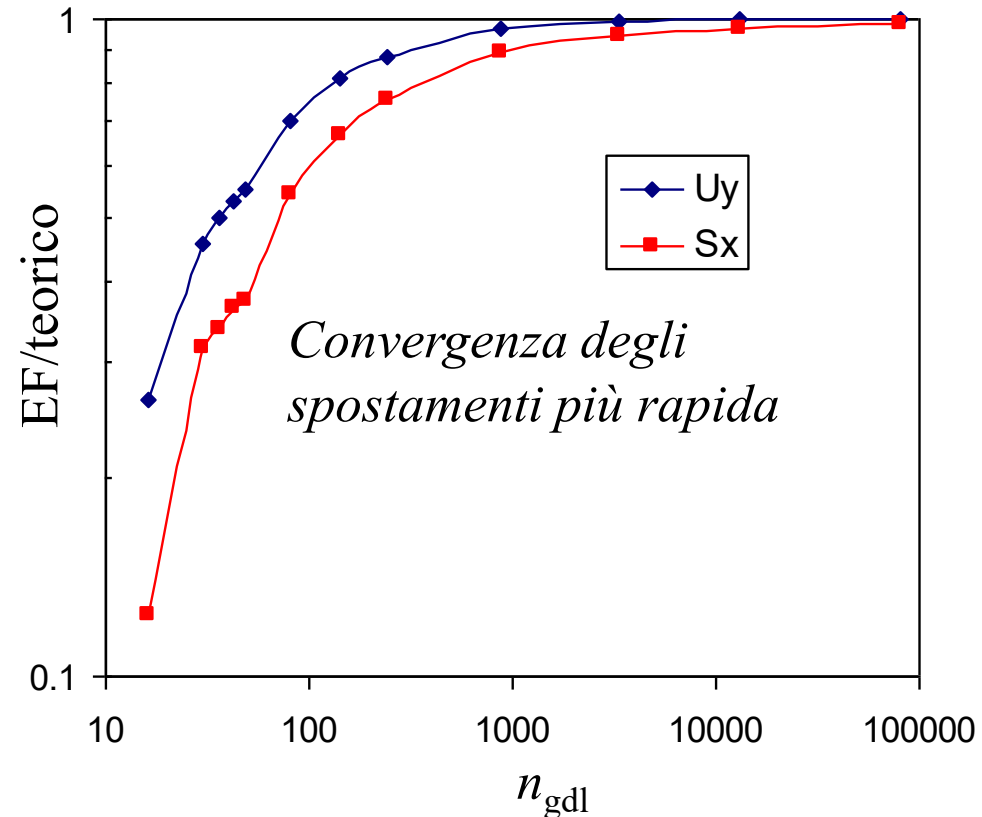


Studio di convergenza

Es.: f.ni di forma grado 1
e problema piano:

