



Corso di  
**Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale (MCAS)**  
**CLM Ing. Meccanica/Veicoli**

**Parte I**

Introduzione alla teoria del metodo agli Elementi Finti per  
l'analisi strutturale

**Docente:** Prof. Ciro Santus

Dip. di Ingegneria Civile e Industriale (DICI), primo piano

Tel.: 050-2218007

email: [ciro.santus@unipi.it](mailto:ciro.santus@unipi.it)

homepage: <http://people.unipi.it/static/ciro.santus/Didattica.html>

## CdL Magistrale Meccanica/Veicoli

**Corso per Ing. Meccanica**

**Codice esame: 1114I – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale**

**6 CFU, mutuato da:**

**Corso per Ing. dei Veicoli**

**Codice esame: 1111I – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale e la Simulazione Dinamica, in due moduli:**

**6 CFU – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale**

**6 CFU – Metodi Computazionali per l'Analisi Dinamica (Frendo)**

*Per Veicoli, registrazione unica da 12 CFU, media fra i voti dei due moduli, registrazione eseguita da Santus o da Frendo a seconda di quale modulo viene sostenuto per secondo*

**Questionario separato per i due moduli su Valutami:**

**<https://esami.unipi.it/>**

Periodo <sup>(1)</sup>	Codice	CFU	Nome	Cds	Moduli	Docenti
A1	1111I	12.00	METODI COMPUTAZIONALI PER L'ANALISI STRUTTURALE E LA SIMULAZIONE DINAMICA Per mutazione, valido anche per 1114I METODI COMPUTAZIONALI PER L'ANALISI STRUTTURALE	WVT-LM INGEGNERIA DEI VEICOLI	METODI COMPUTAZIONALI PER L'ANALISI STRUTTURALE METODI COMPUTAZIONALI PER L'ANALISI DINAMICA	CIRO SANTUS FRANCESCO FRENDI

## CdL Magistrale Meccanica/Veicoli

**Corso per Ing. Meccanica**

**Codice esame: 1114I – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale**

**6 CFU, mutuato da:**

**Corso per Ing. dei Veicoli**

**Codice esame: 1111I – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale e la Simulazione Dinamica, in due moduli:**

**6 CFU – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale**

**6 CFU – Metodi Computazionali per l'Analisi Dinamica (Frendo)**

**Iscrizione all'esame:**

L'appello scritto di MCAS non sarà presente fra i vari esami della sessione, sul sito [esami.unipi.it](http://esami.unipi.it), nonostante comparirà a calendario. Sarà necessario andare su “Prove in itinere” per iscriversi, questo per evitare la compilazione del **questionario** dell'altro modulo qualora non sia richiesto.

La prova in itinere non impone la compilazione del questionario. Tuttavia, è necessario inviare (per email) la ricevuta dell'avvenuta compilazione del questionario stesso, scaricabile in pdf. La prova in itinere non sarà presente per l'appello di Settembre, per cui sarà sufficiente un'email.

Infine, è poi necessario inviare le Slides del progettino prima dell'orale.



## CdL Magistrale Meccanica/Veicoli

**Corso per Ing. Meccanica**

**Codice esame: 1114I – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale**

**6 CFU, mutuato da:**

**Corso per Ing. dei Veicoli**

**Codice esame: 1111I – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale e la Simulazione Dinamica, in due moduli:**

**6 CFU – Metodi Computazionali per l'Analisi Strutturale**

**6 CFU – Metodi Computazionali per l'Analisi Dinamica (Frendo)**

**Esempio ricevuta:**



**Sistema centralizzato di iscrizione agli esami**  
Conferma compilazione questionario

**UNIVERSITÀ DI PISA**

Si attesta che il sig./la sig.ra [redacted] matr. [redacted] ha compilato il questionario di valutazione del modulo di METODI COMPUTAZIONALI PER L'ANALISI STRUTTURALE del prof. CIRO SANTUS relativo all'insegnamento di METODI COMPUTAZIONALI PER L'ANALISI STRUTTURALE E LA SIMULAZIONE DINAMICA per l'A.A. 2022/23.

Pisa, 07-01-2024



## Contenuti del corso

### Lezioni

- Basi teoriche del Metodo agli Elementi Finiti (MEF) - Elementi Finiti (EF)  
Finite Element Method (FEM) - Finite Element (FE)
- Applicazione del MEF a problemi strutturali in campo elastico lineare
- Analisi critica dei risultati di un modello ad EF
- Criteri di modellazione di strutture con il MEF

### Esercitazioni

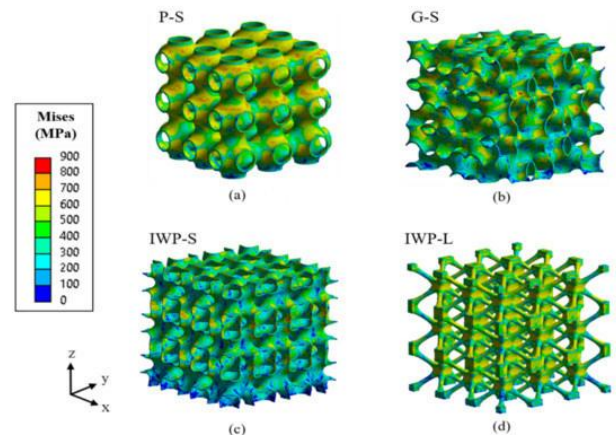
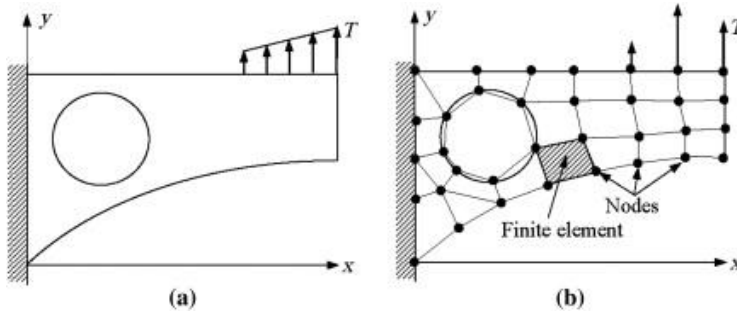
- Uso del programma Ansys:
  - Ansys Parametric Design Language (APDL) - Ansys Classic
  - Ansys Workbench (ultimo mese di lezione)
- Esempi significativi di applicazione del metodo EF a problemi strutturali

## Contenuti del corso

### Compromesso fra:

- Teoria/Pratica – necessità di introdurre delle basi teoriche su EF, ma anche imparare un Sw commerciale usato in R&D dalle aziende
- Lezioni/Esercitazioni – opportunità di dare spazio all'uso autonomo del Sw sfruttando l'aula informatica, riuscendo a coprire tutti gli argomenti del corso
- Vecchio/Nuovo – utilità di introdurre APDL, per un controllo di basso livello ad esempio dei carichi e dei nodi, tuttavia necessario anche Workbench dato che è comunemente usato in R&D, *ad ogni modo i comandi APDL possono essere recepiti da Workbench*

*Old*



*New*

## Materiale didattico e modalità d'esame

### Materiale didattico

- Le slides presentate in aula e le tracce delle esercitazioni svolte sono disponibili dal sito: <http://people.unipi.it/static/ciro.santus/Didattica.html>
- **Stesse slides rese disponibili su Teams del corso**
- Libri eventualmente da consultare:
  - Madenci E., Guven I. “The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS”, Springer 2015.
  - A. Gugliotta, A. Somà, N. Zampieri. ELEMENTI FINITI, Quine 2022.
- Tutorial disponibili in rete, es.:  
<https://confluence.cornell.edu/display/SIMULATION/ANSYS+Learning+Modules>
- Sito di Ansys:  
<http://www.ansys.com>

### Esame: scritto + orale

- Aspetti numerico/teorici del metodo agli elementi finti (scritto)
- Strategia di modellazione per tipici elementi meccanici (scritto)
- Progettino Ansys da sviluppare autonomamente (da discutere all'orale)

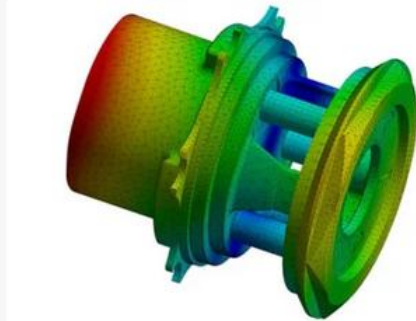
# Dove posso trovare Ansys, oltre al centro di calcolo???

<https://www.ansys.com/academic/students>

Iniziativa di Ansys per le università

## Free Student Software Downloads

Used by millions around the world, students can take advantage of our free engineering software for homework, capstone projects and student competitions. Our renewable products can be downloaded at no cost by students across the globe and installed on any supported MS Windows 64-bit machine.



### Ansys Student

Ansys Student is our Ansys Workbench-based bundle of Ansys Mechanical, Ansys CFD, Ansys Autodyn, Ansys Discovery, Ansys SpaceClaim and Ansys DesignXplorer. Ansys Student is downloaded by hundreds of thousands of students globally every year and includes some of our most-used products commercially. Users of this product may also find value in downloading our Ansys LS-DYNA Student product.



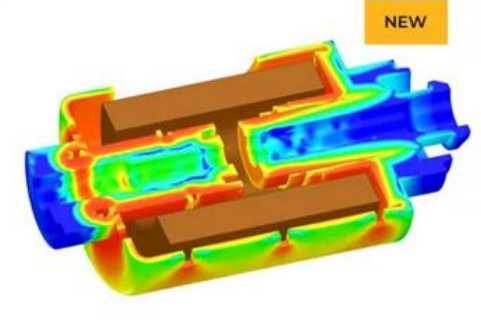
[FREE DOWNLOAD NOW ▶](#)



### Ansys LS-DYNA Student

Ansys LS-DYNA Student has a vast array of capabilities using its explicit solver, allowing the simulation of the response of materials to short periods of severe loading and extreme deformation. It can be used by students to examine materials failure and how failure progresses through a part or system. LS-DYNA Student is useful for applications in automotive, aerospace and more.

[FREE DOWNLOAD NOW ▶](#)



### Ansys Electronics Desktop Student

Ansys Electronics Desktop Student is our industry gold standard simulators for work with antenna, RF, Microwave, PCB, IC and IC package designs along with electromechanical devices such as electric motors and generators. Students will have access to Ansys HFSS, Ansys Maxwell, Ansys Q3D, and Ansys Icepak allowing design work a broad range of electrical and electro-mechanical systems.

[FREE DOWNLOAD NOW ▶](#)



# Ansys Free Student Product

DOWNLOAD ANSYS STUDENT 2025 R2 ▶

(Built-in license valid until 07/31/2026)

## Problem Size Limits

- No Geometry Export

### Limits for Ansys Student and Discovery (Refine Mode)

- Structural Physics: 128K nodes/elements
- Fluid physics: 1 Million cells/nodes

## License Duration

Renewable, twelve-month lease from the date of release.

# Ansys Free Student Product / Ansys Product

## Bundled Applications & Features:

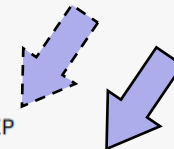
- Ansys Workbench
- Ansys Multiphysics
- Ansys Mechanical
- Ansys Discovery
- Ansys SPEOS
- Ansys Autodyn
- Ansys Forte
- Ansys Chemkin-Pro
- Ansys CFD (Ansys CFX and Ansys Fluent)
- Ansys Meshing and Extended Meshing
- Ansys DesignModeler
- Ansys DesignExplorer
- Ansys SpaceClaim
- Ansys Mechanical APDL
- Ansys Motion
- Ansys Polyflow
- Ansys CFD-Post
- Ansys EnSight
- Ansys TurboGrid
- Ansys EnVision
- Ansys ACP Pre & Post
- FENSAP-ICE
- Aqwa
- Ansys System Coupling

## Workbench Analysis Systems/Physics:

- Couple Field Harmonic, Modal, Static & Transient
- Eigenvalue Buckling
- IC Engine
- Structural Optimization (Topology)
- Turbomachinery Fluid Flow
- Design Assessment
- Electric
- Explicit Dynamics
- Fluid Flow (CFX)
- Fluid Flow (Fluent)
- Harmonic Response
- Linear Buckling
- Magnetostatic
- Modal
- Random Vibration
- Response Spectrum
- Rigid Dynamics
- Shape Optimization
- Static Structural
- Steady-State Thermal
- Thermal-Electric
- Transient Structural

## Geometry Import:

- Neutral format import IGES, STEP
- Parasolid (native within Ansys DesignModeler)



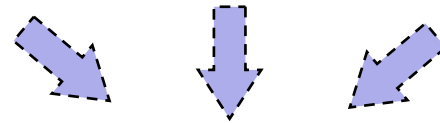
Meccanica dei solidi

Elettromagnetismo

Fluidodinamica

Termodinamica

Etc...

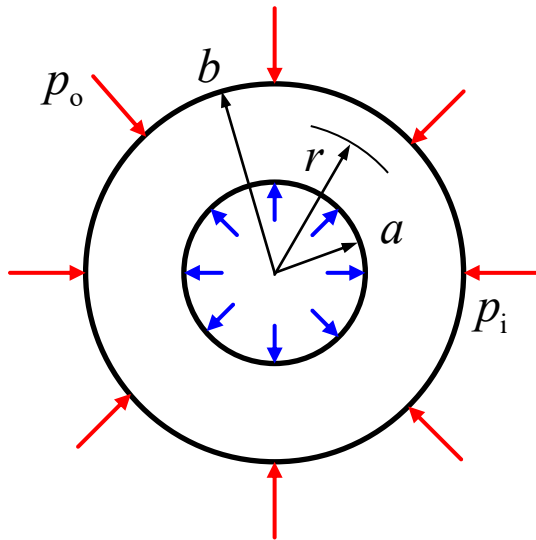


Sistemi di equazioni differenziali  
alle derivate parziali

Eq.ni di  
Navier-  
Cauchy

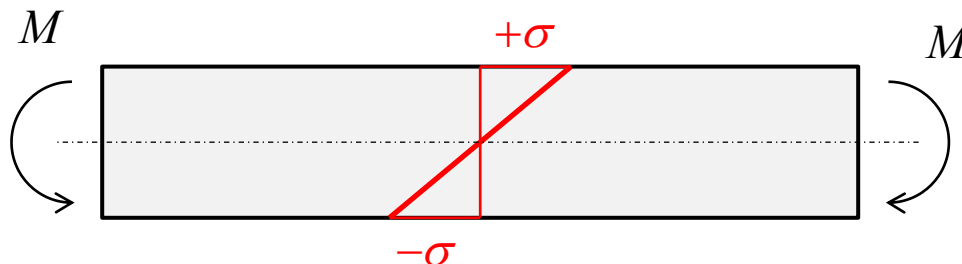
$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_x}{G} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_y}{G} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_z}{G} = 0 \end{array} \right.$$

Soluzioni analitiche: solo in casi particolari, introducendo rilevanti semplificazioni (soluzioni assialsimmetriche, travi, piastre, gusci...)



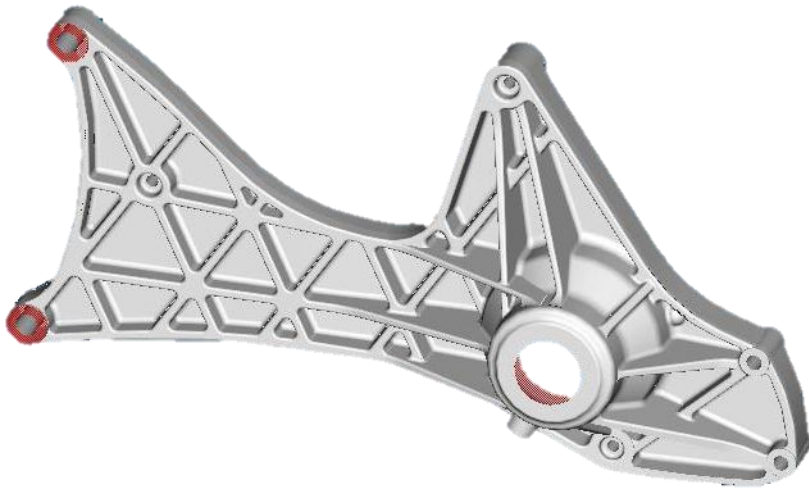
$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}$$



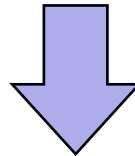
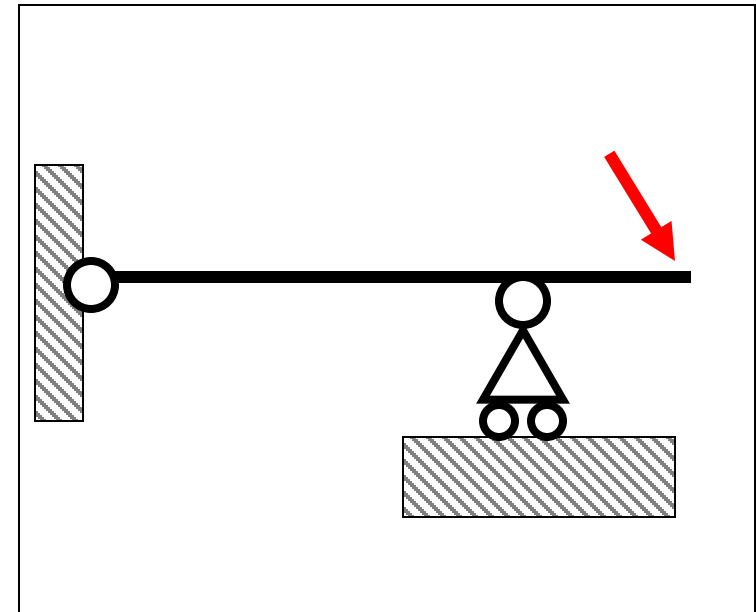
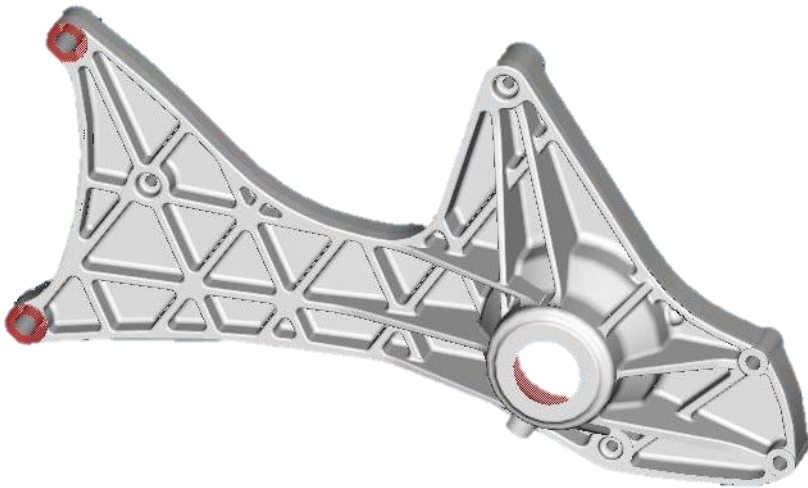
$$\sigma = \frac{M}{\frac{1}{6} b h^2}$$

Soluzioni analitiche: solo in casi particolari, introducendo rilevanti semplificazioni (soluzioni assialsimmetriche, travi, piastre, gusci...)



Soluzione teorica ovviamente NON disponibile! A causa dell'elevata complessità geometrica

Soluzioni analitiche: solo in casi particolari, introducendo rilevanti semplificazioni (soluzioni assialsimmetriche, travi, piastre, gusci...)



Sviluppo di tecniche di soluzione **approssimate**



Metodi di soluzione approssimata:

- Elementi Finiti
- Differenze finite
- Elementi di contorno
- Metodi “mesh free”
- ...

Il Metodo degli Elementi Finiti (MEF) è oggi di gran lunga il più diffuso, soprattutto grazie alla sua versatilità

Idea centrale del MEF (e delle altre tecniche approssimate):

**Problema originale:** determinare le f.ni incognite  $u_x(x,y,z)$ ,  $u_y(x,y,z)$ ,  $u_z(x,y,z)$

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_x}{G} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_y}{G} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_z}{G} = 0 \end{cases}$$

Idea centrale del MEF (e delle altre tecniche approssimate):

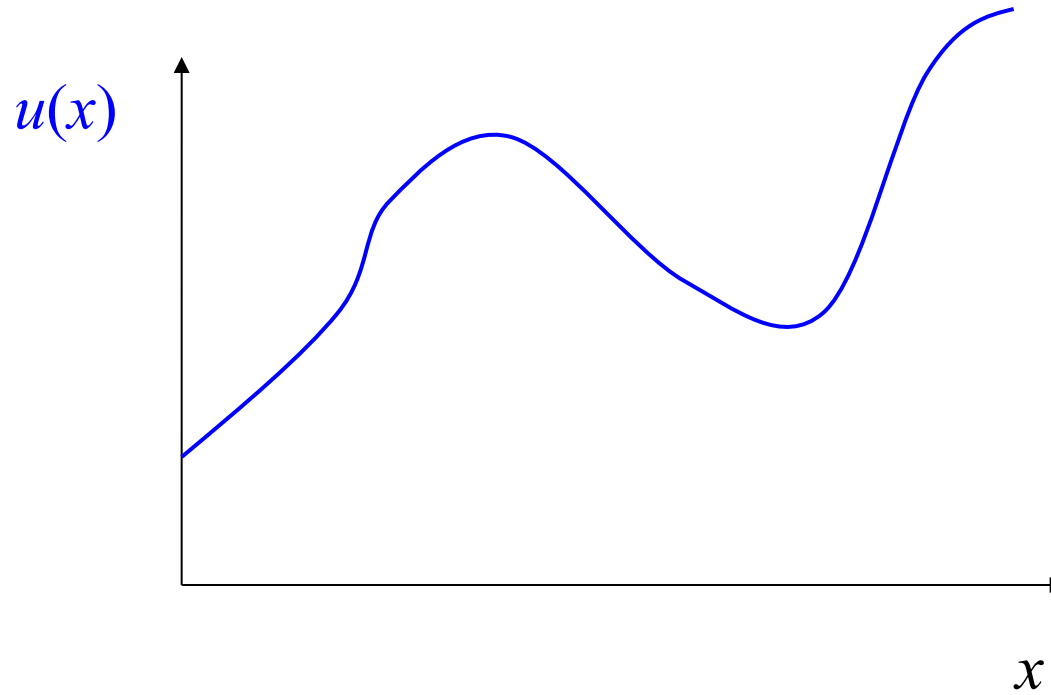
**Problema originale:** determinare le f.ni incognite  $u_x(x,y,z)$ ,  $u_y(x,y,z)$ ,  $u_z(x,y,z)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_x}{G} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_y}{G} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho_0 \frac{b_z}{G} = 0 \end{array} \right.$$

**Problema sostitutivo:** determinare delle funzioni sostitutive che approssimano  $u_x(x,y,z)$ ,  $u_y(x,y,z)$ ,  $u_z(x,y,z)$ , con un errore accettabile ai fini pratici e siano relativamente facili da calcolare

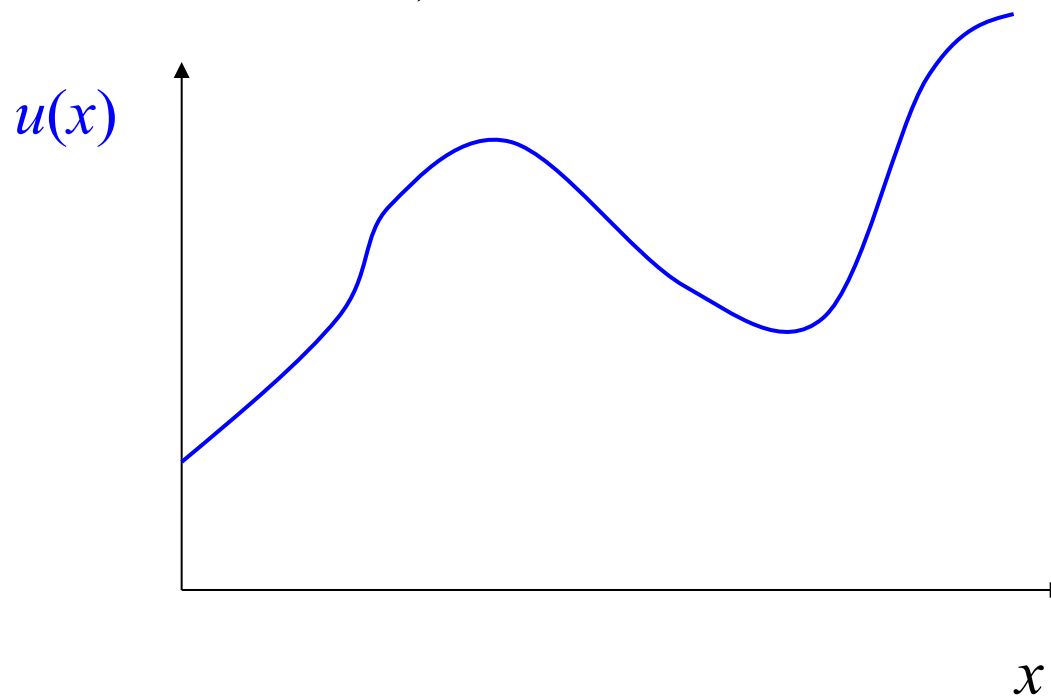


## Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)





## Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)

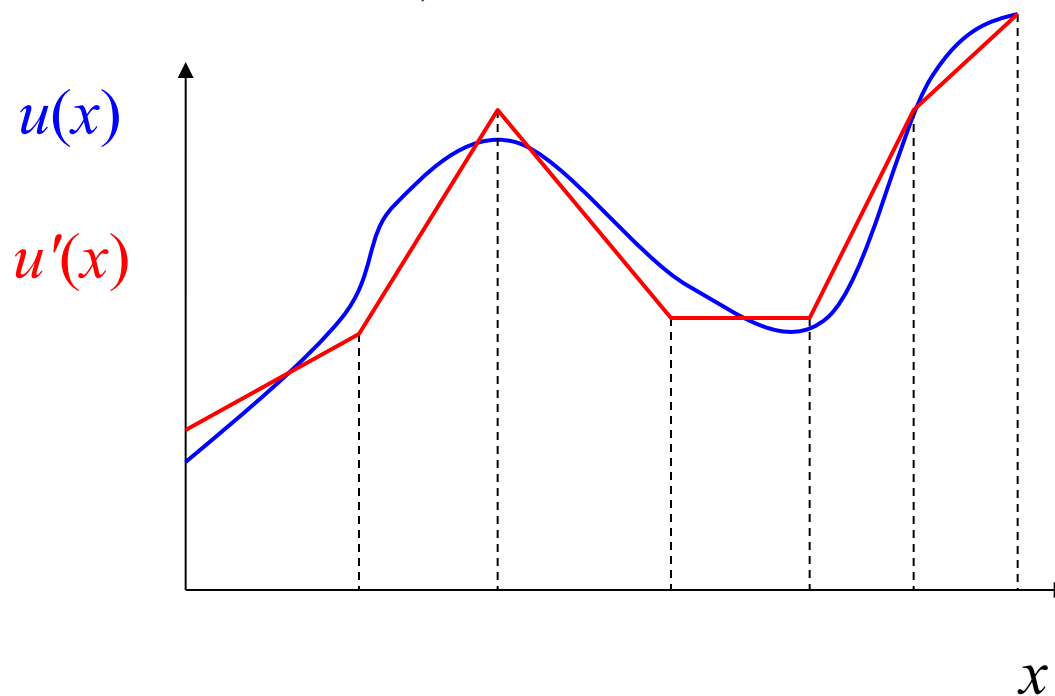


F.ne sostitutiva  $u'(x)$  :

- espressione matematica semplice (es. spline lineare)
- nota ovunque una volta noto il valore di un **n° finito di parametri**



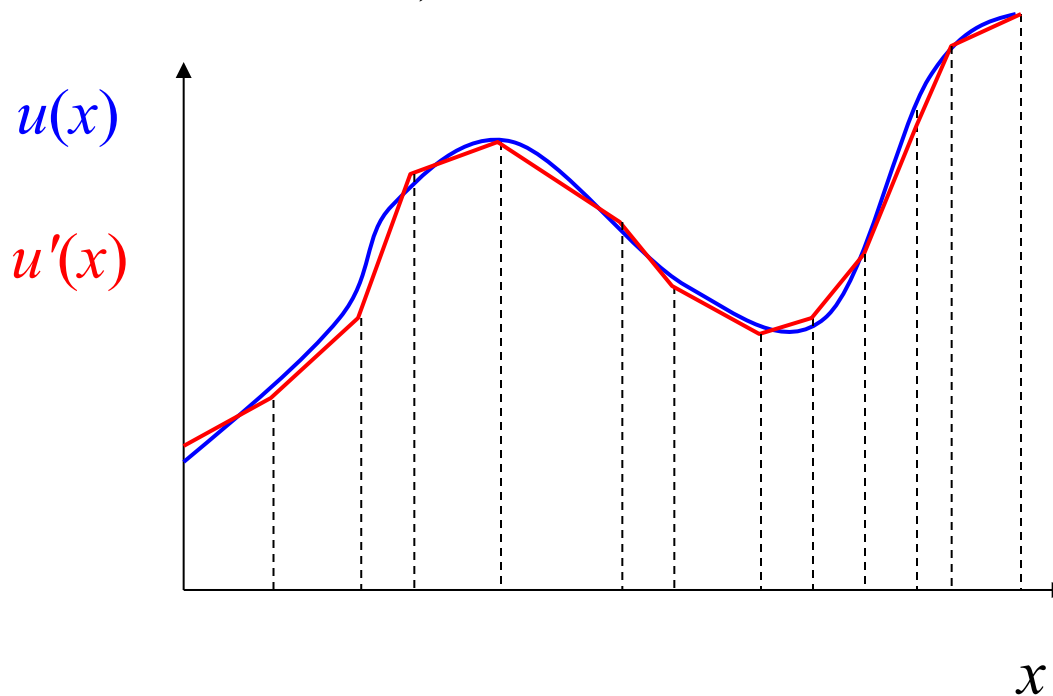
## Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)



F.ne sostitutiva  $u'(x)$  :

- espressione matematica semplice (es. spline lineare)
- nota ovunque una volta noto il valore di un **n° finito di parametri**

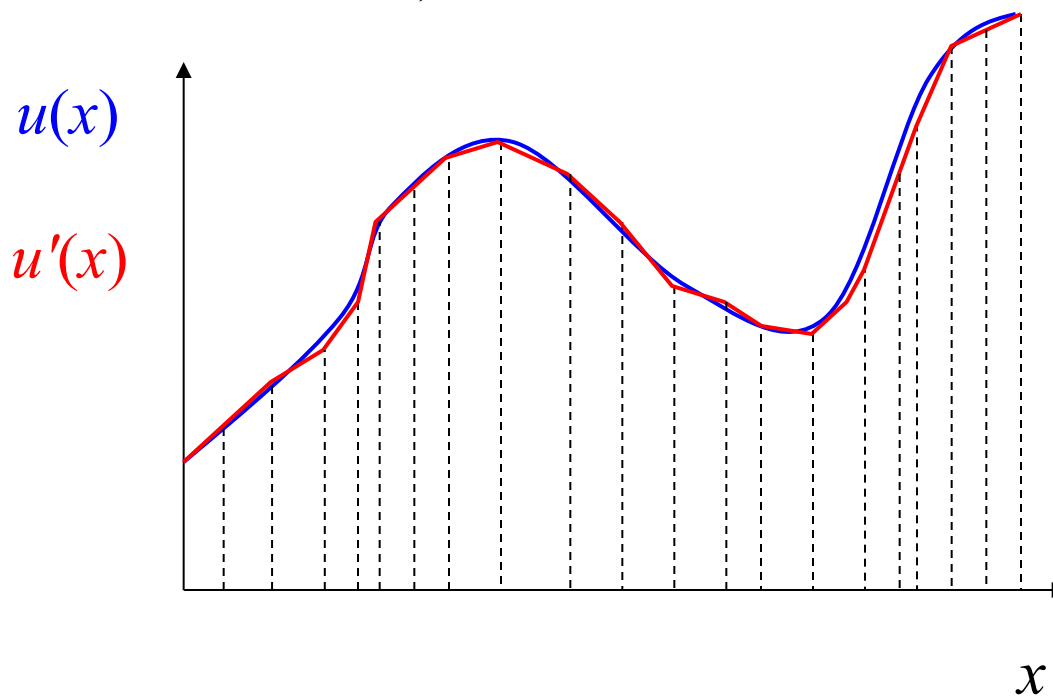
## Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)



F.ne sostitutiva  $u'(x)$  :

- espressione matematica semplice (es. spline lineare)
- nota ovunque una volta noto il valore di un  **$n^\circ$  finito di parametri**

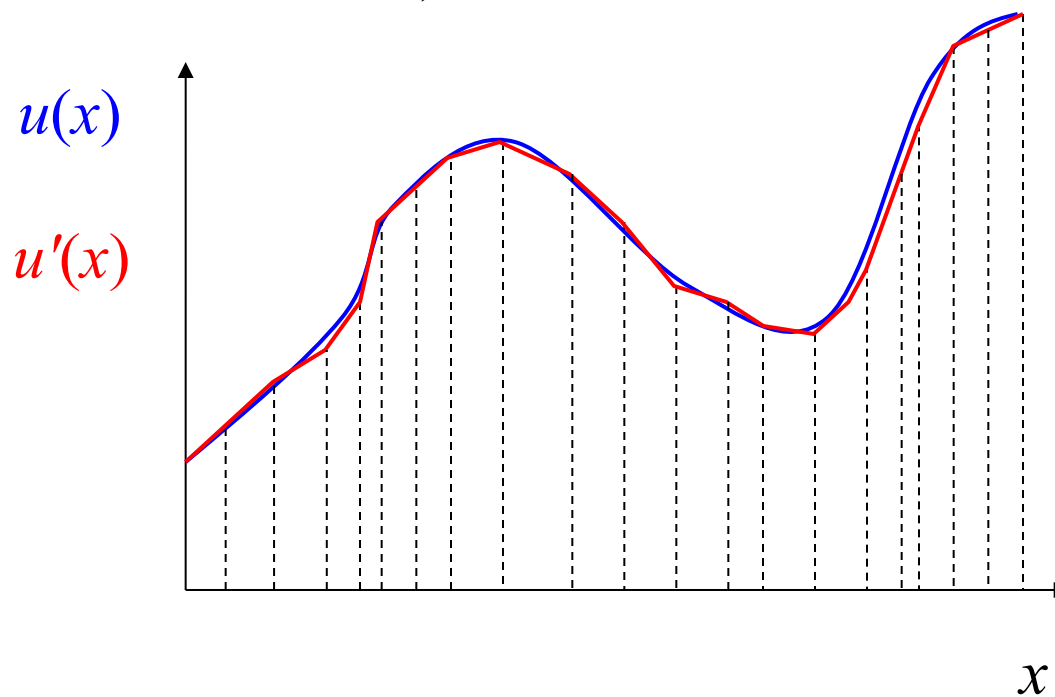
## Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)



F.ne sostitutiva  $u'(x)$  :

- espressione matematica semplice (es. spline lineare)
- nota ovunque una volta noto il valore di un **n° finito di parametri**

## Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)



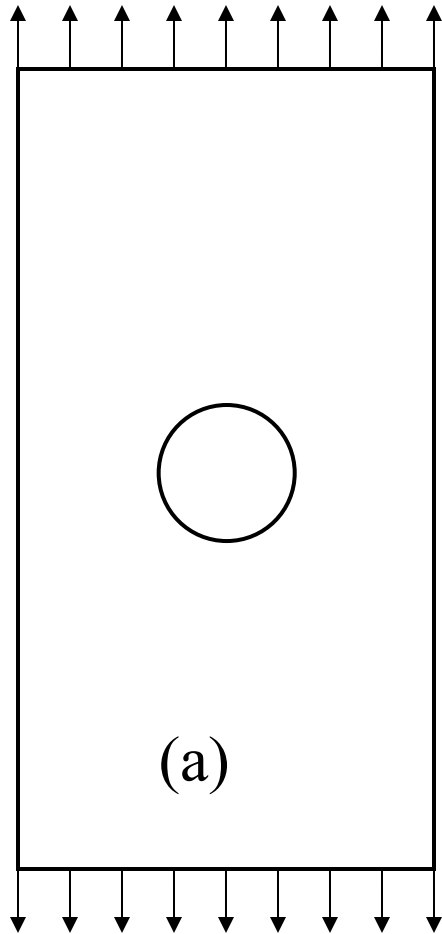
F.ne sostitutiva  $u'(x)$  :

- espressione matematica semplice (es. spline lineare)
- nota ovunque una volta noto il valore di un  $n^\circ$  finito di parametri

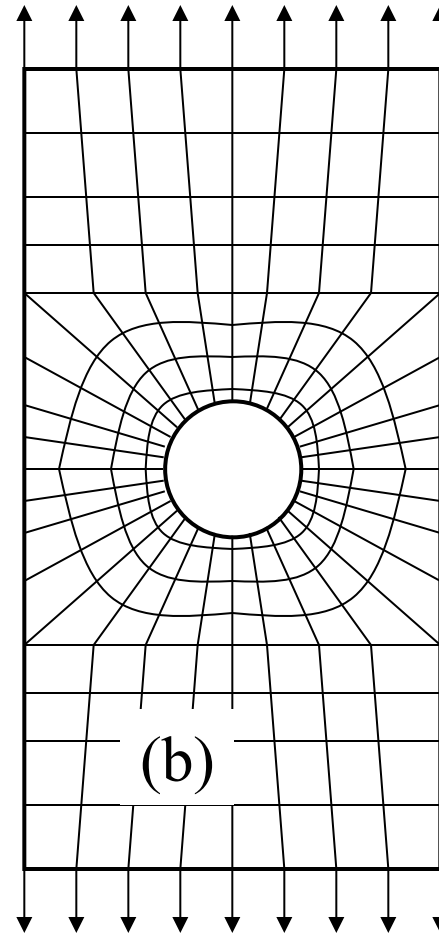
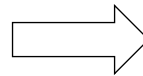
Osservazioni:

- soluzione affetta da **errori**
- necessario verificare la **convergenza**

## Discretizzazione

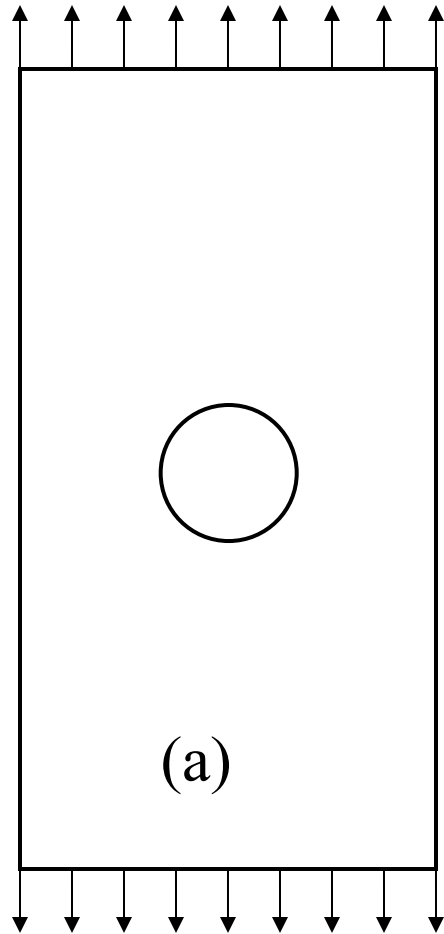


Struttura

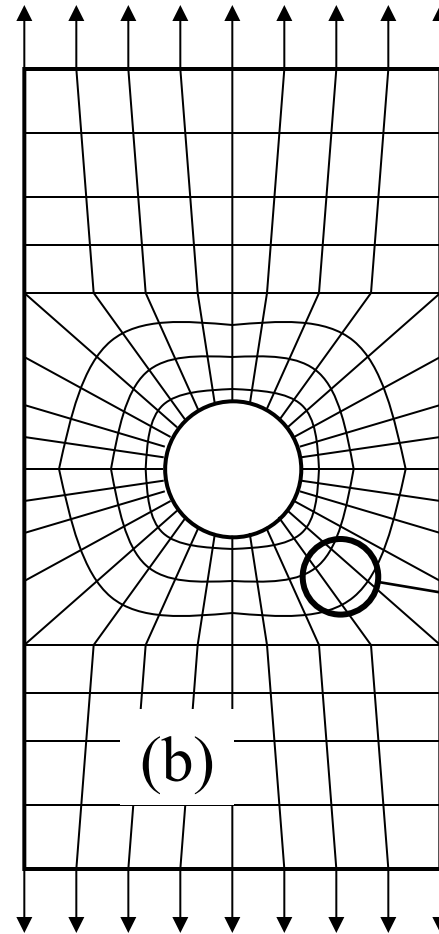
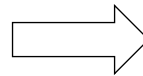


Modello ("mesh")

## Discretizzazione

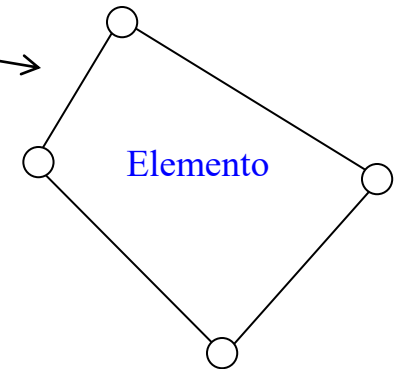


Struttura



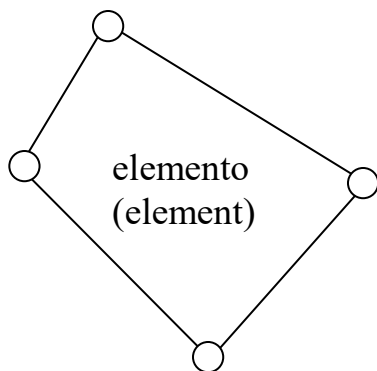
Modello ("mesh")

Nodo



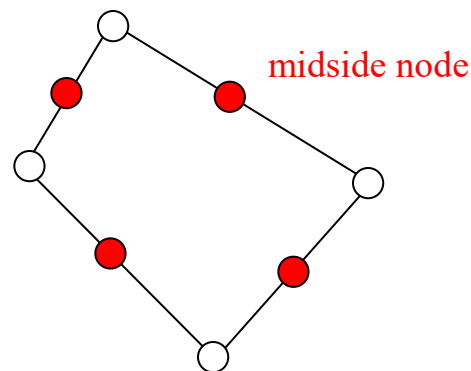
## Esempio di elemento piani con diverse disposizioni dei nodi

nodo (node)



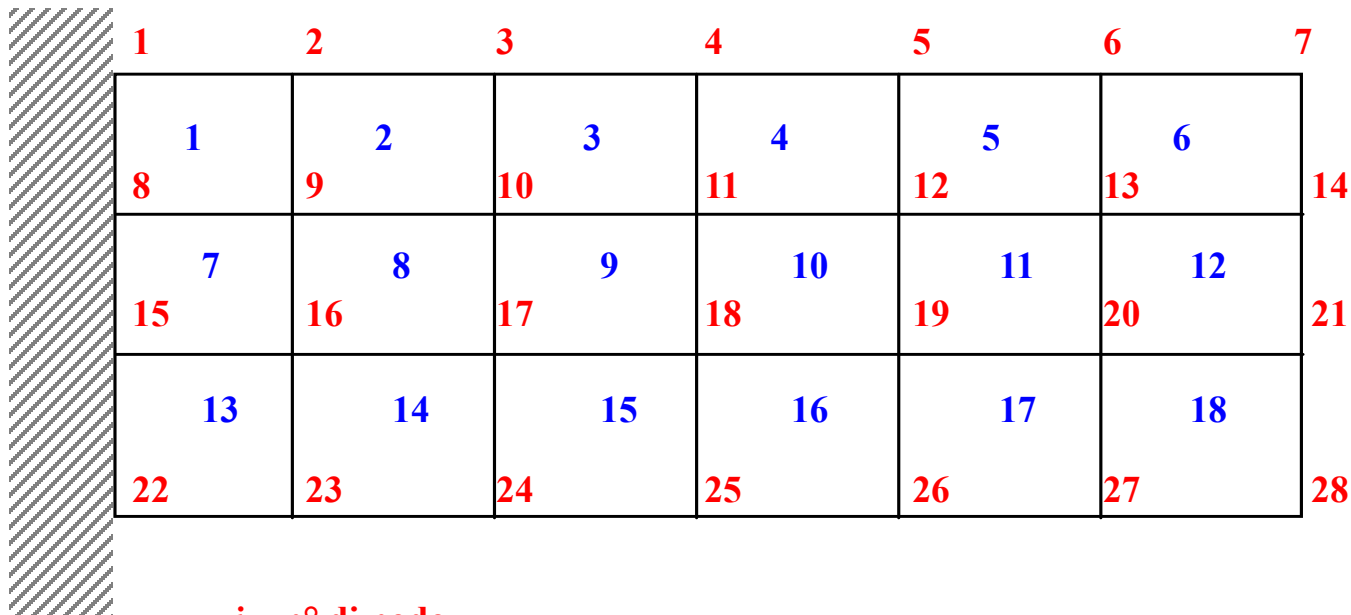
Elemento base

corner node



Elemento di grado superiore

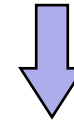
I nodi e gli elementi sono identificati da un numero univoco



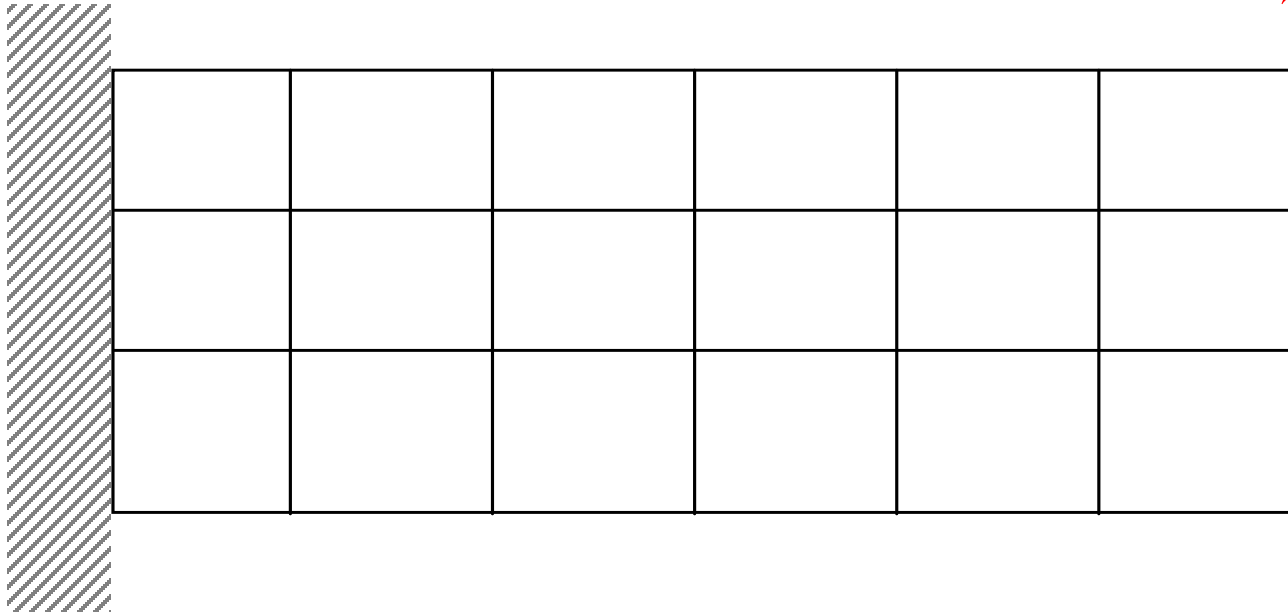
$i = n^{\circ}$  di nodo

$j = n^{\circ}$  di elemento

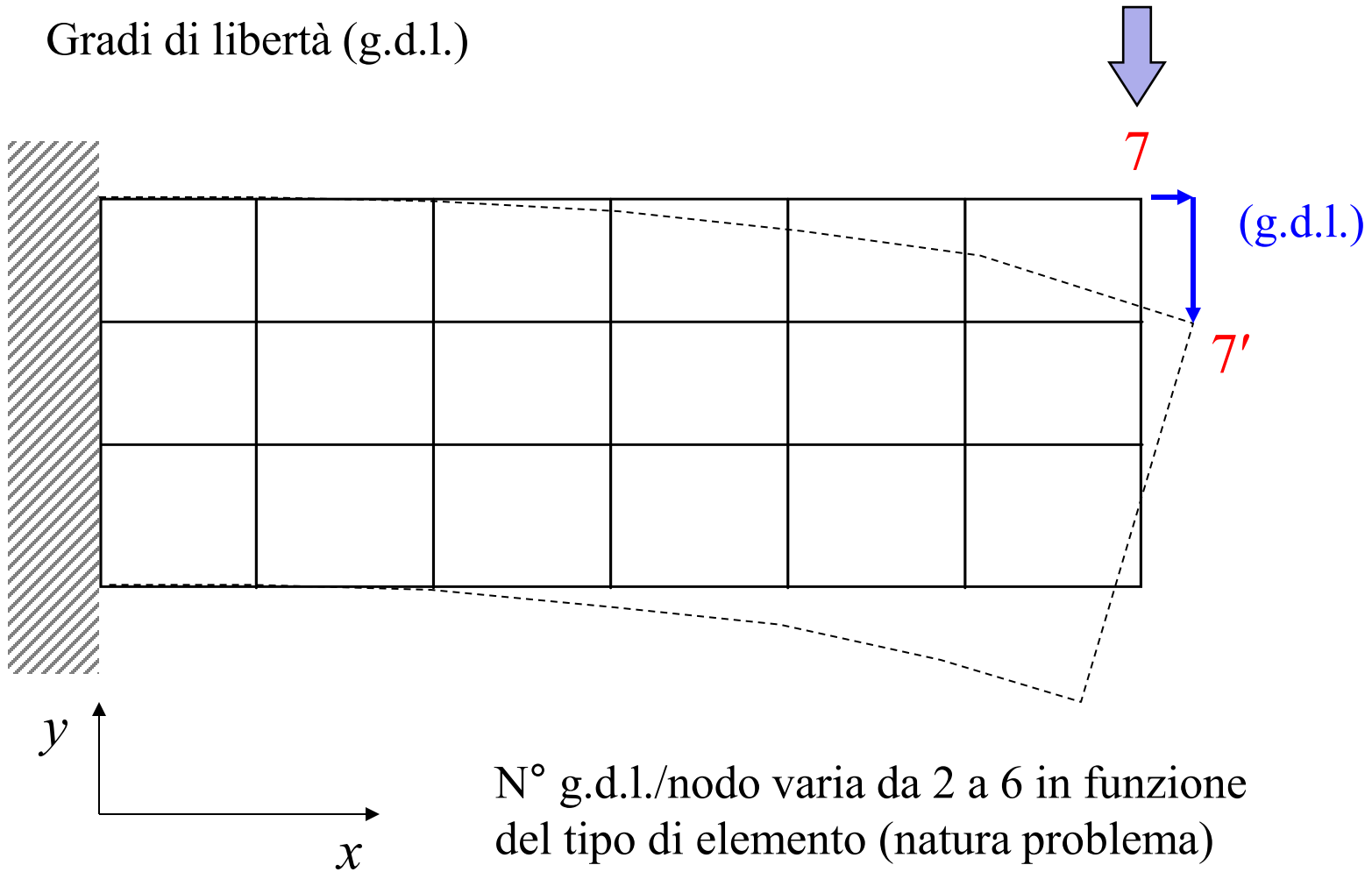
Gradi di libertà (g.d.l.)