$$e_U^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1}$$

$$e_\sigma^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1/2}$$



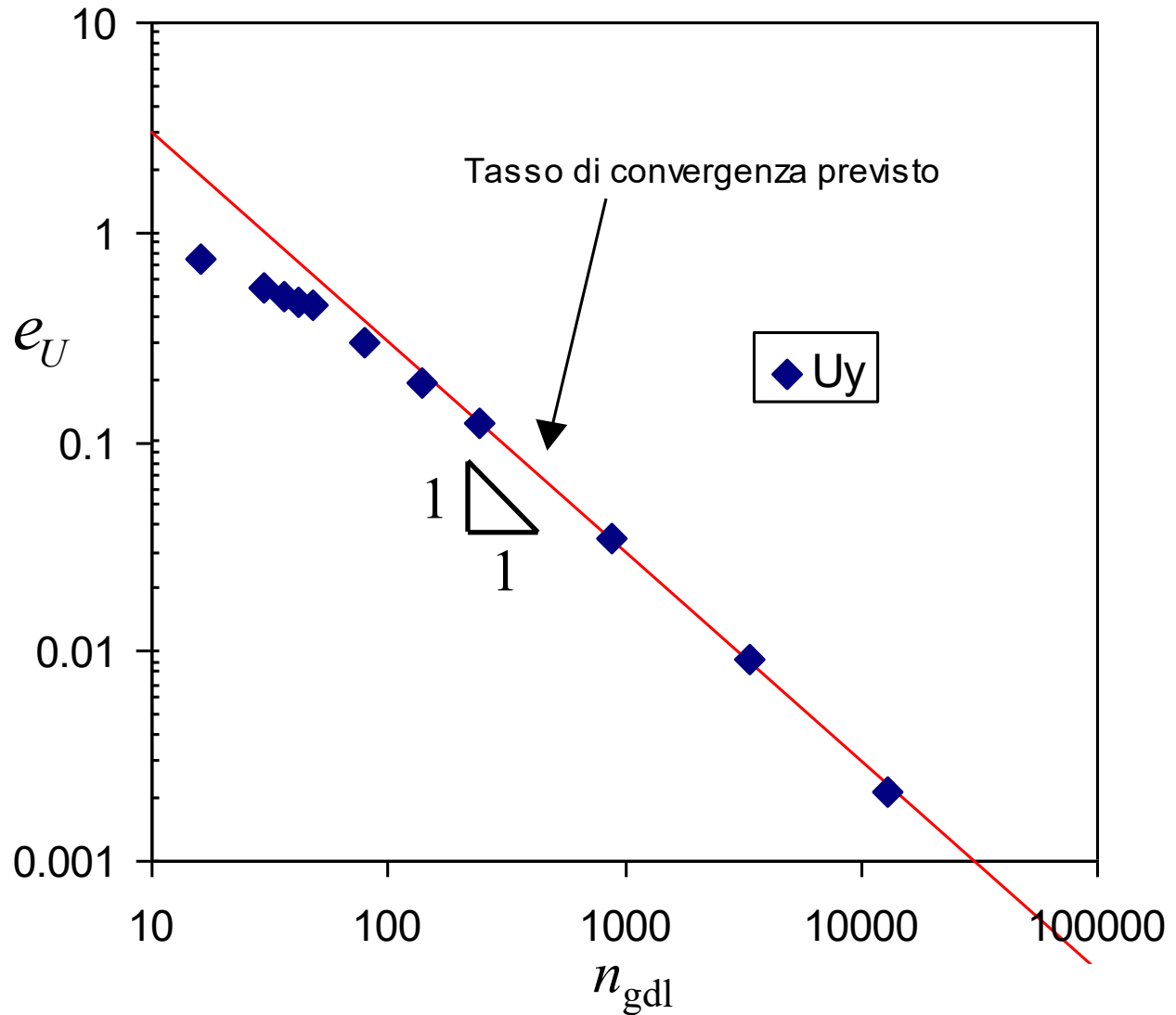


Velocità di convergenza

Errore sugli spostamenti

$$e_U^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1}$$

$$e_\sigma^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1/2}$$



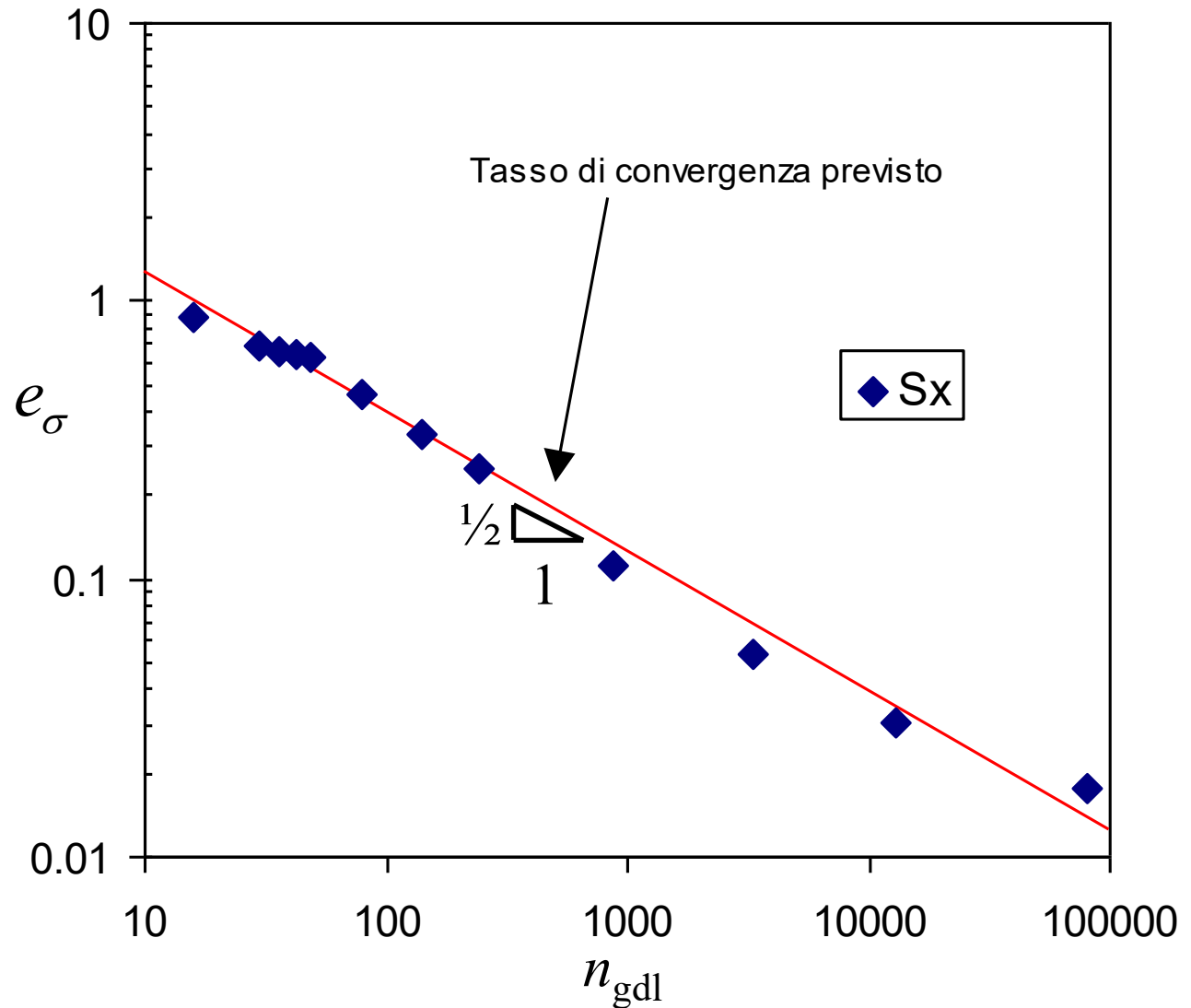


Velocità di convergenza

Errore sulle tensioni

$$e_U^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1}$$

$$e_\sigma^n \propto n_{\text{gdl}}^{-1/2}$$





Stima “a posteriori” errore tensioni

Ovviamente non è possibile una valutazione esatta dell'errore, *banalmente se fosse noto l'errore sarebbe noto anche il valore esatto.*

Tuttavia è sicuramente utile avere una **maggiorazione** (o più in generale una stima) e la distribuzione di tale errore nel modello, in modo da guidare il suo eventuale **affinamento**.

Come stimare l'errore, in particolare in Ansys?

Quali strategie utilizzare per ottimizzare il modello?