7

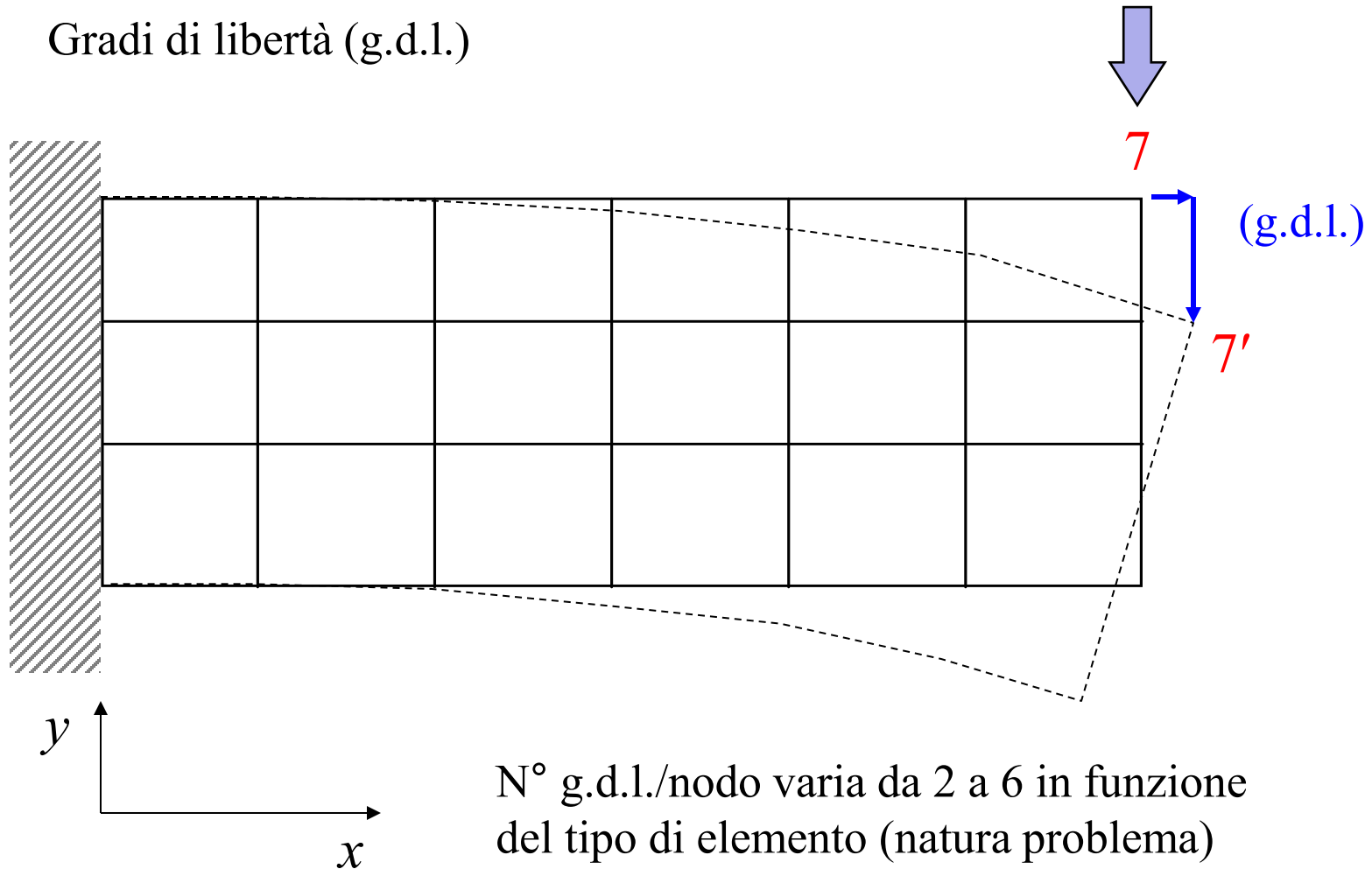


Gradi di libertà (g.d.l.)



N° g.d.l./nodo varia da 2 a 6 in funzione del tipo di elemento (natura problema)

Gradi di libertà (g.d.l.)



N° g.d.l./nodo varia da 2 a 6 in funzione del tipo di elemento (natura problema)

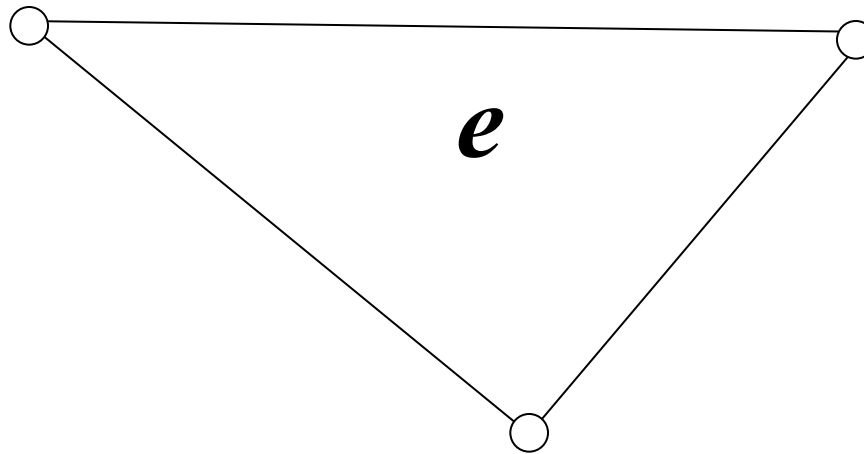
$$N^{\circ} \text{ totale g.d.l.} = N^{\circ} \text{ g.d.l./nodo} \times N^{\circ} \text{ nodi}$$

In realtà, spesso, un modello è costituito da parti con tipi di elemento diversi



## Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

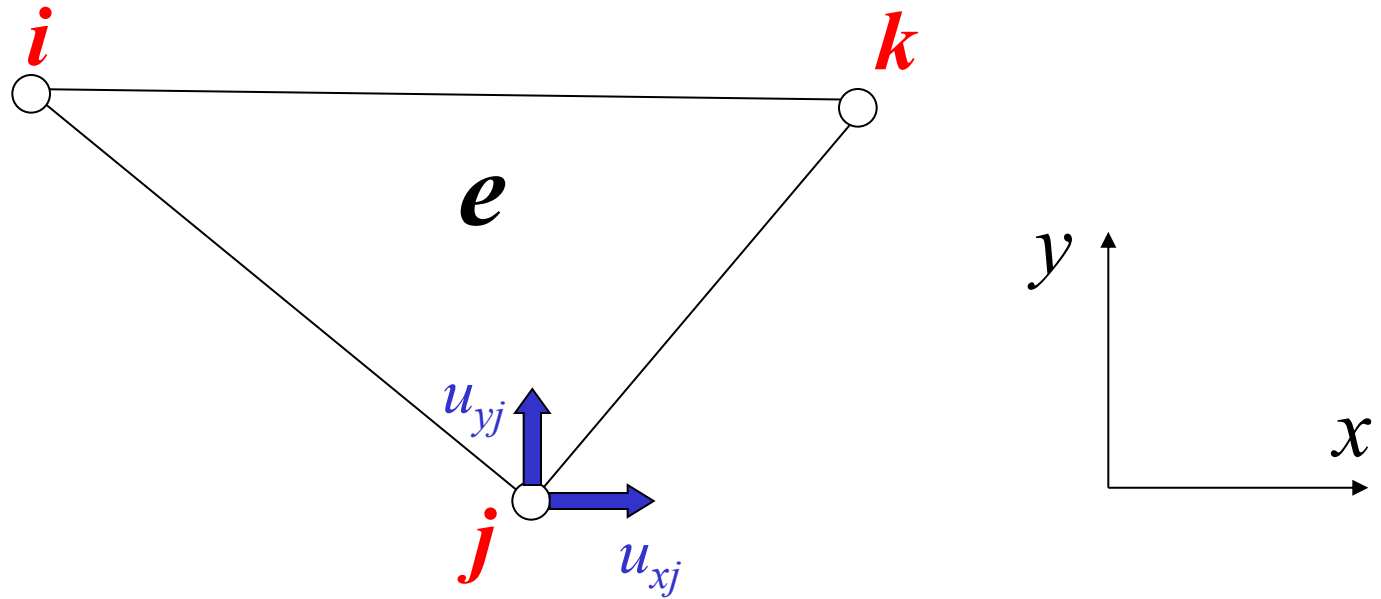
Elemento piano per problemi 2D



$e$  è il numero (nome) dell'elemento

## Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

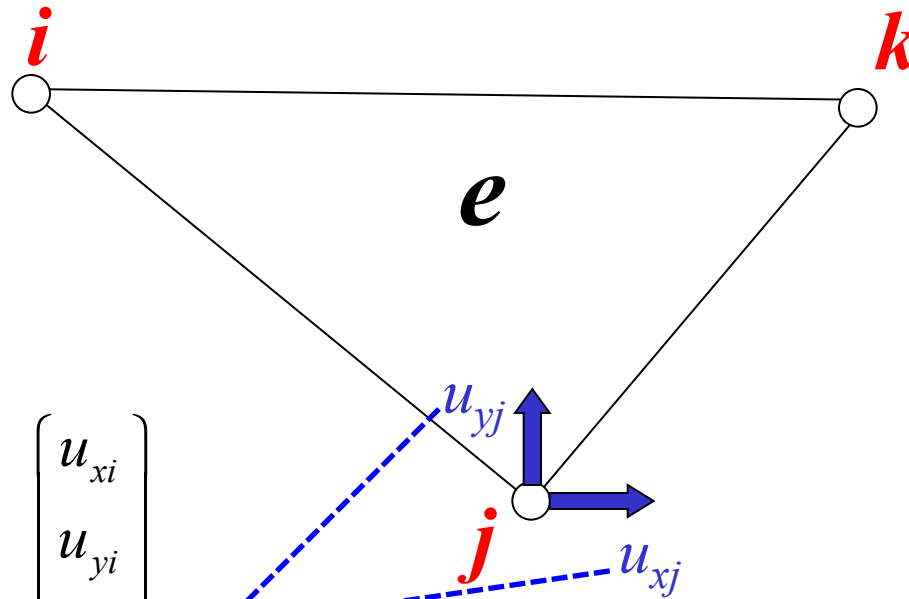
Elemento piano per problemi 2D



$i, j, k$  sono i numeri (nomi) dei nodi connessi all'elemento  $e$   
 $u_{xj}, u_{yj}$  sono i 2 g.d.l. del nodo  $j$

# Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

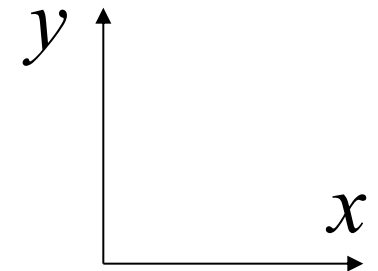
## Elemento piano per problemi 2D



$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ u_{xk} \\ u_{yk} \end{Bmatrix}$$

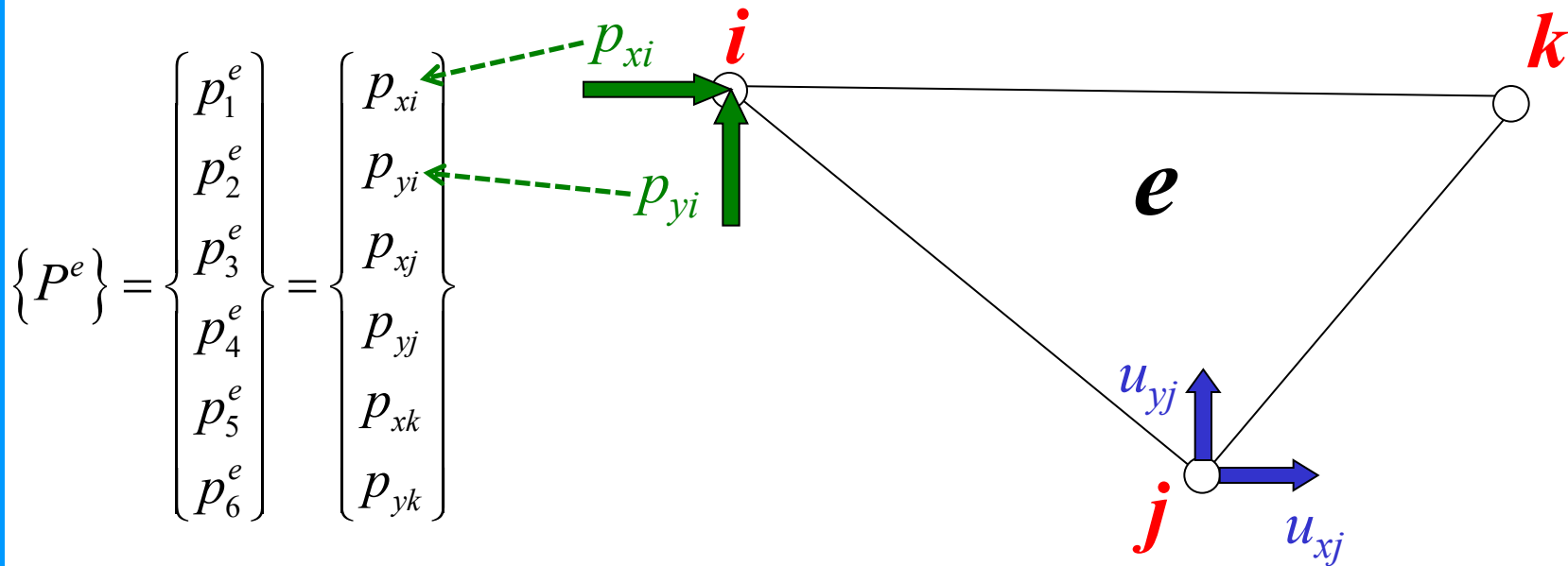
(6x1)

$\{U^e\}$  è il vettore che contiene tutti i 6 g.d.l. dell'elemento  $e$

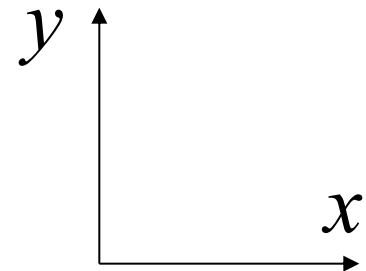


## Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

Elemento piano per problemi 2D



$p_{xi}, p_{yi}$  sono i carichi (forza / forza per unità di spessore) che agiscono sul nodo  $i$  dell'elemento  $e$   
 $\{P^e\}$  è il vettore che contiene tutti i 6 carichi nodali





## Comportamento meccanico (lineare) del singolo elemento

$$\left\{ P^e \right\} = \left[ K^e \right] \left\{ U^e \right\}$$
$$6 \times 1 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1$$

$[K^e]$  è la matrice di rigidezza dell'elemento  $e$  che mette in relazione (lineare) il vettore dei carichi nodali con il vettore degli spostamenti nodali

## Comportamento meccanico (lineare) del singolo elemento

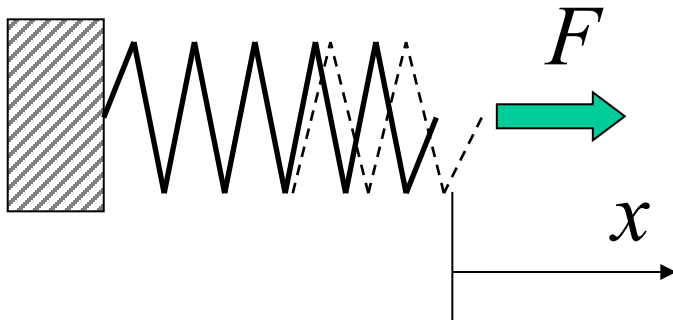
$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

$$6 \times 1 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1$$

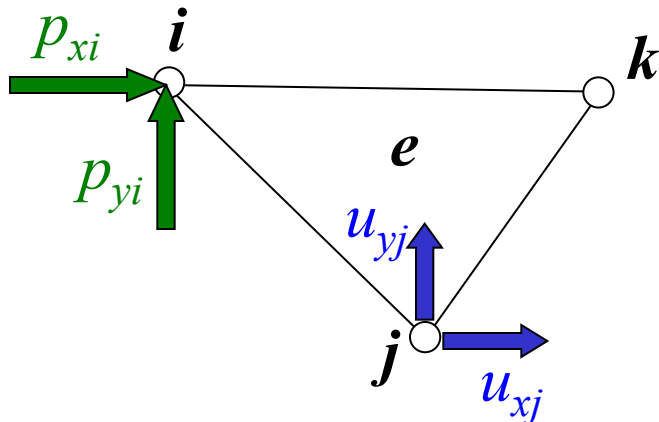
$$\begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \\ p_5^e \\ p_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e & k_{15}^e & k_{16}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e & k_{25}^e & k_{26}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e & k_{34}^e & k_{35}^e & k_{36}^e \\ k_{41}^e & k_{42}^e & k_{43}^e & k_{44}^e & k_{45}^e & k_{46}^e \\ k_{51}^e & k_{52}^e & k_{53}^e & k_{54}^e & k_{55}^e & k_{56}^e \\ k_{61}^e & k_{62}^e & k_{63}^e & k_{64}^e & k_{65}^e & k_{66}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \end{Bmatrix}$$



Elemento = molla "multidimensionale"

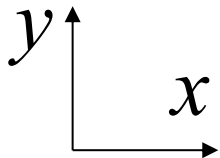


$$F = k x$$



$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

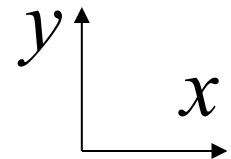
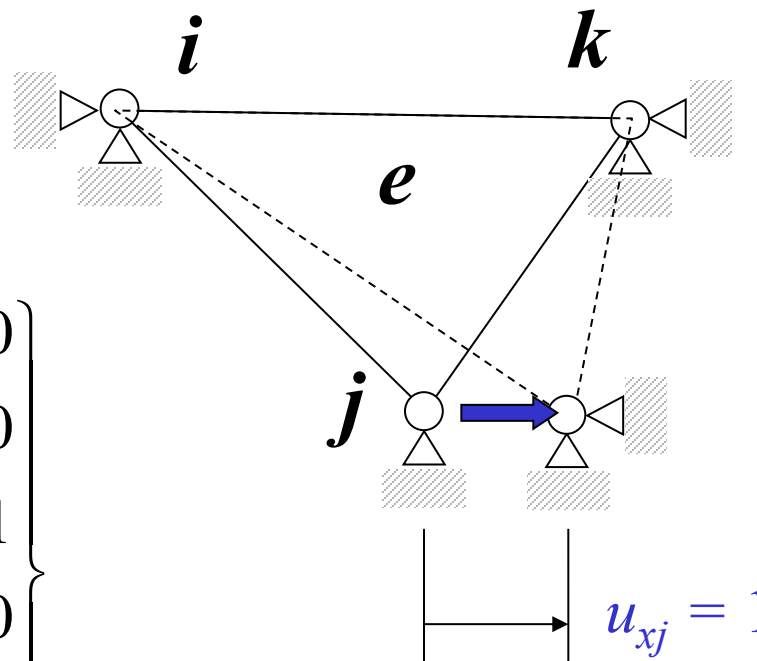
$$P_m^e = \sum_n k_{mn}^e u_n^e$$



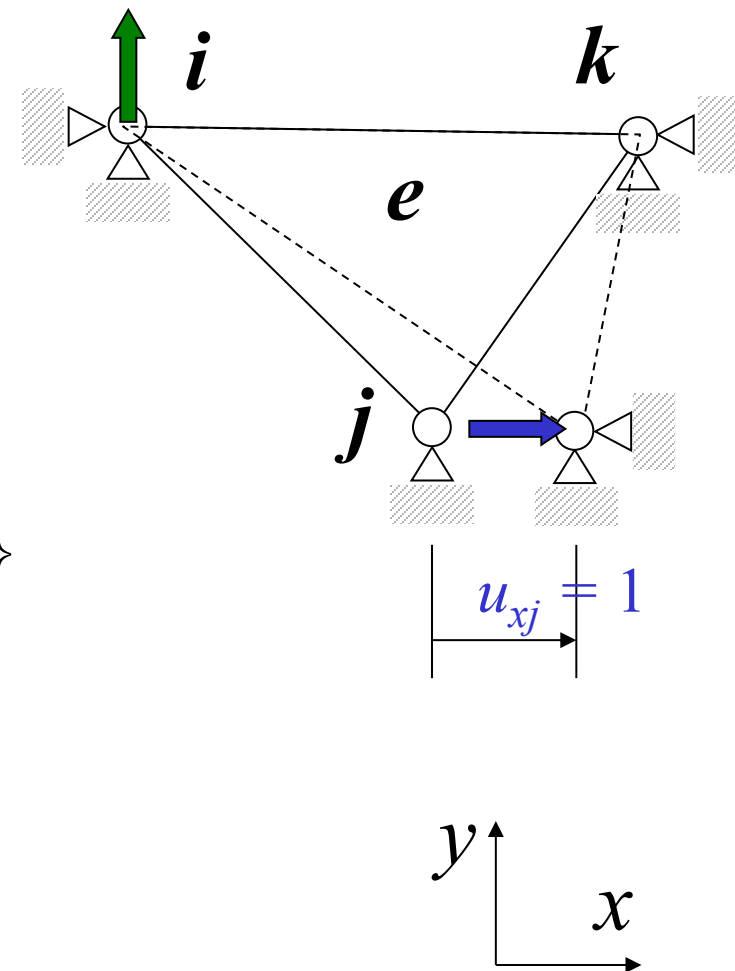
Significato fisico dei termini della matrice di rigidezza,  $k_{mn}^e$   
 “cedimento” vincolare:

Esempio:

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Significato fisico dei termini della matrice di rigidezza,  $k_{mn}^e$   
 “cedimento” vincolare:

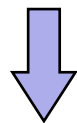
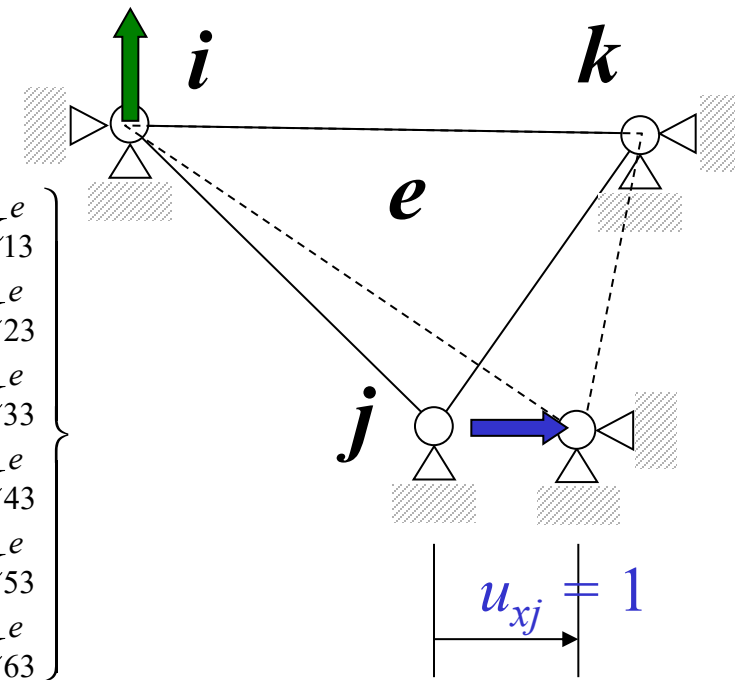


$$\begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \\ p_5^e \\ p_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e & k_{15}^e & k_{16}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e & k_{25}^e & k_{26}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e & k_{34}^e & k_{35}^e & k_{36}^e \\ k_{41}^e & k_{42}^e & k_{43}^e & k_{44}^e & k_{45}^e & k_{46}^e \\ k_{51}^e & k_{52}^e & k_{53}^e & k_{54}^e & k_{55}^e & k_{56}^e \\ k_{61}^e & k_{62}^e & k_{63}^e & k_{64}^e & k_{65}^e & k_{66}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

“Spostamento esploratore unitario”,  
 analogo al “carico esploratore unitario”

Significato fisico dei termini della matrice di rigidezza,  $k_{mn}^e$   
 “Cedimento” vincolare:

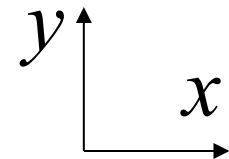
$$\begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \\ p_5^e \\ p_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e & k_{15}^e & k_{16}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e & k_{25}^e & k_{26}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e & k_{34}^e & k_{35}^e & k_{36}^e \\ k_{41}^e & k_{42}^e & k_{43}^e & k_{44}^e & k_{45}^e & k_{46}^e \\ k_{51}^e & k_{52}^e & k_{53}^e & k_{54}^e & k_{55}^e & k_{56}^e \\ k_{61}^e & k_{62}^e & k_{63}^e & k_{64}^e & k_{65}^e & k_{66}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{13}^e \\ k_{23}^e \\ k_{33}^e \\ k_{43}^e \\ k_{53}^e \\ k_{63}^e \end{Bmatrix}$$



$$p_1^e = k_{11}^e \times 0 + k_{12}^e \times 0 + k_{13}^e \times 1 + \dots + k_{16}^e \times 0 = k_{13}^e$$

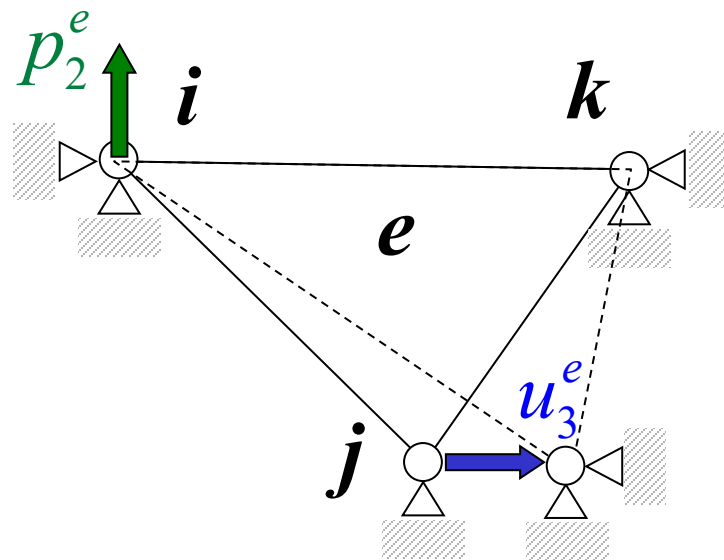
$$p_2^e = k_{21}^e \times 0 + k_{22}^e \times 0 + k_{23}^e \times 1 + \dots + k_{26}^e \times 0 = k_{23}^e$$

$$p_3^e = k_{33}^e \quad p_4^e = k_{43}^e \quad p_5^e = k_{53}^e \quad p_6^e = k_{63}^e$$



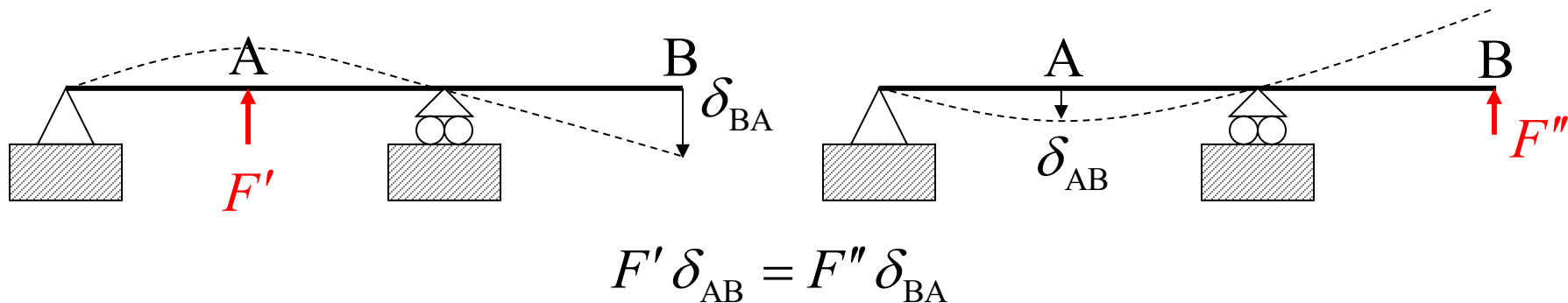
Il termine  $k_{mn}^e$  di  $[K^e]$  è pari alla reazione vincolare secondo il grado di libertà “ $m$ ” ( $m = 1, \dots, 6$ ), se si applica un sistema di spostamenti nodali in cui tutte le componenti sono nulle tranne la “ $n$ -esima” che assume valore unitario

Es.  $m = 2, n = 3: k_{23}^e = p_2^e$  con  $u_3^e = 1$  e  $u_{\neq 3}^e = 0$



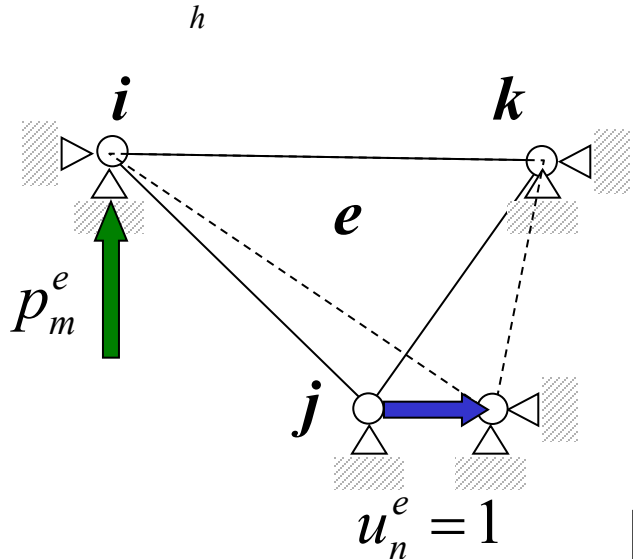
### Teorema di reciprocità (o teorema di Betti):

Il **teorema di Betti** afferma che dati due sistemi equilibrati di forze, il lavoro che le forze del primo sistema compiono sugli spostamenti causati dal secondo è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema compiono sugli spostamenti prodotti dal primo.



$$p_m^e = \sum_h k_{mh}^e u_h^e = k_{mn}^e u_n^e = k_{mn}^e$$

$$p_n^e = \sum_h k_{nh}^e u_h^e = k_{nm}^e u_m^e = k_{nm}^e$$



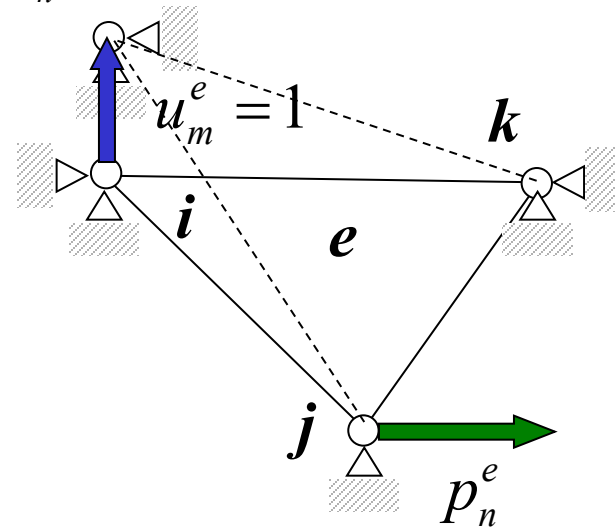
$$p_m^e u_m^e = p_n^e u_n^e$$

$$\downarrow$$

$$p_m^e = p_n^e$$

$$\downarrow$$

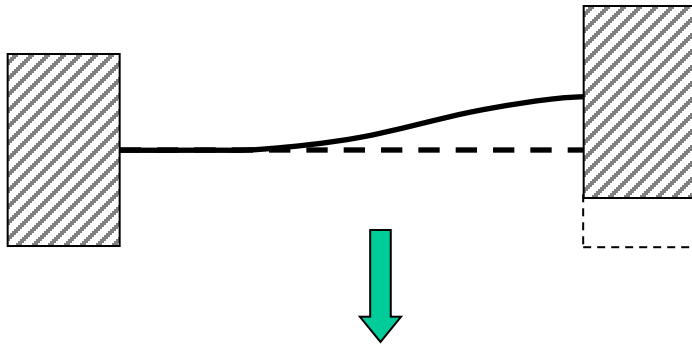
$$k_{mn}^e = k_{nm}^e$$



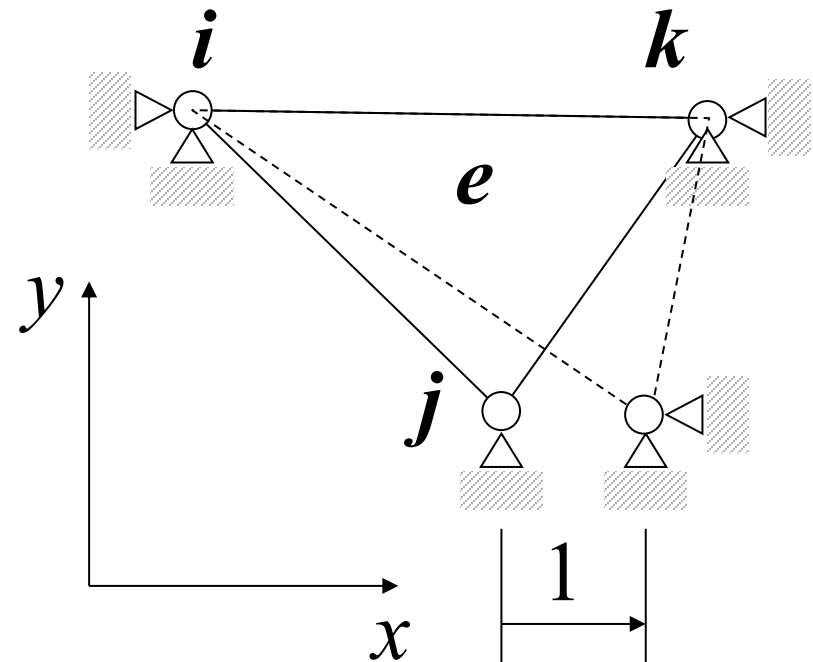
$[K^e]$  simmetrica

Valutazione di  $[K^e]$ 

In casi semplici è possibile calcolare le reazioni vincolari in presenza di “cedimenti vincolari” dei nodi (Es. elementi trave)



si ottengono immediatamente le  $k_{mn}^e$



Tuttavia, in generale, questa procedura non è praticabile per un elemento di forma generica

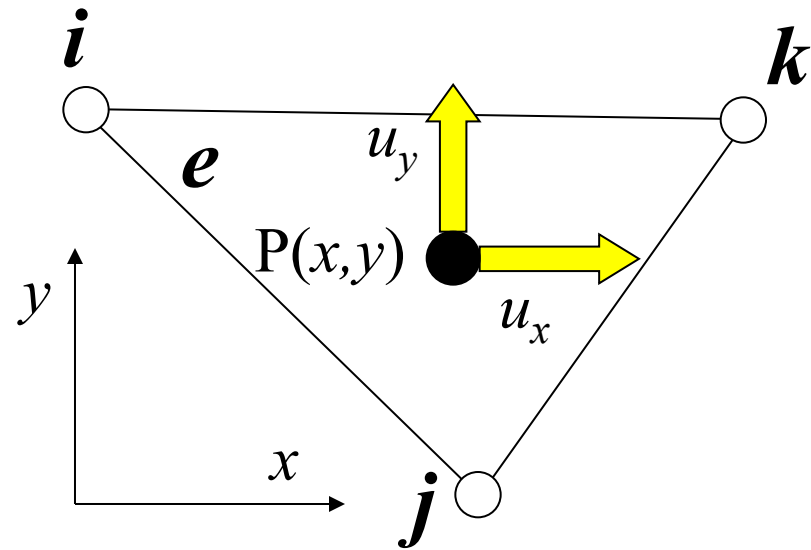
Spostamenti nei punti interni all'elemento – **Funzioni di forma**

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = [N^e(x, y)] \{U^e\}$$

$2 \times 1$                        $\uparrow$                        $2 \times 6$                        $6 \times 1$

**Funzioni di forma (“shape functions”)**

$$u_r(x, y) = \sum_{n=1}^6 N_{rn}^e(x, y) u_n^e$$



La dipendenza fra lo spostamento di un p.to interno e gli spostamenti dei nodi è **lineare** (e si assume tale anche per simulazioni non lineari).

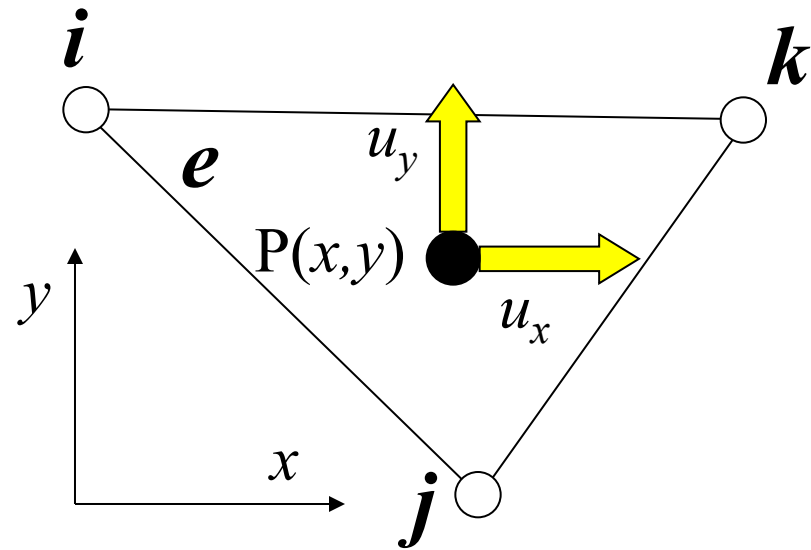
Ogni funzione di forma rappresenta il “peso” (dipendente dalla posizione all'interno dell'elemento) di ciascuna componente di spostamento nodale per determinare lo spostamento di P

Problemi da affrontare:

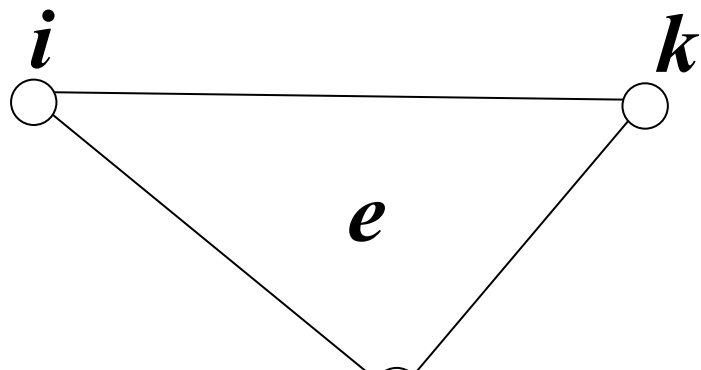
- che forma matematica dare alle  $N^e(x, y)$  ?
- come determinare le  $N^e(x, y)$  ?

Spostamenti nei punti interni all'elemento – **Funzioni di forma**

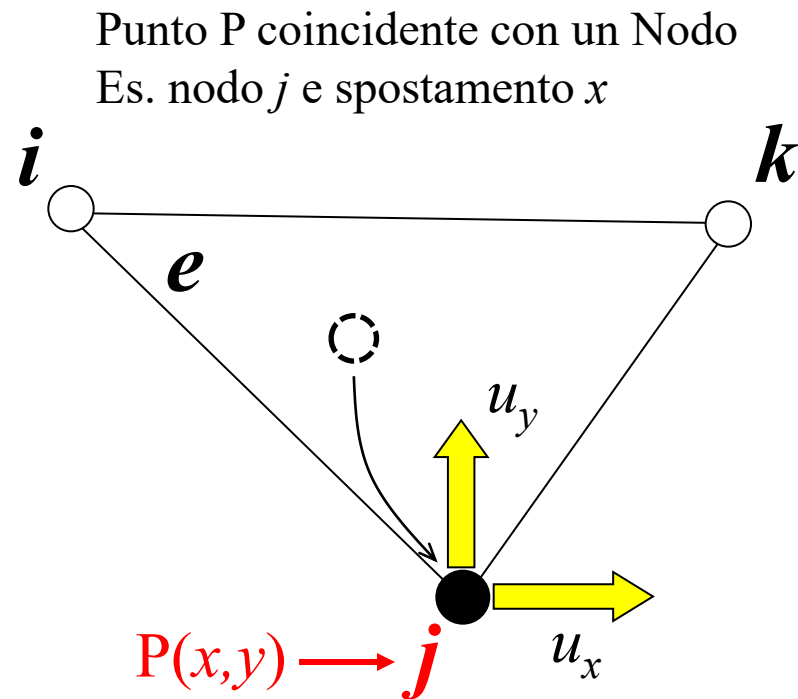
$$u_r(x, y) = \sum_{n=1}^6 N_{rn}^e(x, y) u_n^e$$



$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}^e(x, y) & N_{12}^e(x, y) & N_{13}^e(x, y) & N_{14}^e(x, y) & N_{15}^e(x, y) & N_{16}^e(x, y) \\ N_{21}^e(x, y) & N_{22}^e(x, y) & N_{23}^e(x, y) & N_{24}^e(x, y) & N_{25}^e(x, y) & N_{26}^e(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \end{Bmatrix}$$



$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \end{Bmatrix}$$



$$u_x(x_j, y_j) = \sum_{n=1}^6 N_{1n}^e(x_j, y_j) u_n^e = N_{11}^e(x_j, y_j) u_1^e +$$

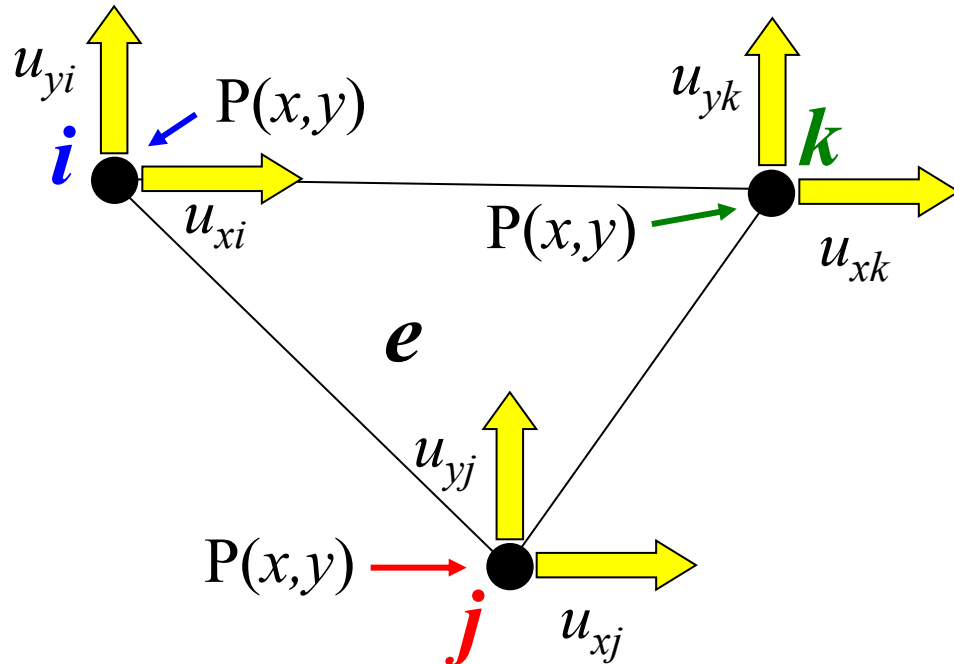
$$+ N_{12}^e(x_j, y_j) u_2^e + N_{13}^e(x_j, y_j) u_3^e + \dots = u_3^e$$

$$N_{1n}^e(x_j, y_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 3 \\ 1 & \text{se } n = 3 \end{cases}$$

$$u_r(x_j, y_j) = \sum_{n=1}^6 N_{rn}^e(x_j, y_j) u_n^e = N_{r1}^e(x_j, y_j) u_1^e + N_{r2}^e(x_j, y_j) u_2^e + \dots$$

$$r = 1, 2 \quad (r = x, y)$$

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ u_{xk} \\ u_{yk} \end{Bmatrix}$$



$$N_{11}^e(x_i, y_i) = 1 \quad N_{12}^e(x_i, y_i) = 0 \quad N_{13}^e(x_i, y_i) = 0 \quad N_{14}^e(x_i, y_i) = 0 \quad N_{15}^e(x_i, y_i) = 0 \quad N_{16}^e(x_i, y_i) = 0$$

$$N_{11}^e(x_j, y_j) = 0 \quad N_{12}^e(x_j, y_j) = 0 \quad N_{13}^e(x_j, y_j) = 1 \quad N_{14}^e(x_j, y_j) = 0 \quad N_{15}^e(x_j, y_j) = 0 \quad N_{16}^e(x_j, y_j) = 0$$

$$N_{11}^e(x_k, y_k) = 0 \quad N_{12}^e(x_k, y_k) = 0 \quad N_{13}^e(x_k, y_k) = 0 \quad N_{14}^e(x_k, y_k) = 0 \quad N_{15}^e(x_k, y_k) = 1 \quad N_{16}^e(x_k, y_k) = 0$$

Le componenti y di spostamento nodale non danno contributo sullo spost.to x del punto (e viceversa)

Riassumendo, per la prima riga:

$$\begin{cases} N_{11}^e(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \begin{cases} N_{12}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{12}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{12}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{13}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{13}^e(x_j, y_j) = 1 \\ N_{13}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \begin{cases} N_{14}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{14}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{14}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{15}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{15}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{15}^e(x_k, y_k) = 1 \end{cases} \begin{cases} N_{16}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{16}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{16}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

Analogamente per la seconda riga:

$$\begin{cases} N_{21}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{21}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{21}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \begin{cases} N_{22}^e(x_i, y_i) = 1 \\ N_{22}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{22}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{23}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{23}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{23}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \begin{cases} N_{24}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{24}^e(x_j, y_j) = 1 \\ N_{24}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{25}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{25}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{25}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \begin{cases} N_{26}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{26}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{26}^e(x_k, y_k) = 1 \end{cases}$$

Nella versione più semplice si introduce una funzione di forma lineare:

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} x + C_{lm} y$$

Considerando, ad esempio, la prima componente (delle 12 f.ni di forma) abbiamo 3 incognite e altrettante eq.ni in corrispondenza dei 3 nodi:

$$\begin{cases} N_{11}^e(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere un sistema lineare  $3 \times 3$

Nella versione più semplice si introduce una funzione di forma lineare:

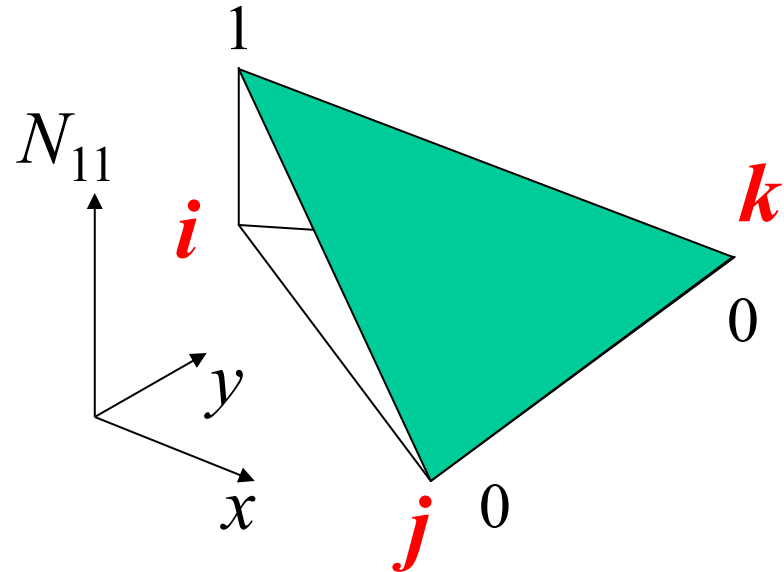
$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} x + C_{lm} y$$