Stima “a posteriori” errore tensioni

Ogni elemento collegato ad un nodo fornisce una diversa stima di tensione

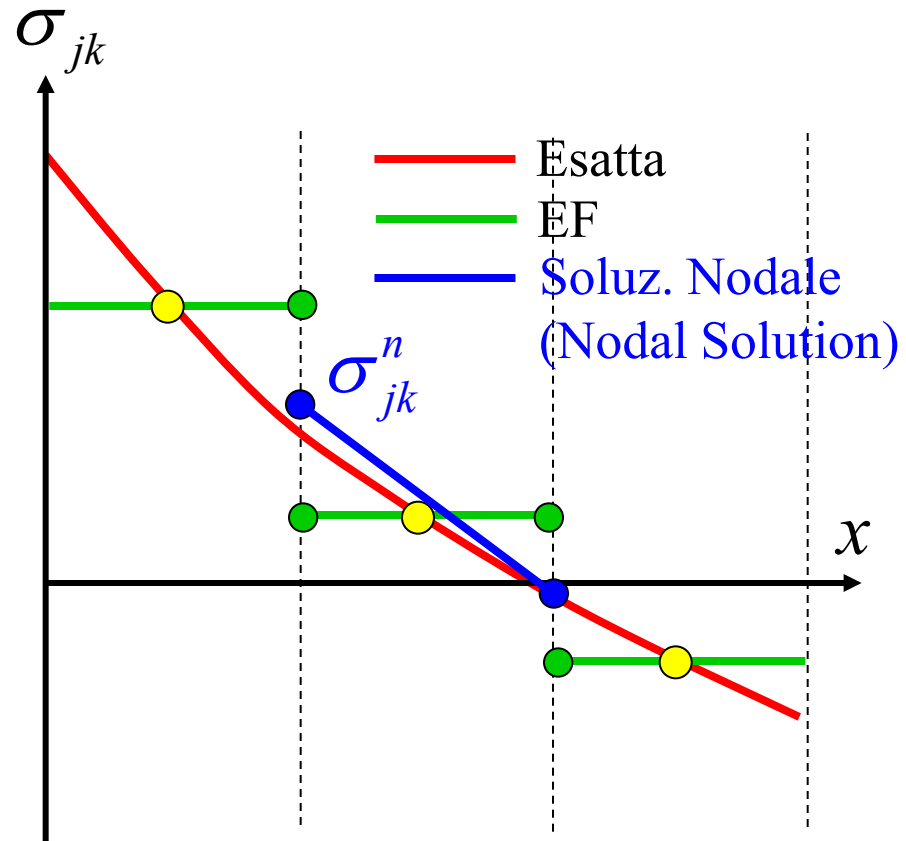
Si assume quindi un valore mediato per la generica componente di tensione nel nodo:

Componente generica xx, yy, xy , etc. stimata al nodo n

$$\sigma_{jk}^n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{jk}^{n,i}$$

Num. di elementi che convergono al nodo n

Comp. generica calcolata nel nodo n dall'elemento i



Stima “a posteriori” errore tensioni

Assumendo che tale valore mediato sia accurato, si può porre:

$$\Delta\sigma_{jk}^{n,i} = \left(\sigma_{jk}^{n,i} - \sigma_{jk}^n \right) \approx \left(\sigma_{jk}^{n,i} - \hat{\sigma}_{jk}^n \right)$$

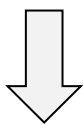
↑
 Incertezza sulla generica
 componente della tensione
 dall'elemento i sul nodo n

↑
 Valore mediato
 (noto)

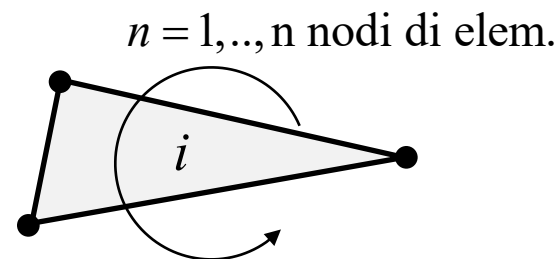
↑
 Valore esatto
 (non noto)

Si usa questo parametro di incertezza per la stima dell'errore sull'elemento i :

$$\Delta\sigma^i = \max \left\{ \left| \Delta\sigma_{jk}^{n,i} \right|; \text{al variare di: } n = 1, \dots, n \text{ nodi di elem.; } jk \text{ comp.} \right\}$$



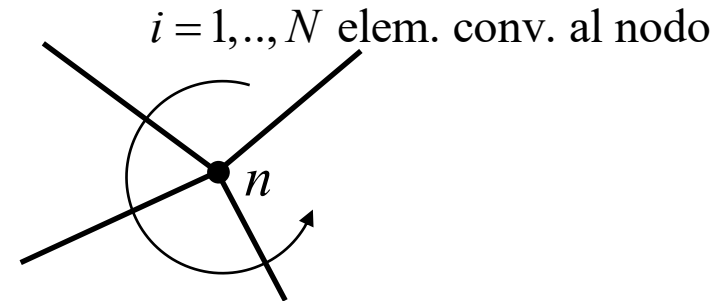
Parametro SDSG del comando PLESOL
 (absolute value of maximum variation of any nodal stress component)