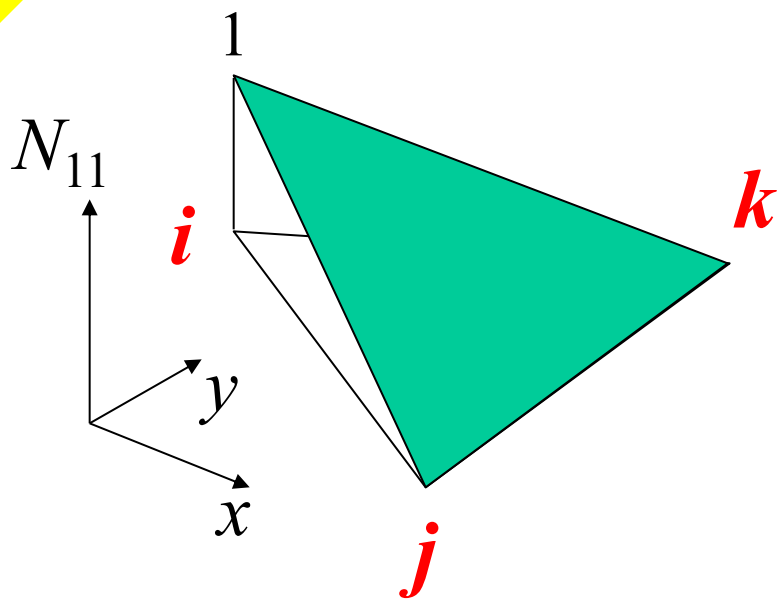
$$\begin{cases} A_{11} + B_{11}x_i + C_{11}y_i = 1 \\ A_{11} + B_{11}x_j + C_{11}y_j = 0 \\ A_{11} + B_{11}x_k + C_{11}y_k = 0 \end{cases}$$



Piano passante da 0 su  $j-k$  e da 1 su  $i$

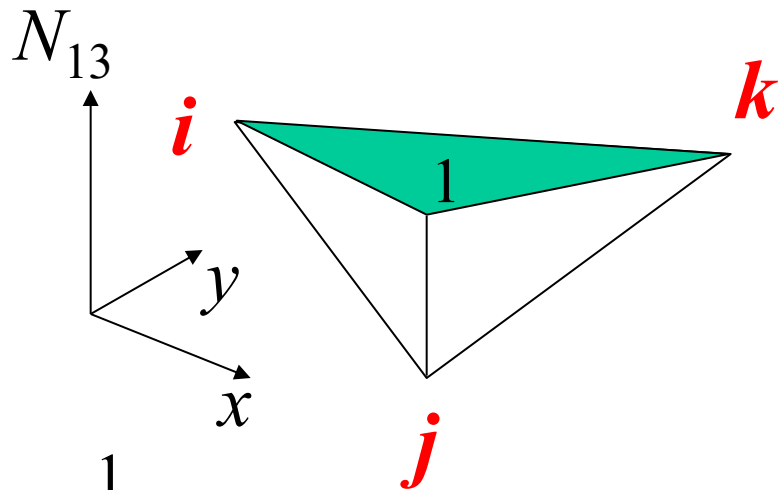
Sistema di equazioni lineari  $3 \times 3$  da risolvere nelle incognite  $A_{11}$ ,  $B_{11}$ ,  $C_{11}$



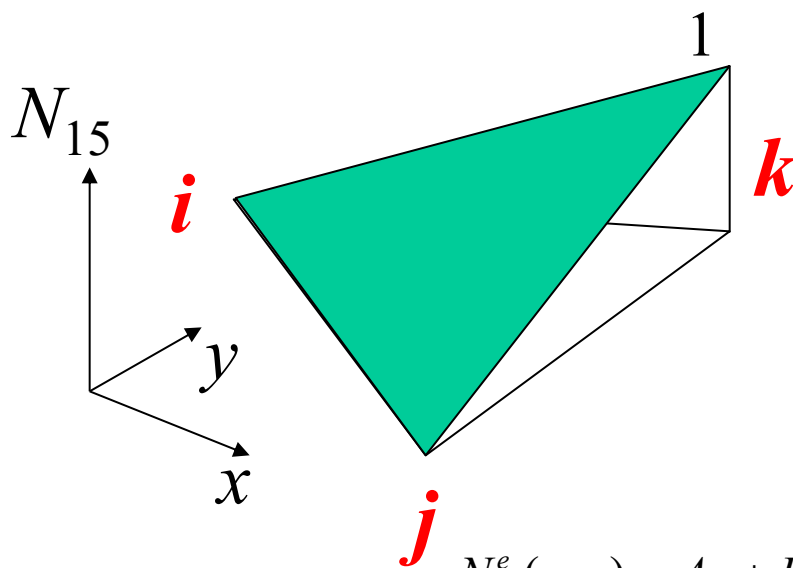


$$N_{11}^e(x, y) = A_{11} + B_{11} x + C_{11} y$$

Si applica la stessa forma lineare a tutte le componenti



$$N_{13}^e(x, y) = A_{13} + B_{13} x + C_{13} y$$



$$N_{15}^e(x, y) = A_{15} + B_{15} x + C_{15} y$$

# Metodo di Cramer

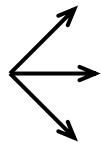
$$\begin{cases} A_{11} + B_{11}x_i + C_{11}y_i = 1 \\ A_{11} + B_{11}x_j + C_{11}y_j = 0 \\ A_{11} + B_{11}x_k + C_{11}y_k = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ B_{11} \\ C_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 0 & x_j & y_j \\ 0 & x_k & y_k \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{\Delta}$$

$$B_{11} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & y_i \\ 1 & 0 & y_j \\ 1 & 0 & y_k \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{y_j - y_k}{\Delta}$$

$$C_{11} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & x_i & 1 \\ 1 & x_j & 0 \\ 1 & x_k & 0 \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{x_k - x_j}{\Delta}$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$



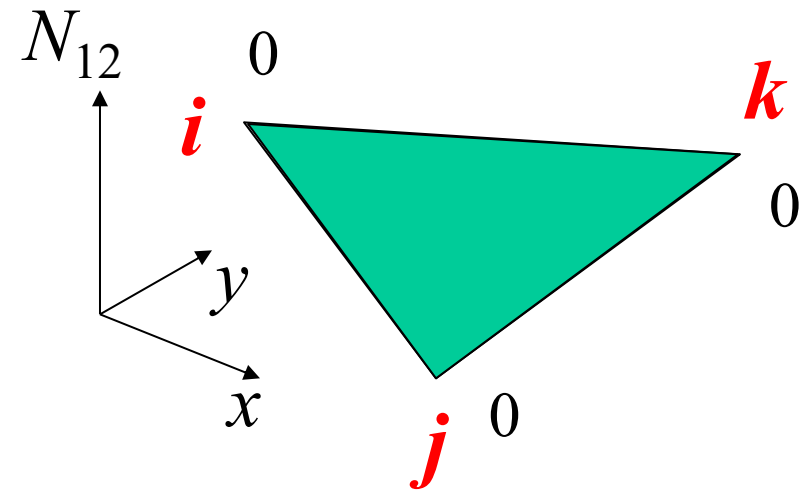
Contributo nullo degli spostamenti nodali  $y$  sullo spostamento  $x$  del generico punto (e viceversa):

$$N_{12}^e(x, y) = A_{12} + B_{12} x + C_{12} y$$

$$\begin{cases} N_{12}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{12}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{12}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{12} + B_{12}x_i + C_{12}y_i = 0 \\ A_{12} + B_{12}x_j + C_{12}y_j = 0 \\ A_{12} + B_{12}x_k + C_{12}y_k = 0 \end{cases}$$

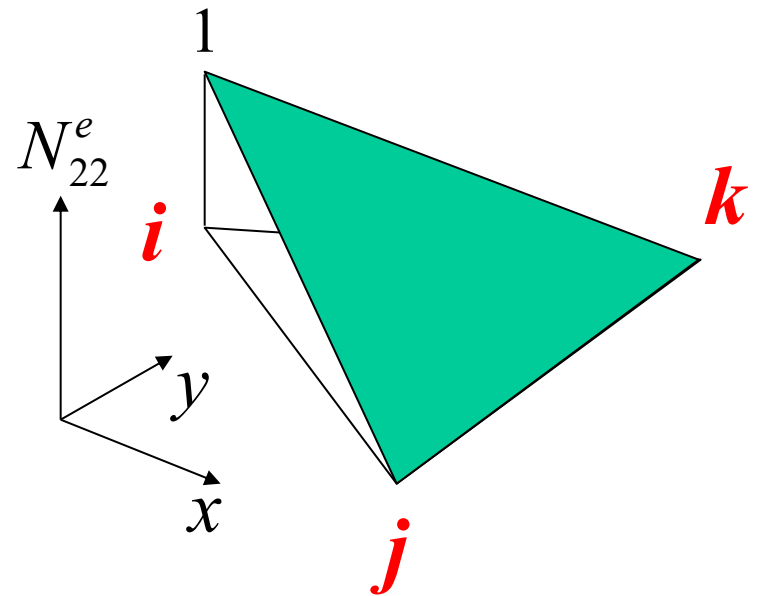
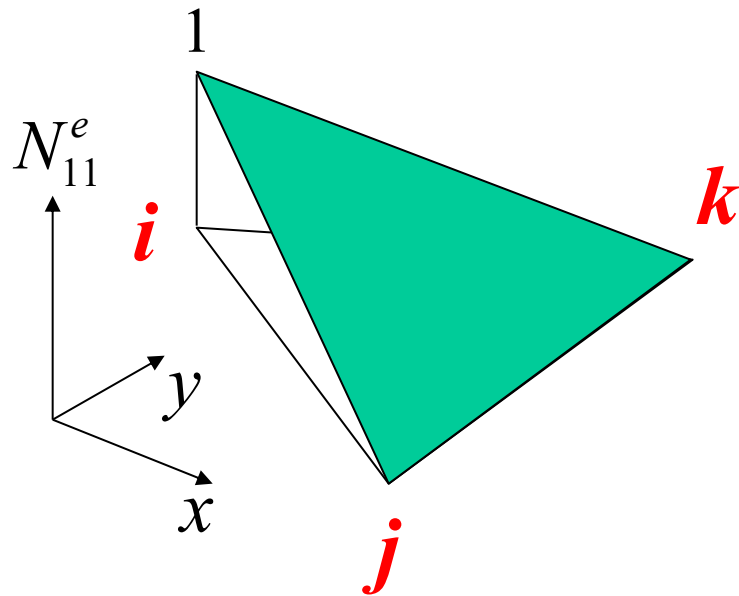
$$\begin{cases} A_{12} = 0 \\ B_{12} = 0 \\ C_{12} = 0 \end{cases}$$



Inoltre il contributo su  $x$  degli spostamenti nodali  $x$  è lo stesso del contributo su  $y$  degli spostamenti nodali  $y$

*Questo concetto può essere interpretato come isotropia*

Essendo la f.ne di forma un piano che deve passare da 1,0,0, necessariamente è lo stesso:



$$\begin{cases} N_{11}^e(x, y) = N_{22}^e(x, y) \\ N_{13}^e(x, y) = N_{24}^e(x, y) \\ N_{15}^e(x, y) = N_{26}^e(x, y) \end{cases}$$

Matrice complessiva delle funzioni di forma:

$$\underbrace{\{u(x, y)\}}_{2 \times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix}}_{2 \times 1} = \underbrace{[N^e(x, y)]}_{2 \times 6} \underbrace{\{U^e\}}_{6 \times 1}$$

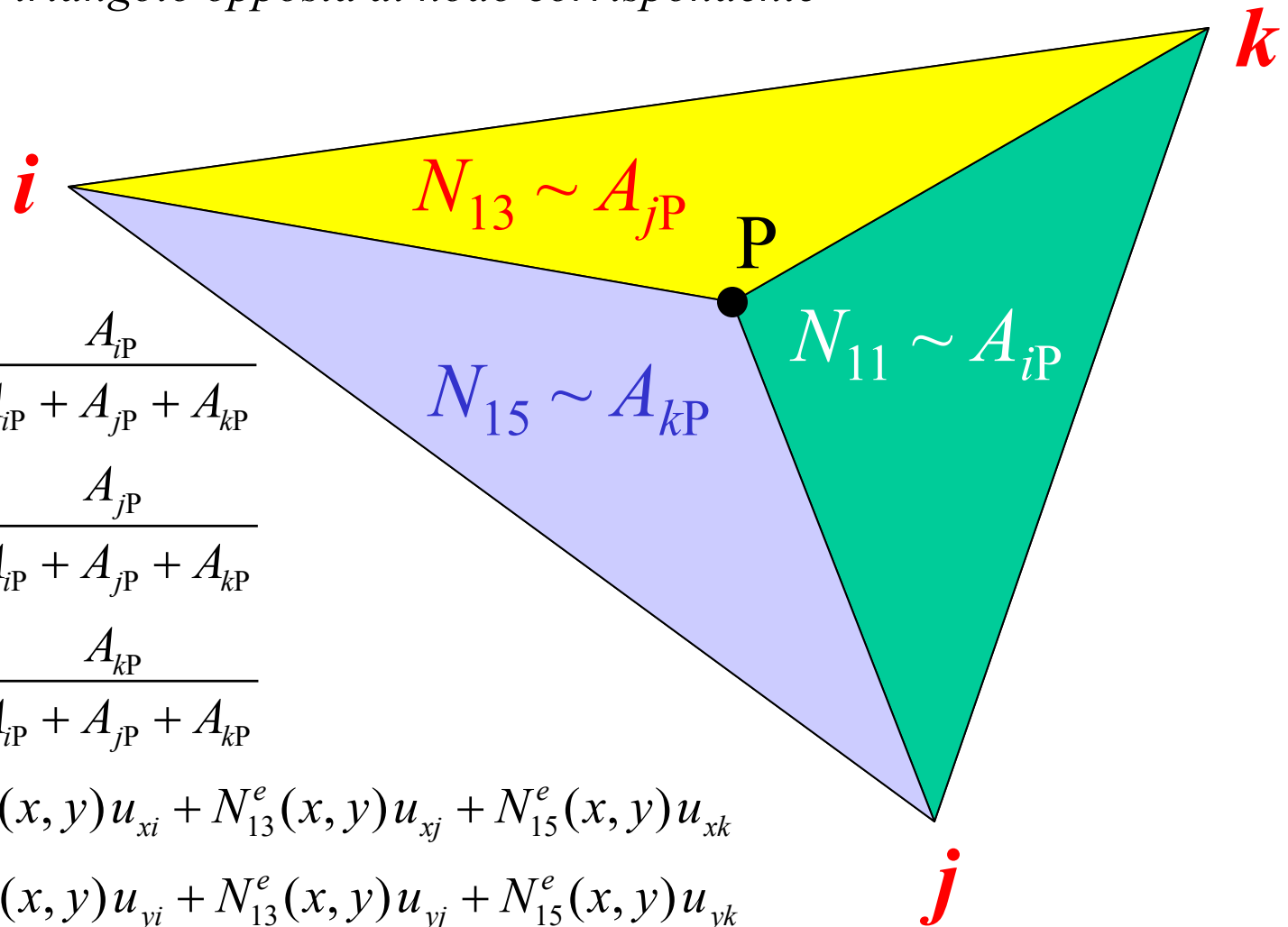
$$[N^e(x, y)] =$$

$$\begin{bmatrix} N_{11}^e(x, y) & 0 & N_{13}^e(x, y) & 0 & N_{15}^e(x, y) & 0 \\ 0 & N_{22}^e = N_{11}^e & 0 & N_{24}^e = N_{13}^e & 0 & N_{26}^e = N_{15}^e \end{bmatrix}$$

In definitiva le componenti della matrice delle funzioni di forma non nulle sono 6 su 12 di cui distinte solo 3

Interpretazione geometrica:

*Il peso di ciascuna funzione di forma, per la linearità, è proporzionale all'area del triangolo opposta al nodo corrispondente*



$$N_{11}^e = N_{22}^e = \frac{A_{iP}}{A_{iP} + A_{jP} + A_{kP}}$$

$$N_{13}^e = N_{24}^e = \frac{A_{jP}}{A_{iP} + A_{jP} + A_{kP}}$$

$$N_{15}^e = N_{26}^e = \frac{A_{kP}}{A_{iP} + A_{jP} + A_{kP}}$$

$$u_x(x, y) = N_{11}^e(x, y)u_{xi} + N_{13}^e(x, y)u_{xj} + N_{15}^e(x, y)u_{xk}$$

$$u_y(x, y) = N_{11}^e(x, y)u_{yi} + N_{13}^e(x, y)u_{yj} + N_{15}^e(x, y)u_{yk}$$

# Calcolo delle deformazioni

Spostamenti

Deformazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{array} \right\} = [L] \{u(x, y)\}$$

*N.B.: L'operazione Matrice per Vettore è da intendersi come uno schema di collocazione dei simboli di derivata invece che un prodotto, che però segue le stesse regole del prodotto matriciale*

## Sostituzione delle f.ni di forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{ \varepsilon(x, y) \} & = & [L] & \{ u(x, y) \} & \{ u(x, y) \} & = & [N(x, y)] \{ U^e \} \\
 3 \times 1 & & 3 \times 2 & 2 \times 1 & 2 \times 1 & & 2 \times 6 & 6 \times 1 \\
 & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & 
 \end{array}$$

Si applicano le derivate alle funzioni di forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{ \varepsilon \} & = & [L] & [N] & \{ U^e \} & = & [B] & \{ U^e \} \\
 3 \times 1 & & & & & & 3 \times 6 & 6 \times 1
 \end{array}$$

## Contenuto matrice $[B]$

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{13}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{11}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{13}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial y} & \frac{\partial N_{11}}{\partial x} & \frac{\partial N_{13}}{\partial y} & \frac{\partial N_{13}}{\partial x} & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} \end{bmatrix}$$



## Contenuto matrice $[B]$

$$N_{11} = A_{11} + B_{11}x + C_{11}y$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} = B_{11} = \frac{y_j - y_k}{\Delta}$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial y} = C_{11} = \frac{x_k - x_j}{\Delta}$$

Si ottiene:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & C_{15} \\ C_{11} & B_{11} & C_{13} & B_{13} & C_{15} & B_{15} \end{bmatrix}$$

N.B.: La matrice  $[B]$  in questo caso (elemento triangolare 2D) contiene solo costanti, dato che le f.ni di forma sono lineari. Tuttavia, nel caso in cui le f.ni di forma fossero di ordine superiore al primo la matrice  $[B]$  conterrebbe delle funzioni in  $(x,y)$

## Relazioni costitutive

Esempio 1: stato piano di Tensione – *Plane Stress*  
 (materiale lineare, elastico, omogeneo e isotropo)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{U^e\}$$

## Relazioni costitutive

Esempio 2: stato piano di Deformazione – *Plane Strain*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{array} \quad \rightarrow \quad [D'] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D'] [B] \{U^e\}$$

# Valutazione di $[K^e]$

## Principio dei Lavori Virtuali

$$L_{\text{est}} = L_{\text{int}}$$

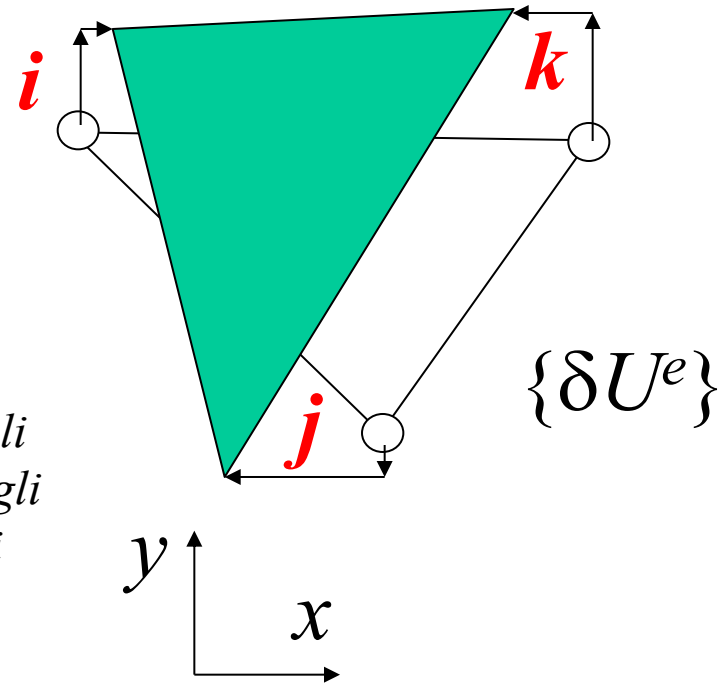
*Carichi nodali veri ×  
spost. nodali virtuali*

*Tensioni vere ×  
deformazioni virtuali  
congruenti con quegli  
spostamenti virtuali*

$$L_{\text{est}} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\}$$

Spost. virtuali

Carichi effettivi





$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\delta \varepsilon\} = [B] \{\delta U^e\}$$

$$\{\delta \varepsilon\}^T = \{\delta U^e\}^T [B]^T$$



$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta U^e\}^T [B]^T \{\sigma\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$



$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\delta \varepsilon\} = [B] \{\delta U^e\}$$

$$\{\delta \varepsilon\}^T = \{\delta U^e\}^T [B]^T$$



$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta U^e\}^T [B]^T \{\sigma\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$



$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon\} dV$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$



$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D] [B] \{U^e\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{U^e\}$$

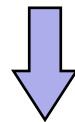
$$\{\varepsilon\} = [B] \{U^e\}$$

$$L_{\text{est}} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\}$$

$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$

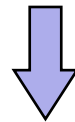


$$\{\delta U^e\}^T \{P^e\} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$



*Affinché l'uguaglianza sia valida per qualunque spostamento virtuale:*

$$\{P^e\} = \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$



*Per definizione di matrice di rigidità:*

$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

## Applicazione

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV$$

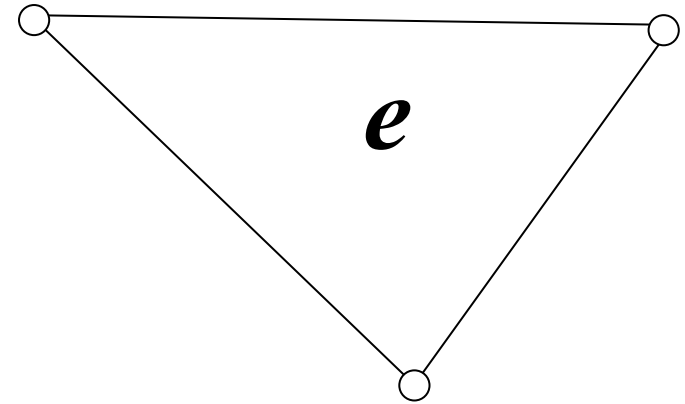
$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & C_{15} \\ C_{11} & B_{11} & C_{13} & B_{13} & C_{15} & B_{15} \end{bmatrix}$$

*Es.: Pl. Stress*

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

*In questo caso (f.ni di forma lineari e quindi [B] costante) si può isolare il volume e scrivere la matrice di rigidezza*

$$[K^e] = [B]^T [D][B] \int_V dV = [B]^T [D][B] V$$





## Unità di misura

*Elemento Piano: in realtà il "volume" degli elementi piani sarebbe un area, coerentemente le forze sono per unità di lunghezza (profondità) e quindi la rigidezza è una forza per unità lunghezza al quadrato*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \nearrow & [K^e] & = & [B]^T & [D] & [B] & V \nwarrow \\
 \text{N mm}^{-2} & & & \text{mm}^{-1} & \text{N mm}^{-2} & \text{mm}^{-1} & \text{mm}^2
 \end{array}$$

$$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{1}{\text{mm}} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{1}{\text{mm}} \text{mm}^2$$



## Unità di misura

Elemento Piano:

$$\begin{array}{c}
 \nearrow \left[ K^e \right] = \left[ B \right]^T \left[ D \right] \left[ B \right] V \nwarrow \\
 \text{N mm}^{-2} \qquad \text{mm}^{-1} \quad \text{N mm}^{-2} \quad \text{mm}^{-1} \qquad \text{mm}^2
 \end{array}$$

$$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{1}{\text{mm}} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{1}{\text{mm}} \text{mm}^2$$

Elemento Solido 3D:

$$\begin{array}{c}
 \nearrow \left[ K^e \right] = \left[ B \right]^T \left[ D \right] \left[ B \right] V \nwarrow \\
 \text{N mm}^{-1} \qquad \text{mm}^{-1} \quad \text{N mm}^{-2} \quad \text{mm}^{-1} \qquad \text{mm}^3
 \end{array}$$

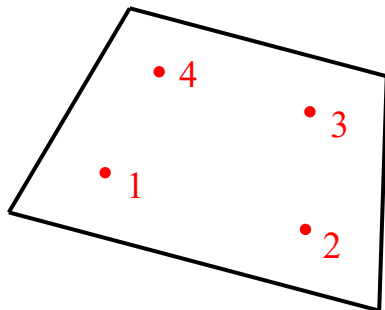
$$\frac{\text{N}}{\text{mm}} = \frac{1}{\text{mm}} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{1}{\text{mm}} \text{mm}^3$$