Stima “a posteriori” errore tensioni

Si stima quindi l'errore medio del nodo, come media quadratica tra tutti gli elementi che convergono al generico nodo n :

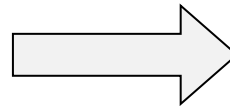
$$\Delta\sigma^n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta\sigma^i)^2}{N}}$$

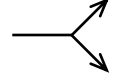


Infine, i **limiti (boundaries)** massimo e minimo di tensione su ogni nodo sono dati da:

$$\sigma_{jk}^{\max,n} = \sigma_{jk}^n + \Delta\sigma^n$$

$$\sigma_{jk}^{\min,n} = \sigma_{jk}^n - \Delta\sigma^n$$



in Ansys  SMXB
SMNB

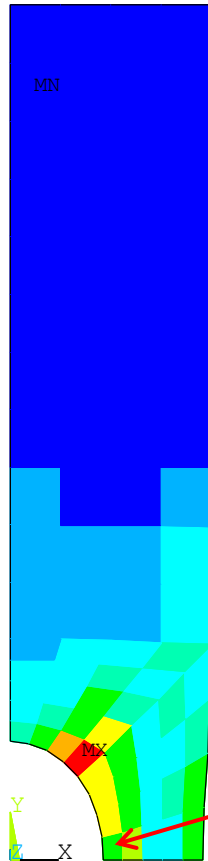
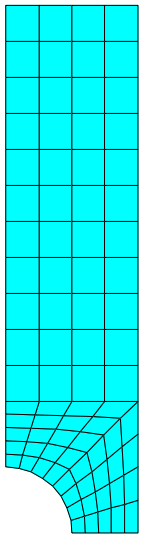
I valori estremi nel modello:
max/min stress bounds,
possono essere visualizzati
con il comando:
`/GRAPHICS,FULL`

Stima “a posteriori” errore tensioni

$$\text{SDSG: } \Delta\sigma^i = \max \left\{ \left| \Delta\sigma_{jk}^{n,i} \right| \right\}$$

SMXB, SMNB

Mesh

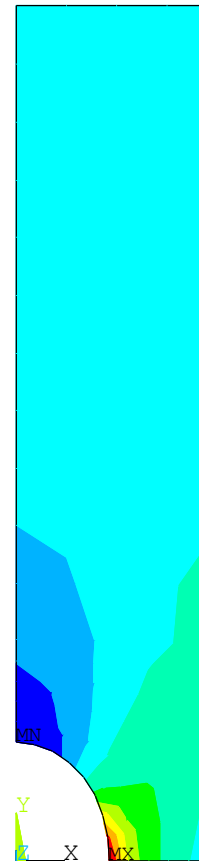


```
ANSYS 2021 R2
Build 21.2
ELEMENT SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SDSG
DMX =.005827
SMN =.004432
SMX =5.55142
```

```
ZV =1
*DIST=59.1637
XF =12.3837
YF =52.495
Z-BUFFER
.004432
.620764
1.2371
1.85343
2.46976 ←
3.08609
3.70242
4.31875
4.93509
5.55142
```

PLESOL,SDSG,,0,1.0

Proprietà di *elemento*



```
ANSYS 2021 R2
Build 21.2
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SY (AVG)
RSYS=0
DMX =.005827
SMN =-1.70883
SMNB=-4.11658
SMX =41.7176 ←
SMXB=44.3369 ←
```

$\Delta\sigma^n = 2.62 \text{ MPa}$

```
ZV =1
*DIST=59.1637
XF =12.3837
YF =52.495
Z-BUFFER
-1.70883
3.11632
7.94148
12.7666
17.5918
22.4169
27.2421
32.0673
36.8924
41.7176
```

PLNSOL,S,Y Prop. di *nodo*

/GRAPHICS,FULL



Ottimizzazione del modello

È possibile utilizzare gli stimatori di errore per affinare il modello, migliorando la *mesh* al fine di ridurre l'errore stesso.

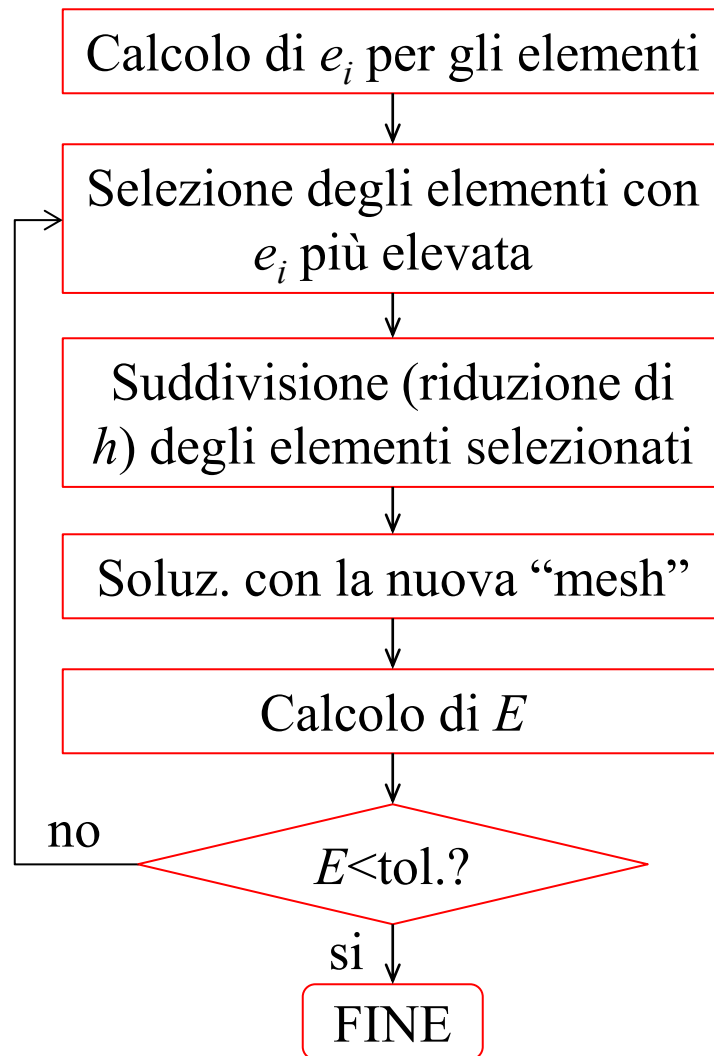
Esiste una procedura automatica (*mesh adaptivity*) per ottenere la *mesh* che si “adatta” automaticamente al livello di errore voluto.

Questa procedura è indicata come (“*h-convergence*”) ed era eseguita in ambiente APDL con il comando ADAPT, che però non più supportato.

Tuttavia, in ambiente Workbench è possibile eseguire l'analisi di convergenza ed ottenere automaticamente un infittimento della *mesh* nelle zone in cui è maggiore l'energia associata all'errore.

Ottimizzazione del modello

Il processo di “*h*-convergence” si svolge in maniera iterativa

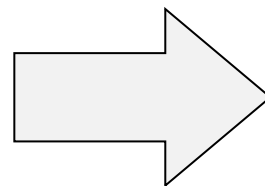
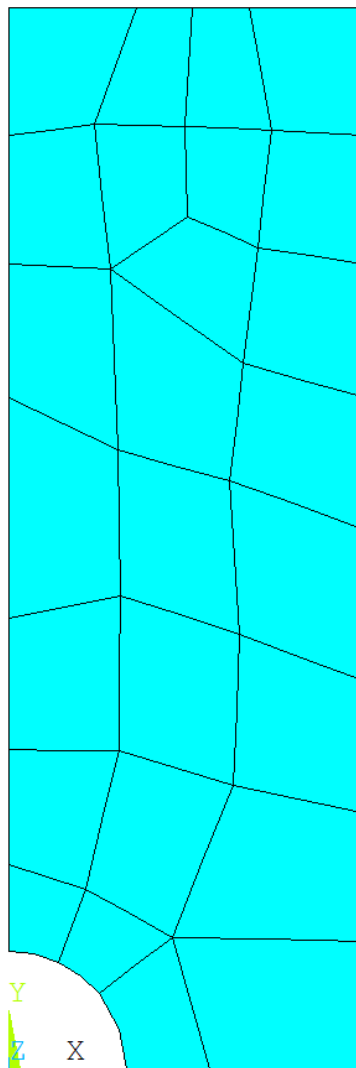


$$e_i = \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\sigma^i\}^T D^{-1} \{\Delta\sigma^i\} dV$$