Calcolo della matrice  $[K^e]$  nel caso in cui le f.ni di forma siano non lineari  $\rightarrow [B]$  non costante

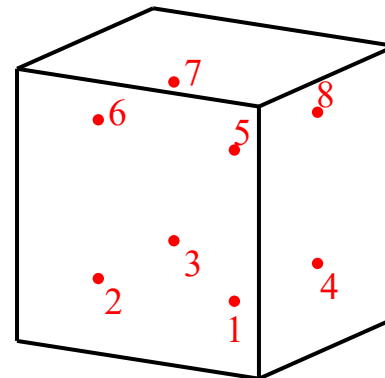
$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV = ?$$

*L'integrale è calcolato numericamente valutando la funzione in punti opportuni: **punti di integrazione di Gauss** (Gaussian integration points), e svolgendo una sommatoria con determinati pesi (formule di quadratura)*

Esempio 2D



Esempio 3D

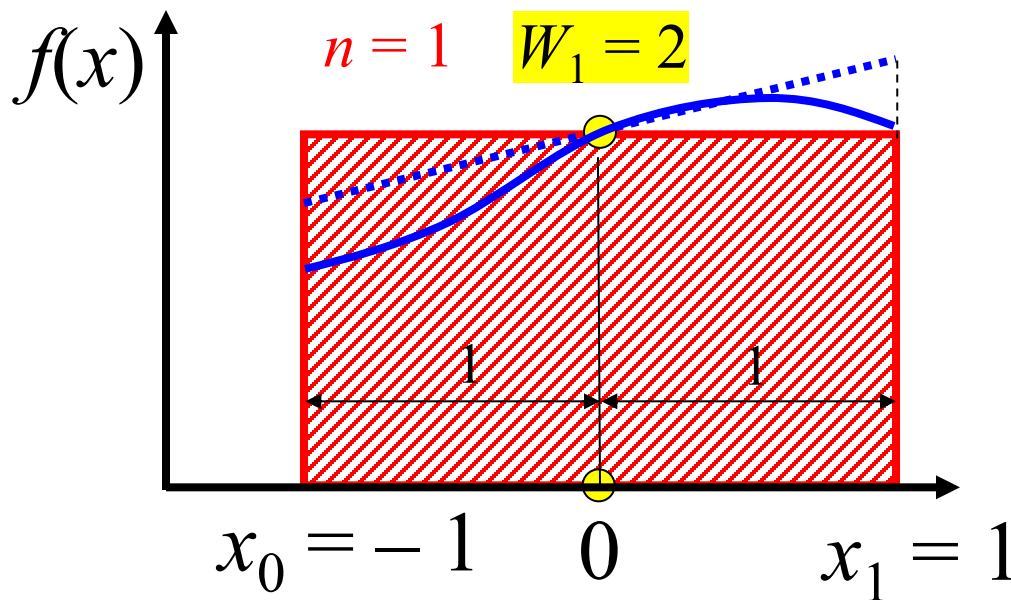


L'integrazione secondo Gauss è molto efficiente

Esempio 1D

Integrale da calcolare  $\rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \leftarrow$  Valore della f.ne nel punto  $x_i$

$\uparrow$   
Peso



1) Si definisce  $n$

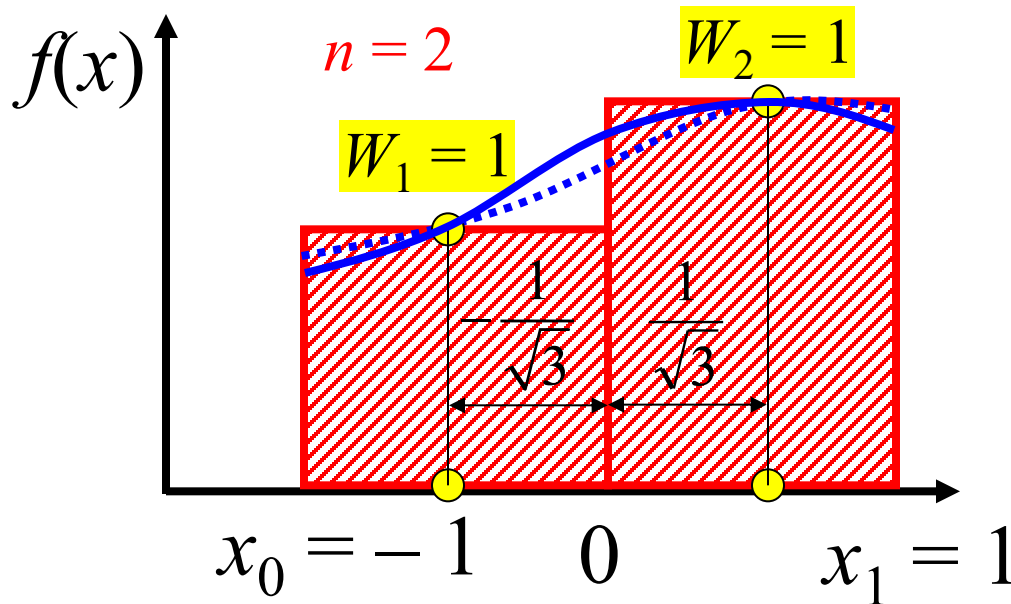
2) Esistono delle combinazioni  $x_i$  -  $W_i$  per valutare in modo esatto l'integrale di un polinomio al più di grado  $2n-1$ , ottenendo tendenzialmente un errore limitato anche per f.ni non polinomiali ma con andamento simile

L'integrazione secondo Gauss è molto efficiente

Esempio 1D

Integrale da calcolare  $\rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \leftarrow$  Valore della f.ne nel punto  $x_i$

↑  
Peso



1) Si definisce  $n$

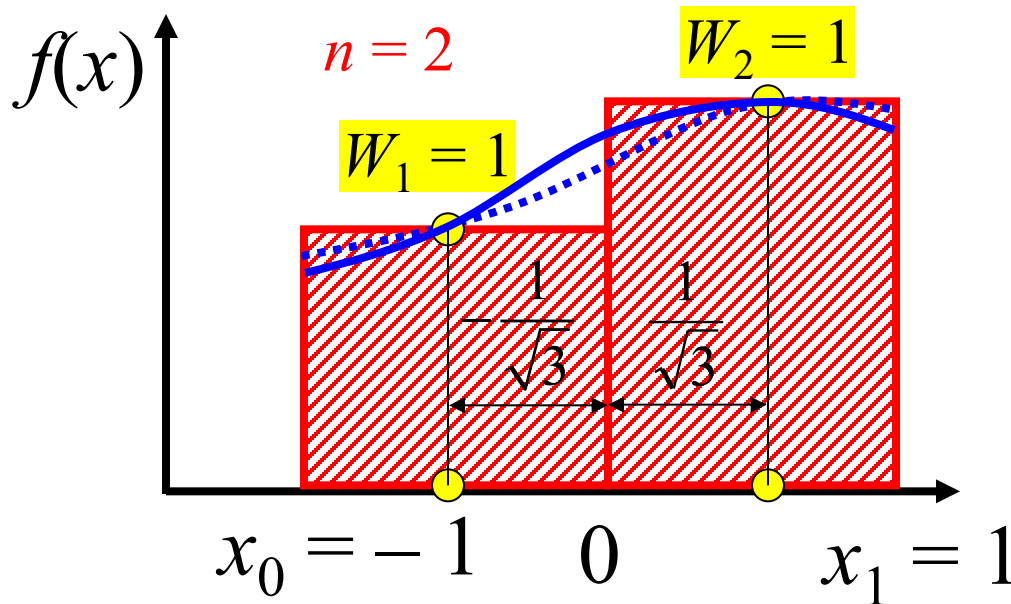
2) Esistono delle combinazioni  $x_i - W_i$  per valutare in modo esatto l'integrale di un polinomio al più di grado  $2n-1$ , ottenendo tendenzialmente un errore limitato anche per f.ni non polinomiali ma con andamento simile

L'integrazione secondo Gauss è molto efficiente

Esempio 1D

Integrale da calcolare  $\rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \leftarrow$  Valore della f.ne nel punto  $x_i$

↑  
Peso



Corollario: tutte le funzioni di grado minore o uguale a  $2n-1$ , (ammesso che esistano) che passano per quei punti hanno tutte lo stesso integrale su quel dominio.

Ad esempio per  $n = 2$ , la retta costante che passa per 2 punti non esiste, se sono di altezza diversa, mentre la retta che congiunge i due punti avrà un valore di integrale che sarà lo stesso a tutte le quadratiche e le cubiche (infinite) che passano per quei due punti.

L'integrazione secondo Gauss è molto efficiente

Esempio 1D

Integrale da calcolare  $\rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \leftarrow$  Valore della f.ne nel punto  $x_i$

$\uparrow$   
Peso

N.ro punti di integrazione, $n$	Grado del polinomio, $2n-1$	Posizione dei punti di integrazione nell'intervallo $[-1, 1]$ , $x_i$	Pesi da applicare nella sommatoria, $W_i$
1	1	0	2
2	3	$-1/\sqrt{3} = -0.577350\dots$ $1/\sqrt{3} = 0.577350\dots$	1 1
3	5	$-\sqrt{3/5} = -0.774596\dots$ 0 $\sqrt{3/5} = 0.774596\dots$	$5/9 = 0.555555\dots$ $8/9 = 0.888888\dots$ $5/9 = 0.555555\dots$
4	7	...	...

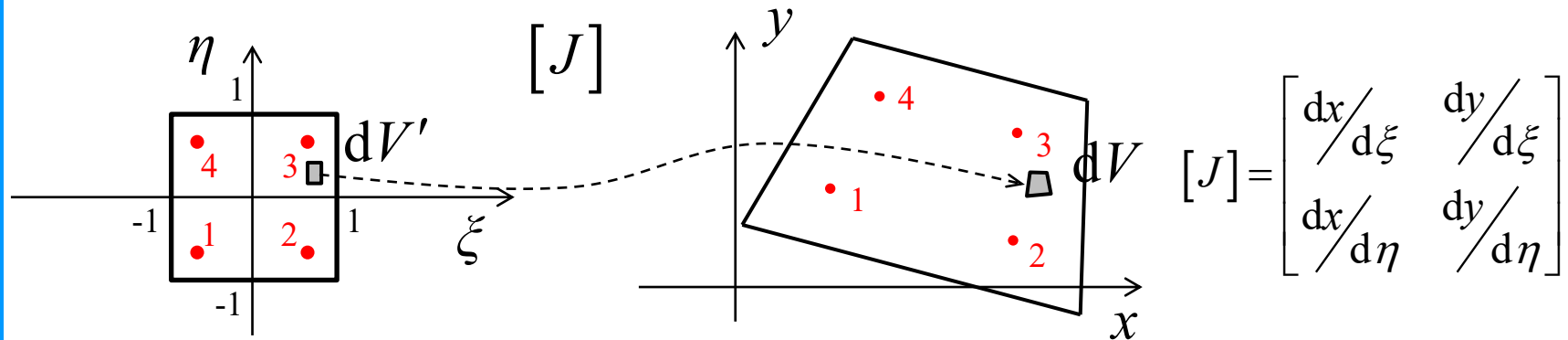
[https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian\\_quadrature](https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature)

Number of points, $n$	Points, $x_i$		Weights, $w_i$	
1	0		2	
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pm 0.57735\dots$	1	
3	0		$\frac{8}{9}$	0.888889...
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\pm 0.774597\dots$	$\frac{5}{9}$	0.555556...
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\pm 0.339981\dots$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$	0.652145...
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\pm 0.861136\dots$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$	0.347855...
5	0		$\frac{128}{225}$	0.568889...
	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\pm 0.538469\dots$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}$	0.478629...
	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\pm 0.90618\dots$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}$	0.236927...

Calcolo della matrice  $[K^e]$  nel caso in cui le f.ni di forma siano non lineari  $\rightarrow [B]$  non costante

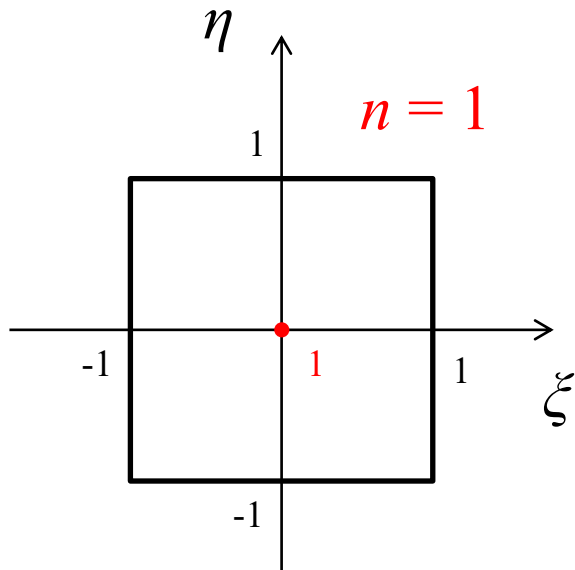
$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV = ?$$

Di fatto la parametrizzazione è inizialmente definita sul dominio “canonico”, su cui sono impostate le posizioni dei punti di Gauss. Quindi nell'integrazione compare il determinante della matrice di Jacobi (o Jacobiano)

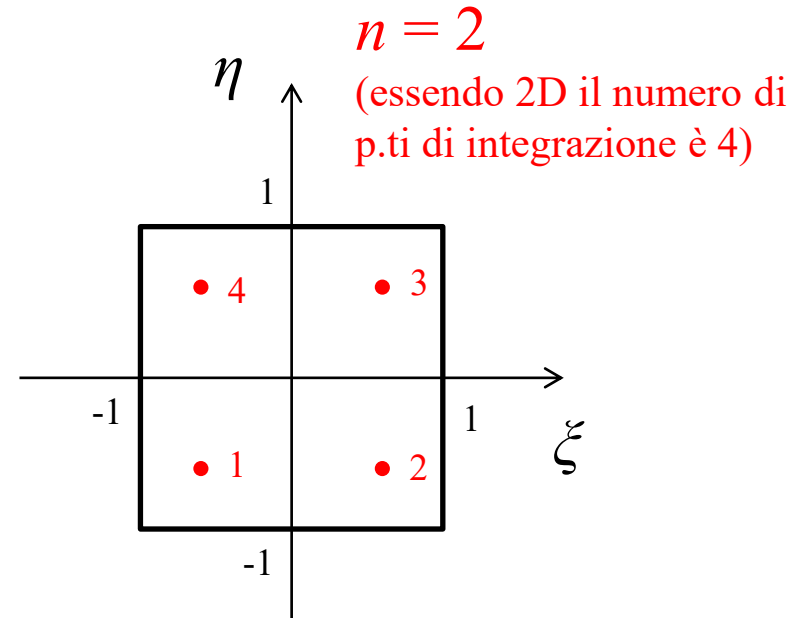


$$\begin{aligned}
 [K^e] &= \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_{V'} [B']^T [D][B'] |[J]| dV' = \\
 &= \sum_{i=1}^n W_i [B'(\xi_i, \eta_i)]^T [D][B'(\xi_i, \eta_i)] |[J(\xi_i, \eta_i)]|
 \end{aligned}$$

# Integrazione di Gauss, esempi 2D



$$1: \xi_1 = 0, \eta_1 = 0 \rightarrow W_1 = 4$$



$$1: \xi_1 = -1/\sqrt{3}, \eta_1 = -1/\sqrt{3} \rightarrow W_1 = 1$$

$$2: \xi_1 = 1/\sqrt{3}, \eta_1 = -1/\sqrt{3} \rightarrow W_2 = 1$$

$$3: \xi_1 = 1/\sqrt{3}, \eta_1 = 1/\sqrt{3} \rightarrow W_3 = 1$$

$$4: \xi_1 = -1/\sqrt{3}, \eta_1 = 1/\sqrt{3} \rightarrow W_4 = 1$$



# ANALISI DELL'INTERO MODELLO (invece che singolo elemento)

Congruenza



$[B]$

Costitutive



$[D]$

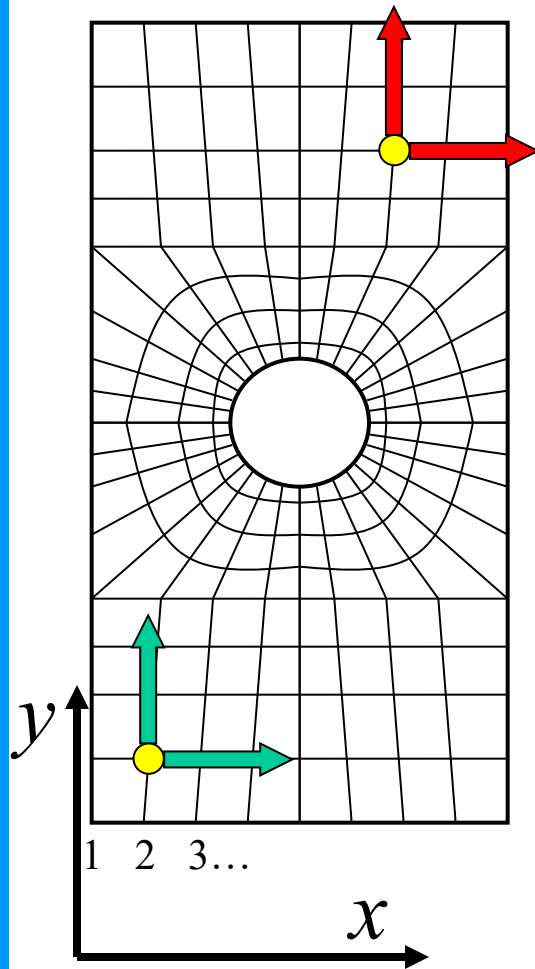
Equilibrio



Garantito per il singolo  
elemento (non ancora per  
l'intero modello)

## Vettori degli spostamenti e dei carichi esterni per l'intero modello

*Esempio con elementi quadrilateri invece che triangolari*



$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ - \\ - \\ - \\ u_{yN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ - \\ - \\ u_{n_{gdl}} \end{Bmatrix}$$

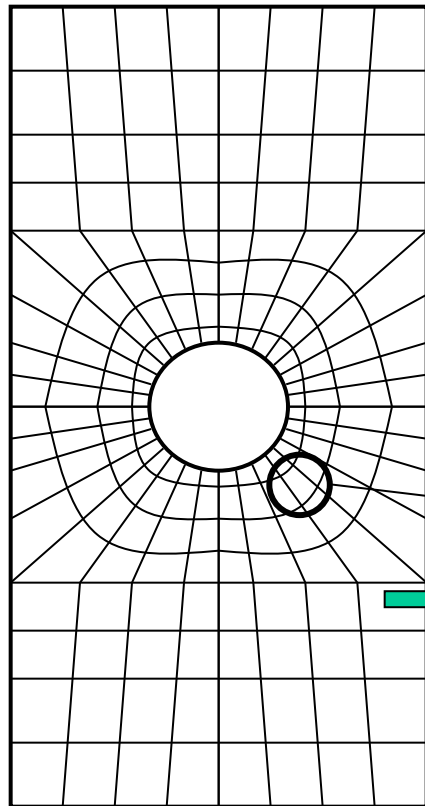
Vettore degli **spostamenti** di tutti i nodi del modello

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ - \\ - \\ - \\ f_{yN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ - \\ - \\ - \\ f_{n_{gdl}} \end{Bmatrix}$$

Vettore delle **forze esterne** al modello su tutti i nodi

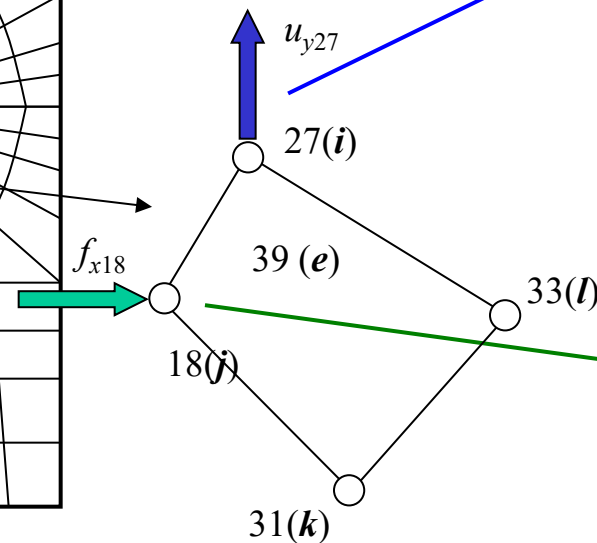


# Vettori degli spostamenti e dei carichi esterni per l'intero modello



*Ad es.: lo spost.  $y$  del nodo  $i$  è il gdl 54, perché è il nodo num. 27, mentre la forza  $x$  del nodo  $j$  è il gdl 35 essendo il nodo 18*

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ u_{54} = u_{y27} \\ - \\ - \\ u_{n_{gdl}} \end{Bmatrix}$$



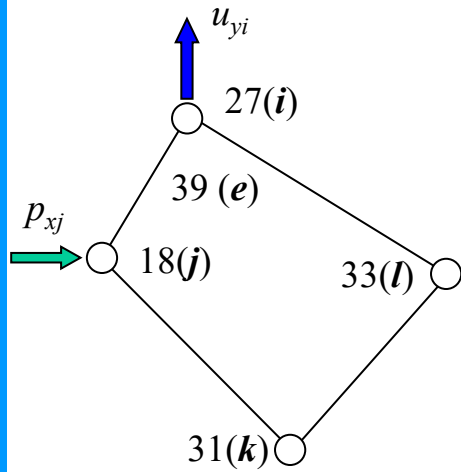
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_{35} = f_{x18} \\ - \\ - \\ f_{n_{gdl}} \end{Bmatrix}$$

*Considerato l'elemento singolarmente, la forza è relativa al gdl 3 e lo spost. si riferisce al gdl 2, quindi il relativo termine di rigidezza è  $k_{3,2}^e$*

Es.: elementi quadrilateri

$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ p_{xj} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{8 \times 1} = \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ p_3^e \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^e & k_{1,2}^e & k_{1,3}^e & k_{1,4}^e & \dots & k_{1,8}^e \\ k_{2,1}^e & k_{2,2}^e & k_{2,3}^e & k_{2,4}^e & \dots & k_{2,8}^e \\ k_{3,1}^e & k_{3,2}^e & k_{3,3}^e & k_{3,4}^e & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{8 \times 8} \left\{ \begin{matrix} \dots \\ u_2^e \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{8 \times 1}$$

**Matrice di rigidezza del singolo elemento**

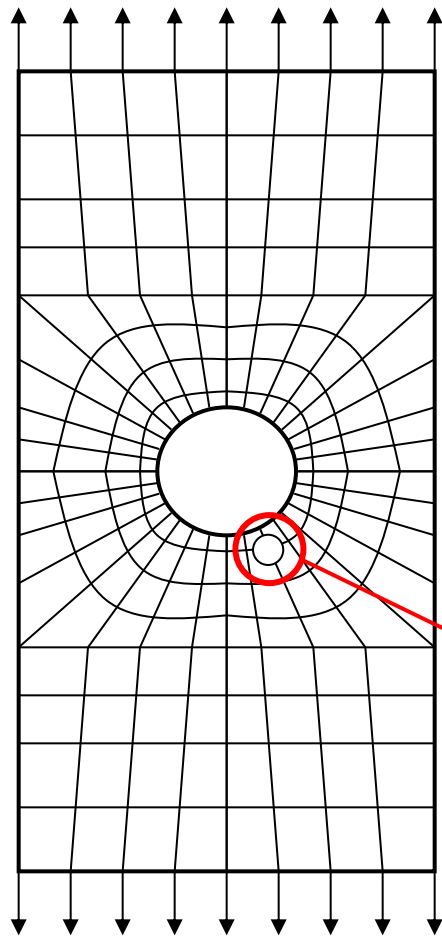


$$\{P^e\}^* = [K^e]^* \{U\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{n_{gdl} \times 1} = \left\{ \begin{matrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & k_{35,54}^{e*} (= k_{3,2}^e) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\}_{n_{gdl} \times n_{gdl}} \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{54} (= u_2^e) \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{n_{gdl} \times 1}$$

$n_{gdl} \times 1$  (di cui 8  $\neq$  0)                       $n_{gdl} \times n_{gdl}$  (di cui 64  $\neq$  0)                       $n_{gdl} \times 1$

**Matrice di rigidezza "ESPANSA" per il singolo elemento**

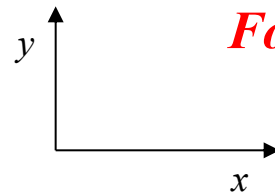
## Forze sui nodi: Forze esterne / Forze da nodo a elem. adiacenti



$$f_{xj}, p_{xj}^e$$

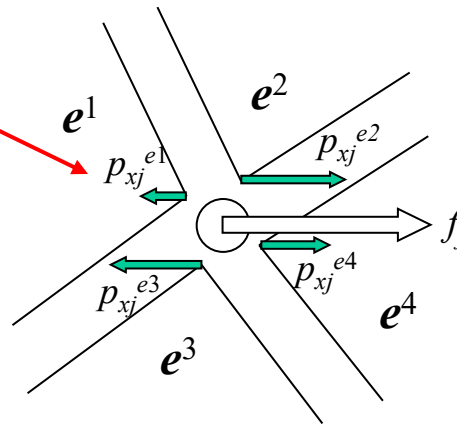
*Forza applicata nel  
nodo "j"  
all'elemento "e"*

*Forza esterna*



$p_{xj}^e$  sono le forze che il nodo esercita sull'elemento, es. in dir.  $x$  (vedi l'analisi del singolo elemento)

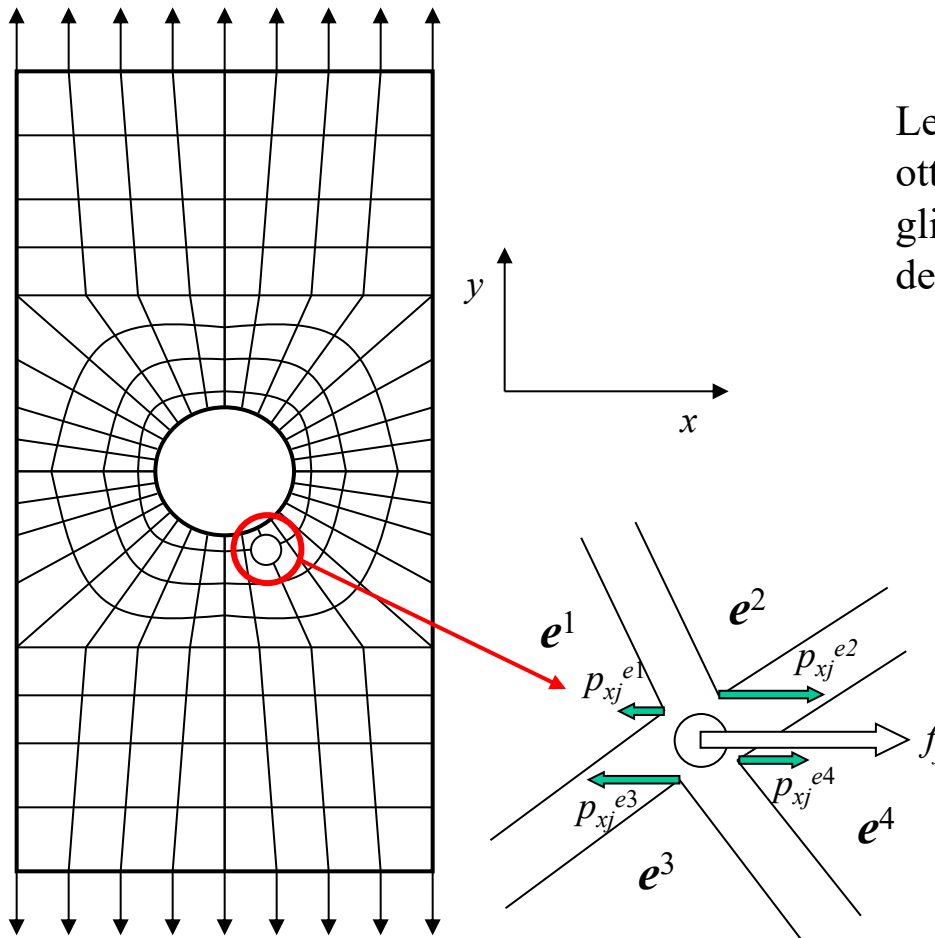
Per il principio di Az./Reaz. si conteggiano nell'eq. del nodo cambiate di segno



$$f_{xj} - \sum_{e=1}^{n_e} p_{xj}^e = 0$$

Si considerano tutti e soli gli elementi che *convergono* al nodo considerato conteggiati come  $1, \dots, n_e$

## Forze sui nodi: Forze esterne / Forze da nodo a elem. adiacenti



Le equazioni di equilibrio per tutti i nodi si ottengono semplicemente sommando, su tutti gli elementi del modello:  $1, \dots, n_E$ , i vettori delle forze nodali espansi:

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_E} \{P^e\}^*$$

*Le forze che agiscono su ciascun nodo per gli elementi connessi a quel nodo, si sommano, mentre gli altri elementi danno contributo nullo*

$$\{P^e\}^* = [K^e]^* \{U\}$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_N} \{P^e\}^* = \sum_{e=1}^{n_N} [K^e]^* \{U\}$$

Si può introdurre le matrici di rigidezza “ESPANSE” per ciascun elemento, ottenendo a secondo membro la somma

Si ottiene come **matrice di rigidezza dell'intera struttura** la somma delle matrici espanse di ciascun elemento

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_E} [K^e]^*$$

In definitiva si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

$n_{\text{gdl}} \times 1$                        $n_{\text{gdl}} \times n_{\text{gdl}}$                        $n_{\text{gdl}} \times 1$

## Soluzione

$$\{F\} = [K]\{U\}$$



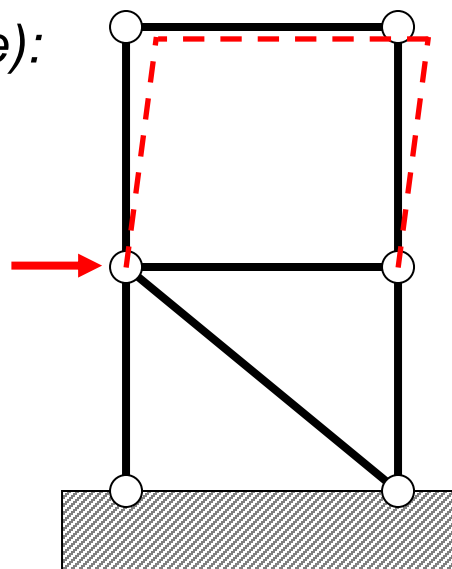
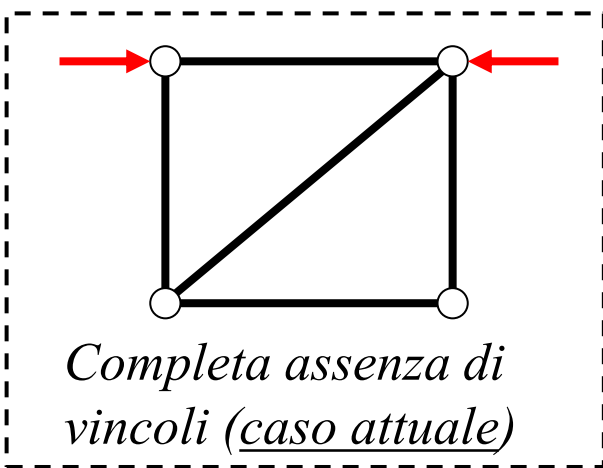
$$\{U\} = [K]^{-1}\{F\}$$

$$\text{c.n.s.: } \det [K] \neq 0$$

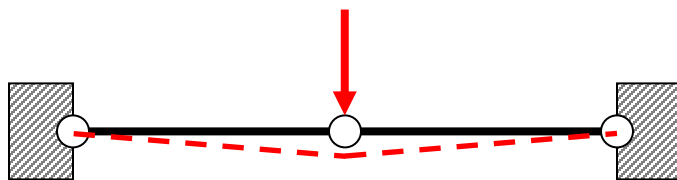
Per una struttura non vincolata però:  $\det. = 0$

$\det [K] = 0 \longrightarrow$  Struttura **labile**

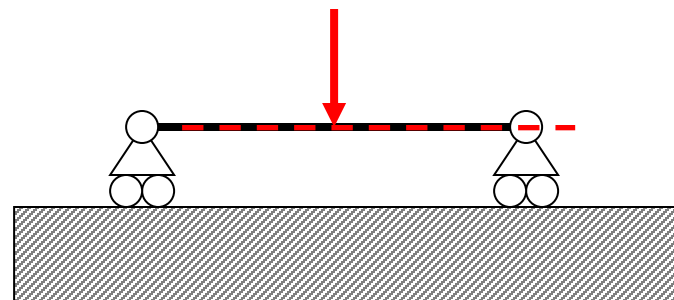
Possibili esempi (strutture a trave):



*Anche se il carico non agisce secondo la labilità, oppure è auto-equilibrato, la matrice di rigidezza è comunque **singolare***



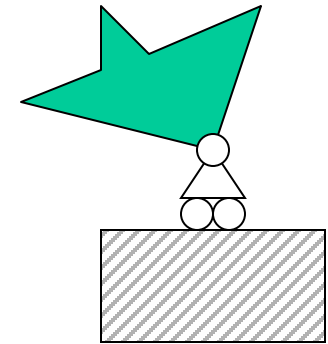
Struttura non completamente vincolata



# Vincoli

Vincolare = assegnare “a priori” il valore di una delle componenti di spostamento (g.d.l.)

$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ - \\ f_m \\ - \\ f_{n_{\text{gdl}}} \end{matrix} \right\} \\
 \uparrow \\
 n_{\text{gdl}} \times 1
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 \left[ \begin{array}{ccccccc}
 k_{11} & k_{12} & - & - & k_{1m} & - & k_{1n_{\text{gdl}}} \\
 k_{21} & k_{22} & - & - & k_{2m} & - & k_{2n_{\text{gdl}}} \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 k_{m1} & k_{m2} & - & - & k_{m,m} & - & k_{mn_{\text{gdl}}} \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 k_{n_{\text{gdl}}1} & k_{n_{\text{gdl}}2} & - & - & k_{n_{\text{gdl}}m} & - & k_{n_{\text{gdl}}n_{\text{gdl}}}
 \end{array} \right]
 \left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_m \\ - \\ u_{n_{\text{gdl}}} \end{matrix} \right\} \\
 \uparrow \\
 n_{\text{gdl}} \times n_{\text{gdl}}
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \uparrow \\
 n_{\text{gdl}} \times 1
 \end{matrix}$$

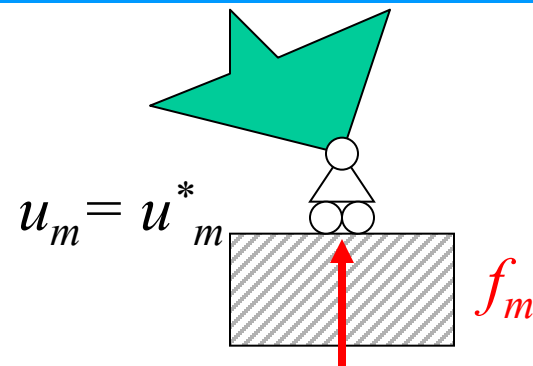


Es.:

$$u_m = 0$$

eventualmente  
anche un  
valore non  
nullo

$f_m$  è la reazione vincolare,  
non è nota, ed infatti diventa un'incognita



$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ - \\ f_m \\ - \\ f_{n_{\text{gdl}}} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} u_m^* \left. \begin{matrix} k_{1m} \\ k_{2m} \\ - \\ - \\ k_{m,m} \\ - \\ k_{n_{\text{gdl}}m} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & - & k_{1m-1} & k_{1m+1} & - & k_{1n_{\text{gdl}}} \\ k_{21} & k_{22} & - & k_{2m-1} & k_{2m+1} & - & k_{2n_{\text{gdl}}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m1} & k_{m2} & - & k_{m,m-1} & k_{m,m+1} & - & k_{mn_{\text{gdl}}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{\text{gdl}}1} & k_{n_{\text{gdl}}2} & - & k_{n_{\text{gdl}}m-1} & k_{n_{\text{gdl}}m+1} & - & k_{n_{\text{gdl}}n_{\text{gdl}}} \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ u_{m-1} \\ u_{m+1} \\ - \\ u_{n_{\text{gdl}}} \end{matrix} \right\}
 \end{matrix}$$

$n_{\text{gdl}} \times 1$ 
 $n_{\text{gdl}} \times (n_{\text{gdl}} - 1)$ 
 $(n_{\text{gdl}} - 1) \times 1$

# Introduzione vincolo $\rightarrow$ riduzione di 1 del numero di incognite ed equazioni (ordine)

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \underline{f_{m-1}} \\ f_{m+1} \\ \vdots \\ f_{n_{\text{gdl}}} \end{Bmatrix} - u_m^* \begin{Bmatrix} k_{1m} \\ k_{2m} \\ \vdots \\ \underline{k_{m-1,m}} \\ k_{m+1,m} \\ \vdots \\ k_{n_{\text{gdl}}m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m-1} & k_{1m+1} & \dots & k_{1n_{\text{gdl}}} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m-1} & k_{2m+1} & \dots & k_{2n_{\text{gdl}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{k_{m-1,1}} & \underline{k_{m-1,2}} & \dots & \underline{k_{m-1,m-1}} & \underline{k_{m-1,m+1}} & \dots & \underline{k_{m-1,n_{\text{gdl}}}} \\ k_{m+1,1} & k_{m+1,2} & \dots & k_{m+1,m-1} & k_{m+1,m+1} & \dots & k_{m+1,n_{\text{gdl}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_{\text{gdl}}1} & k_{n_{\text{gdl}}2} & \dots & k_{n_{\text{gdl}}m-1} & k_{n_{\text{gdl}}m+1} & \dots & k_{n_{\text{gdl}}n_{\text{gdl}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \underline{u_{m-1}} \\ u_{m+1} \\ \vdots \\ u_{n_{\text{gdl}}} \end{Bmatrix}$$

$(n_{\text{gdl}} - 1 \times 1)$        $(n_{\text{gdl}} - 1) \times (n_{\text{gdl}} - 1)$        $(n_{\text{gdl}} - 1) \times 1$

$$\{F'\} = [K']\{U'\}$$

Introducendo un opportuno insieme di vincoli la matrice (ridotta) del sistema diventa invertibile

$$[K'] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & - & k_{1m-1} & k_{1m+1} & - & k_{1n_{gdl}} \\ k_{21} & k_{22} & - & k_{2m-1} & k_{2m+1} & - & k_{2n_{gdl}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m-1,1} & k_{m-1,2} & \boxed{r} & k_{m-1,m-1} & k_{m-1,m+1} & - & k_{m-1,n_{gdl}} \\ k_{m+1,1} & k_{m+1,2} & - & k_{m+1,m-1} & \boxed{m} k_{m+1,m+1} & - & k_{m+1,n_{gdl}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{gdl}1} & k_{n_{gdl}2} & - & k_{n_{gdl}m-1} & k_{n_{gdl}m+1} & - & k_{n_{gdl}n_{gdl}} \end{bmatrix}$$

The matrix is annotated with three sets of lines and boxes: an orange vertical line and box labeled 'r', a red vertical line and box labeled 'm', and a green vertical line and box labeled 's'. These lines and boxes indicate the removal of rows and columns corresponding to the number of constraints.

Numero di righe (e colonne) eliminate pari al numero di vincoli  
ad esempio 3:  $m, r, s$  fino ad ottenere una condizione intrinsecamente isostatica oppure iperstatica, per cui:

$$\det [K'] \neq 0$$

Adesso si può risolvere l'incognita degli spostamenti ridotti (esclusi i vincoli già noti)

$$\{U'\} = [K']^{-1} \{F'\} \rightarrow \{U\} \text{ recuperando i vincoli noti}$$

Successivamente sono disponibili tutte le componenti di soluzione (anche deformazioni e tensioni) in tutti i punti della struttura, applicando le funzioni di forma:

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = [N^e(x, y)] \{U^e\}$$

Vettore di spostamenti dell'elemento estratto dal vettore complessivo di spostamenti inizialmente incogniti e adesso noti

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [B] \\ [D] \end{Bmatrix} \{U^e\}$$

Determinazione di deformazioni e tensioni

Infine si può ritrovare, per calcolo di rigidezza diretto, le reazioni vincolari incognite

$$f_m = \begin{bmatrix} k_{m,1} & k_{m,2} & \dots & k_m & \dots & k_{m,n_{\text{gdl}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ \vdots \\ u_{n_{\text{gdl}}} \end{Bmatrix}$$

← Incognite determinate  
← Vincolo(i) imposto(i)  
 ← Vettore completo  $\{U\}$

Ovviamente il numero di vincoli, e quindi di reazioni vincolari da trovare, non può essere soltanto 1 ma sarà maggiore o uguale al numero dei gradi di libertà del modello (es.: nel piano 3 e nello spazio 6 per corpi singoli)

# Elaborazione della matrice di rigidezza (ridotta)

$$[K'] = \begin{bmatrix} X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & X & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & X & X & X & X & 0 \\ & S & I & M & M & . & & X & X & X & X & X \\ & & & & & & & & X & X & X & X \\ & & & & & & & & & X & X & X \\ & & & & & & & & & & X & X \\ & & & & & & & & & & & X \end{bmatrix}$$

La matrice  $[K']$

- è simmetrica
- ha una struttura “a banda” attorno alla diagonale principale

Esistono alcuni metodi di soluzione del sistema / inv. della matrice, uno dei più comuni ed efficienti è il Metodo di Eliminazione di Gauss (Gaussian elimination), ovvero rendere il sistema triangolare

$$\begin{bmatrix}
 X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 X & X & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 X & X & X & X & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & X & 0 & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & X & X & X & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & X & X & X & X & X & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X & X \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X
 \end{bmatrix}$$

Iniziale

$$\begin{bmatrix}
 X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & X & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & X & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X
 \end{bmatrix}$$

Finale

N.B.: in questo modo non si determina la matrice inversa di  $[K]$  ma si ottengono direttamente le incognite  $\{U\}$

## Larghezza di banda (“bandwidth”)

X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0
X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0
X	X	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0
X	X	X	X	0	X	X	0	0	0	0	0
0	0	X	0	X	X	X	X	0	0	0	0
0	0	X	X	X	X	X	0	X	0	0	0
0	0	0	X	X	X	X	X	X	0	0	0
0	0	0	0	X	0	X	X	X	X	X	0
0	0	0	0	0	X	X	X	X	X	X	X
0	0	0	0	0	0	0	X	X	X	X	X
0	0	0	0	0	0	0	0	X	X	X	X

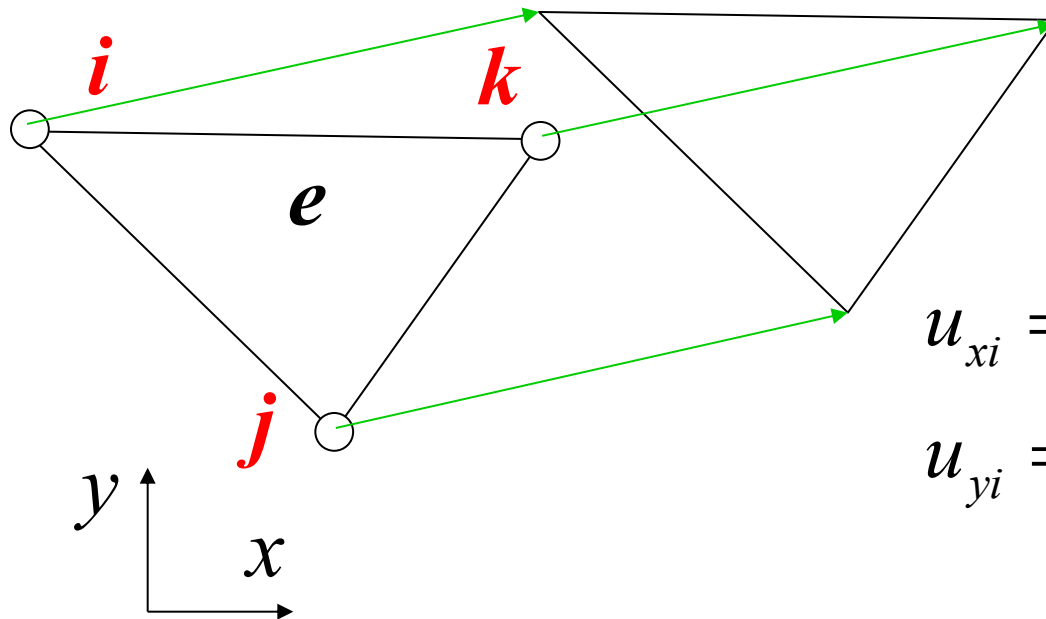
$$N^{\circ} \text{ operazioni} \approx (\text{largh. banda})^2$$

**N.B.:** la larghezza di banda dipende dal modo di costruire  $[K]$

Convergenza: soluzione che tende a quella corretta per dimensione EF che tende a zero

Condizioni di convergenza sulle funz.ni di forma

**Condizione 1:** la f.ne di spostamento deve dare luogo ad una deformazione nulla in tutti i punti dell'elemento quando il campo di spostamenti nodali corrisponde ad un moto rigido.



$$u_{xi} = u_{xj} = u_{xk}$$

$$u_{yi} = u_{yj} = u_{yk}$$

# Verifica per l'elemento triangolare

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ u_{xk} \\ u_{yk} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & C_{15} \\ C_{11} & B_{11} & C_{13} & B_{13} & C_{15} & B_{15} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = B_{11}u_{xi} + B_{13}u_{xj} + B_{15}u_{xk}$$

$$B_{11} = \frac{y_j - y_k}{\Delta}$$

$$B_{13} = \frac{y_k - y_i}{\Delta}$$

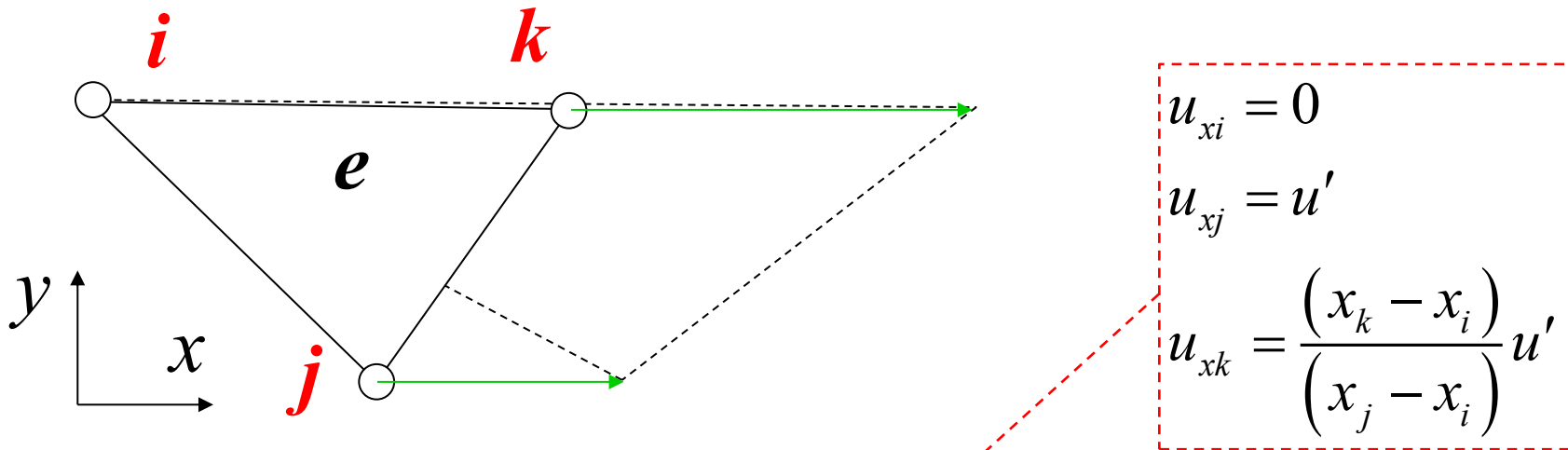
$$B_{15} = \frac{y_i - y_j}{\Delta}$$

$$\varepsilon_x = \frac{y_j - y_k}{\Delta}u_{xi} + \frac{y_k - y_i}{\Delta}u_{xj} + \frac{y_i - y_j}{\Delta}u_{xk} = 0$$

(stesso spostamento  $u_{xi} = u_{xj} = u_{xk}$ , cancellazione 2 a 2)

**Condizione 2:** la f.ne di spostamento deve dare luogo ad un campo di deformazione costante in tutti i punti dell'elemento, quando il vettore degli spostamenti nodali è compatibile con tale condizione, e le deformazioni nell'elemento devono essere uguali a quelle che si otterrebbero dai nodi

Esempio di verifica:



$$\varepsilon_x = \frac{y_j - y_k}{\Delta} u_{xi} + \frac{y_k - y_i}{\Delta} u_{xj} + \frac{y_i - y_j}{\Delta} u_{xk} = \left( \frac{y_k - y_i}{\Delta} + \frac{y_i - y_j}{\Delta} \frac{(x_k - x_i)}{(x_j - x_i)} \right) u'$$