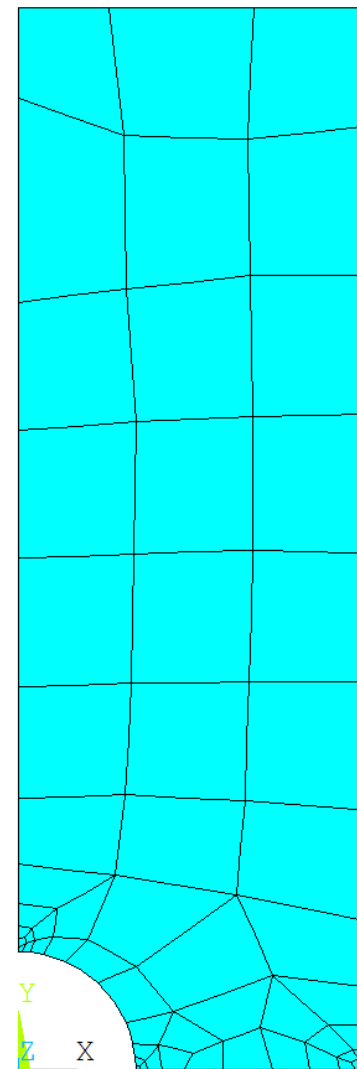
$$e = \sum_i e_i \quad E = \sqrt{\frac{e}{U + e}} \times 100$$

Ottimizzazione del modello - “*h*-convergence” con ADAPT

Iniziale



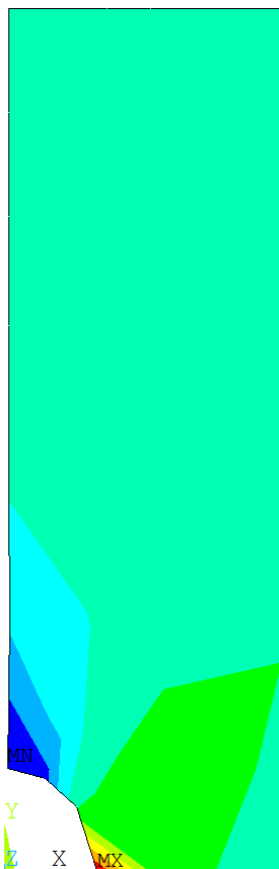
Finale



Ottimizzazione del modello - “*h-convergence*” con ADAPT

Tensioni

Iniziale

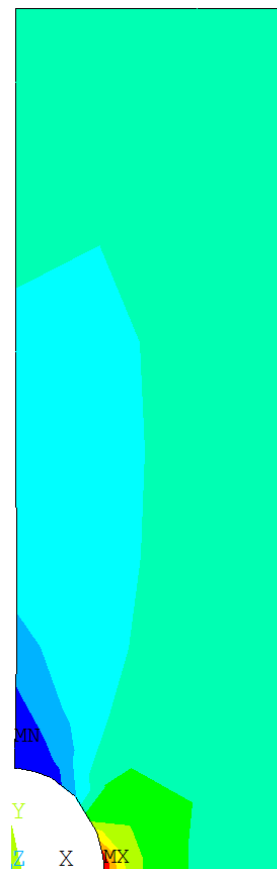


```

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SY      (AVG)
RSYS=0
DMX =.046907
SMN =-11.689
SMNP=-17.488
SMX =293.827
SMXB=307.817

ZV =1
DIST=51.969
XF =15.136
YF =47.245
Z-BUFFER
-11.689
22.257
56.204
90.15
124.096
158.042
191.988
225.934
259.88
293.827
    
```

Finale



```

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SY      (AVG)
RSYS=0
DMX =.046914
SMN =-4.487
SMNP=-11.978
SMX =307.215
SMXB=309.61

ZV =1
DIST=51.97
XF =15.133
YF =47.245
Z-BUFFER
-4.487
30.146
64.78
99.413
134.047
168.681
203.314
237.948
272.581
307.215
    
```

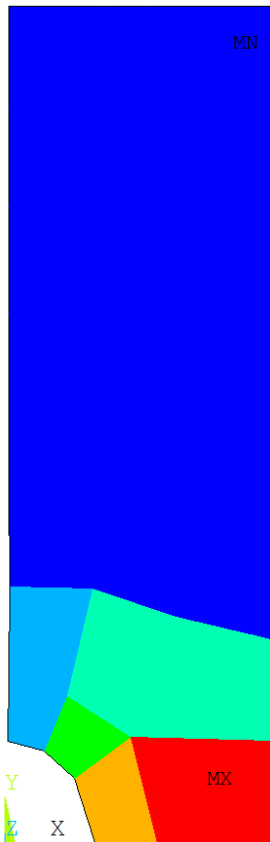
Diverso carico rispetto all'analisi precedente

Ottimizzazione del modello - “*h*-convergence” con ADAPT

Energia legata all'errore negli elementi (SERR)

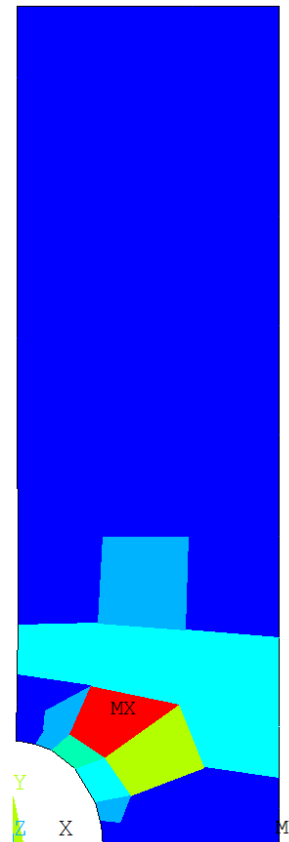
$$e_i = \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\sigma_i\}^T D^{-1} \{\Delta\sigma_i\} dV$$

Iniziale



ELEMENT SOLUTION	
STEP=1	
SUB =1	
TIME=1	
SERR	
DMX =.046907	
SMN =.989E-07	
SMX =.04136	
ZV =1	
DIST=51.969	
XF =15.136	
YF =47.245	
Z-BUFFER	
	.989E-07
	.004596
	.009191
	.013787
	.018382
	.022978
	.027573
	.032169
	.036764
	.04136

Finale



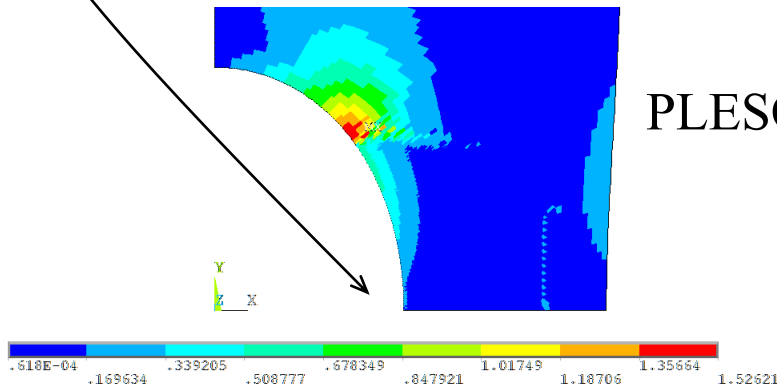
ELEMENT SOLUTION	
STEP=1	
SUB =1	
TIME=1	
SERR	
DMX =.046914	
SMN =.300E-07	
SMX =.006164	
ZV =1	
DIST=51.97	
XF =15.133	
YF =47.245	
Z-BUFFER	
	.300E-07
	.685E-03
	.00137
	.002055
	.00274
	.003424
	.004109
	.004794
	.005479
	.006164

Ottimizzazione del modello

Alternativamente, si può fare di fatto una h -convergence, sfruttando i comandi di **infittimento** locale, e parametrizzando tale procedura (approccio consigliato)

L'affinamento degli elementi è da concentrare nelle zone di maggiore variabilità della soluzione, e solo quelle di **interesse**

Un procedimento automatico può concentrarsi (in modo non efficiente) su zone dove la qualità della soluzione può essere trascurata, ad esempio singolarità lontane dalla zona di interesse



Infittimento locale controllato (NREFINE)