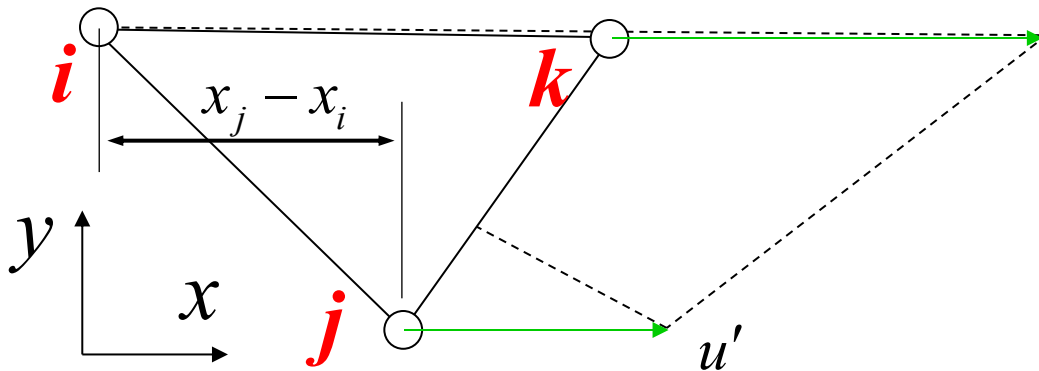
(valore comunque costante per l'elemento triangolare lineare, da verificare che sia il valore corretto)

Essendo:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = x_j y_k - x_k y_j - x_i y_k + y_i x_k + x_i y_j - y_i x_j$$

si ottiene:

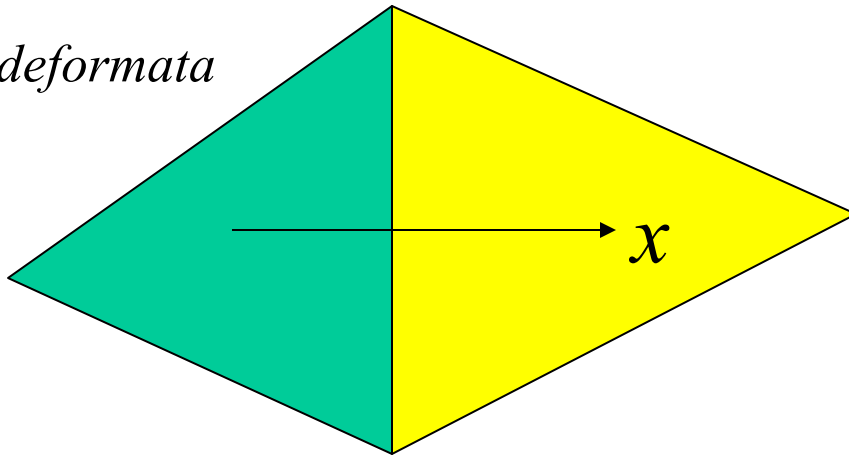
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left( \frac{y_k - y_i}{\Delta} + \frac{y_i - y_j}{\Delta} \frac{(x_k - x_i)}{(x_j - x_i)} \right) u' = \\ &= \frac{y_k x_j - y_k x_i - y_i x_j + x_i y_i + y_i x_k - y_i x_i - y_j x_k + y_j x_i}{\Delta (x_j - x_i)} u' = \frac{u'}{(x_j - x_i)} \end{aligned}$$



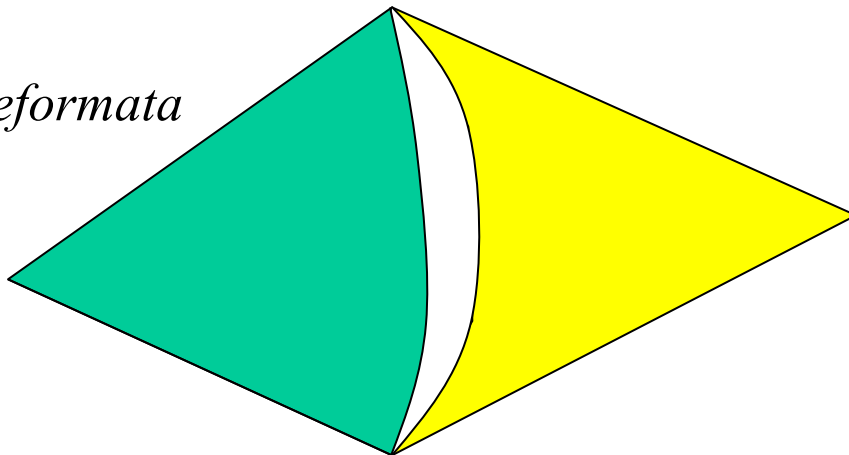
Valutando il nodo  $j$ ,  
 subisce uno spostamento  $u'$   
 su una lunghezza pari a:  $x_j - x_i$   
 quindi:  $\varepsilon_x(j) = u' / (x_j - x_i)$

**Condizione 3:** la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi.

*Indeformata*

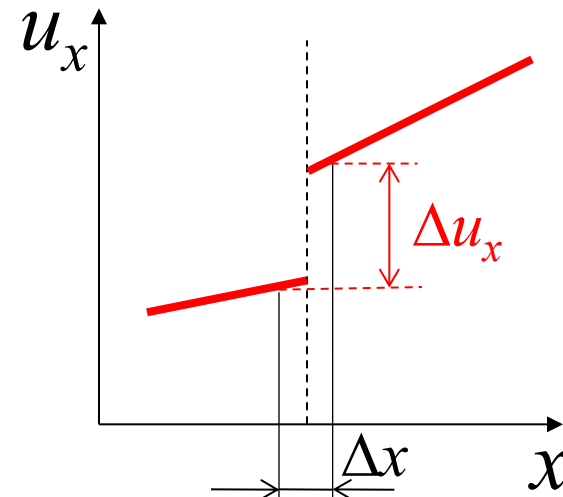


*Deformata*



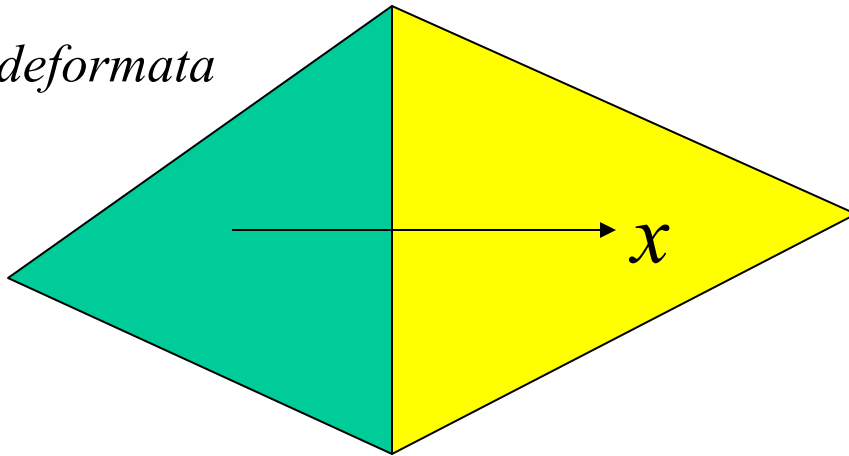
Discontinuità:  $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$



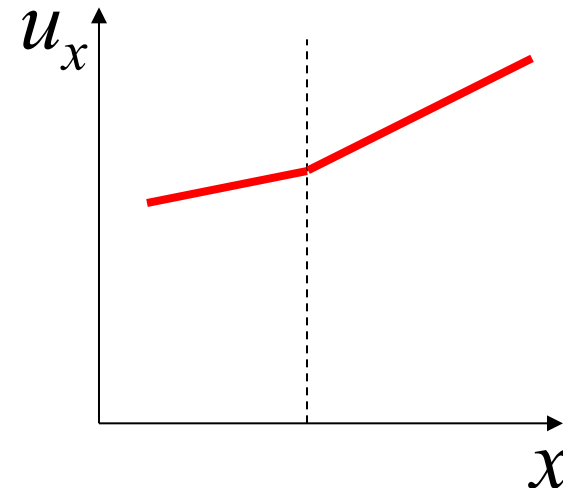
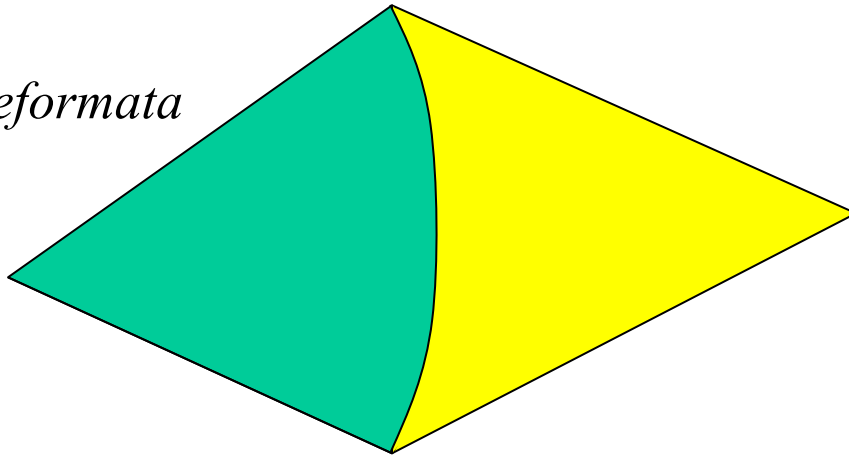
**Condizione 3:** la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi.

*Indeformata*



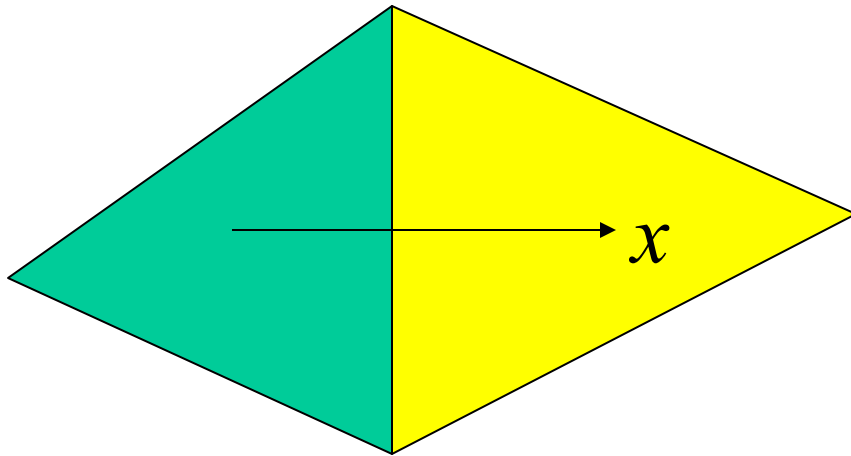
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

*Deformata*



No discontinuità:  $\varepsilon \rightarrow$  *valore finito*

**Condizione 3:** la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi.

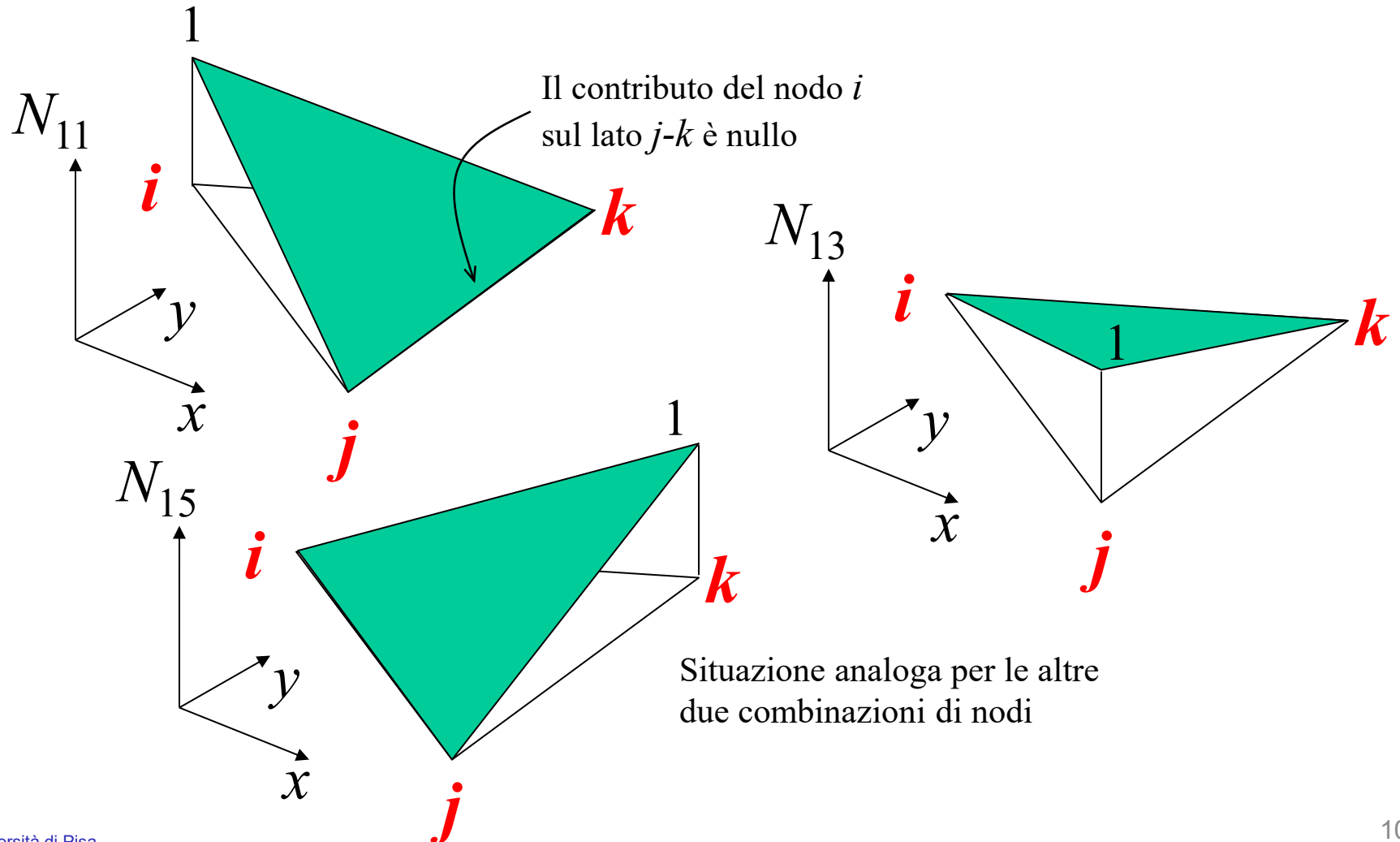


$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

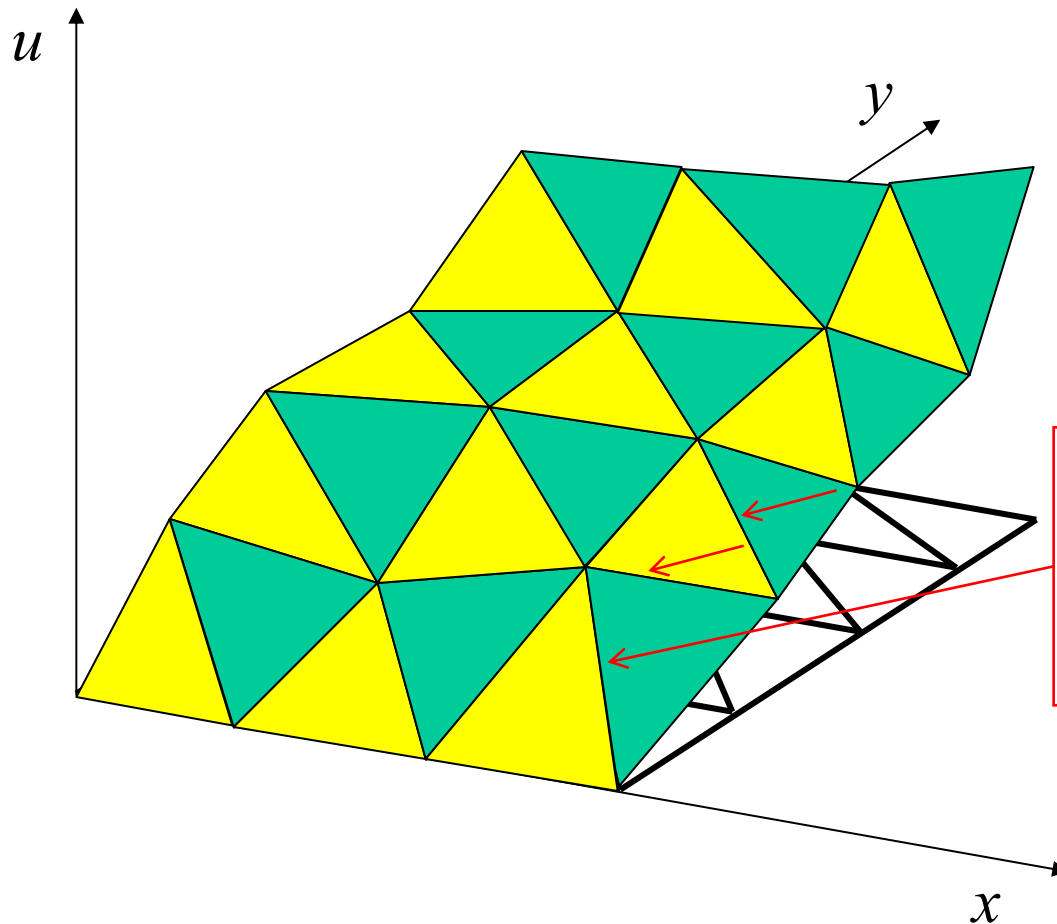
In generale:

Se le  $\varepsilon_*$  implicano la derivata  $n$ -sima della f.ne di spostamento, quest'ultima deve essere continua all'interfaccia con Classe di continuità almeno  $C^{n-1}$

N.B.: la funzione di spostamento scelta garantisce tale continuità in quanto lo spostamento di un punto appartenente ad un lato non dipende dagli spostamenti del nodo opposto ed è lineare con gli spostamenti dei nodi ai vertici del lato

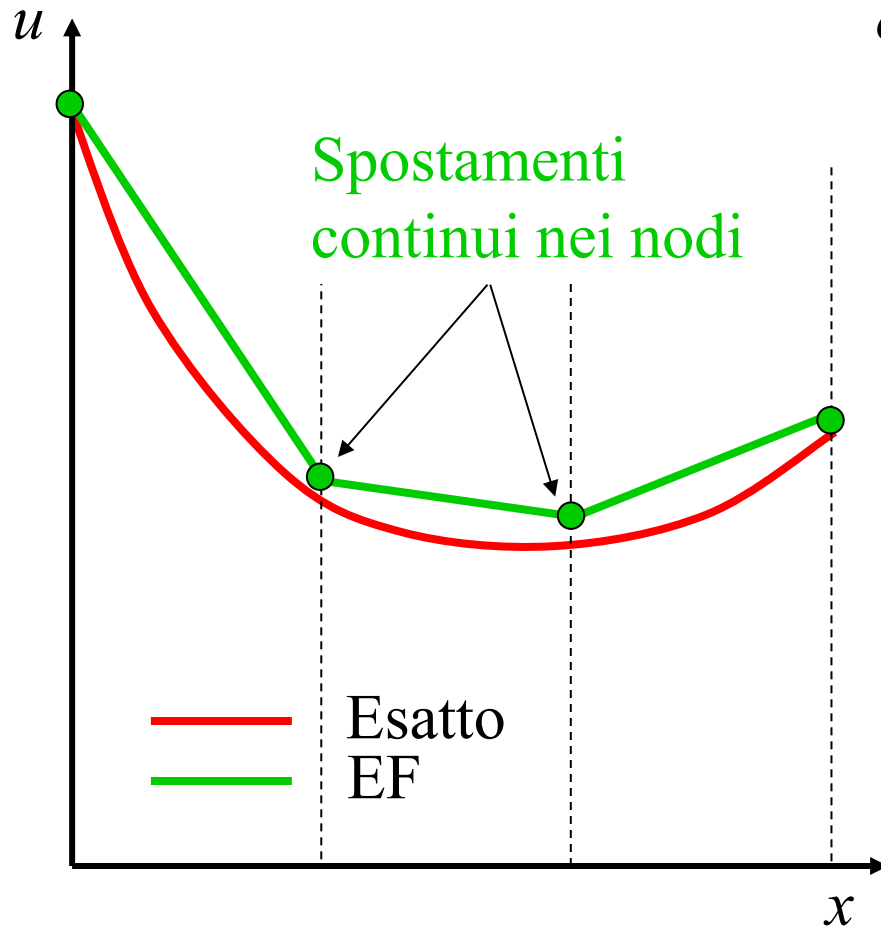


Quindi con elementi triangolari piani si ottiene sempre la continuità, anche se con derivate discontinue:  $C^0$

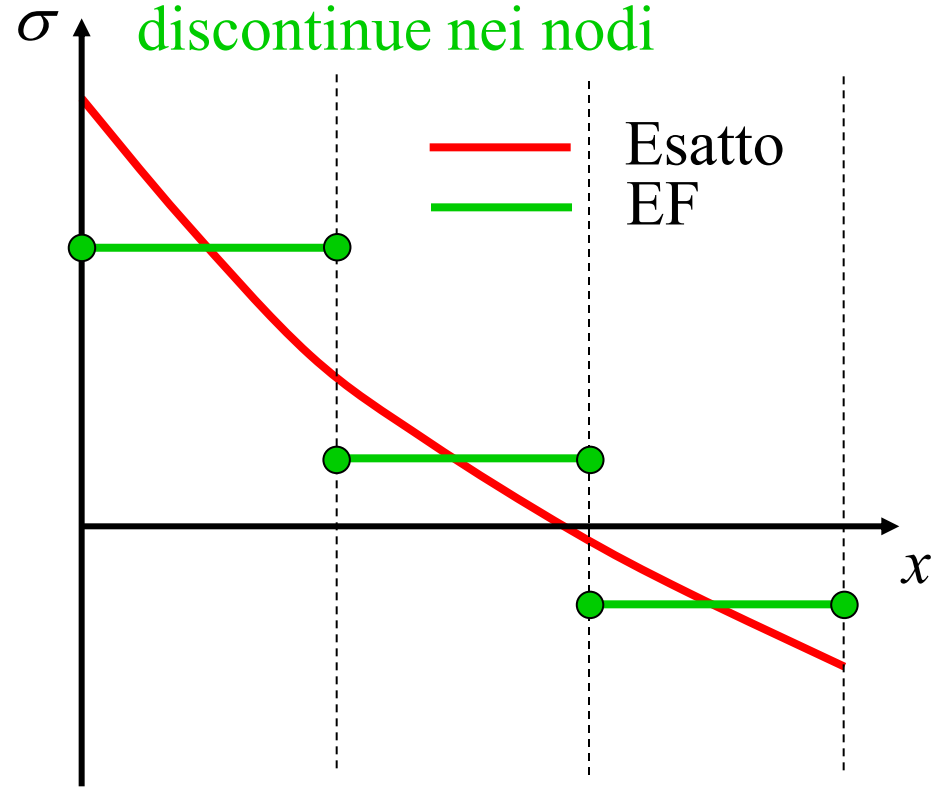


Su ogni lato il grado di libertà ha un andamento lineare, dal valore del primo a quello del secondo nodo. Quindi è lo stesso fra due elementi adiacenti.

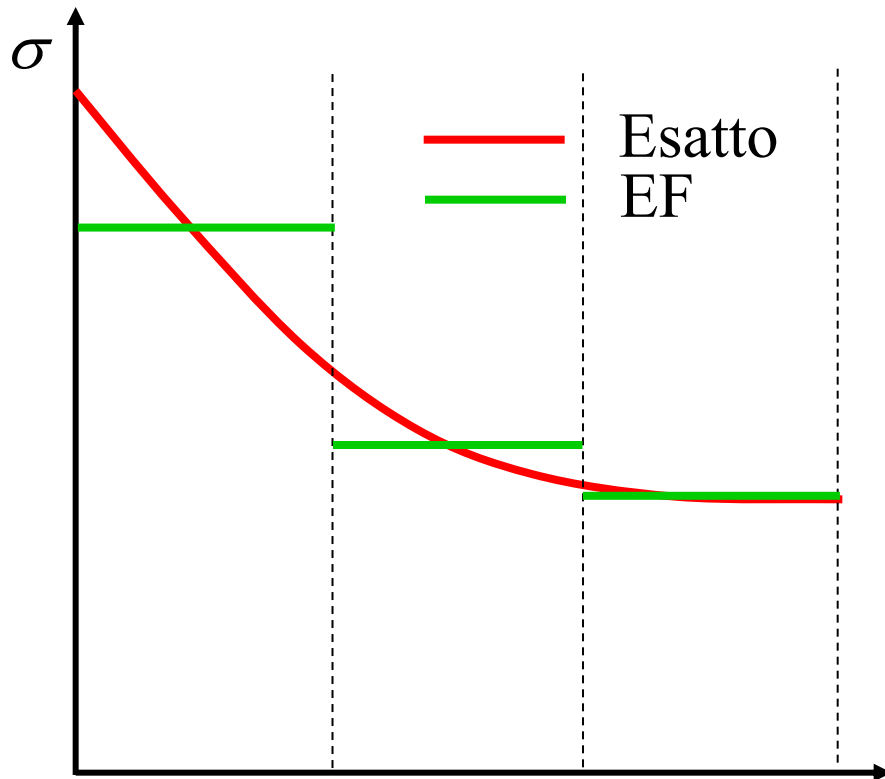
# Andamento effettivo delle Tensioni



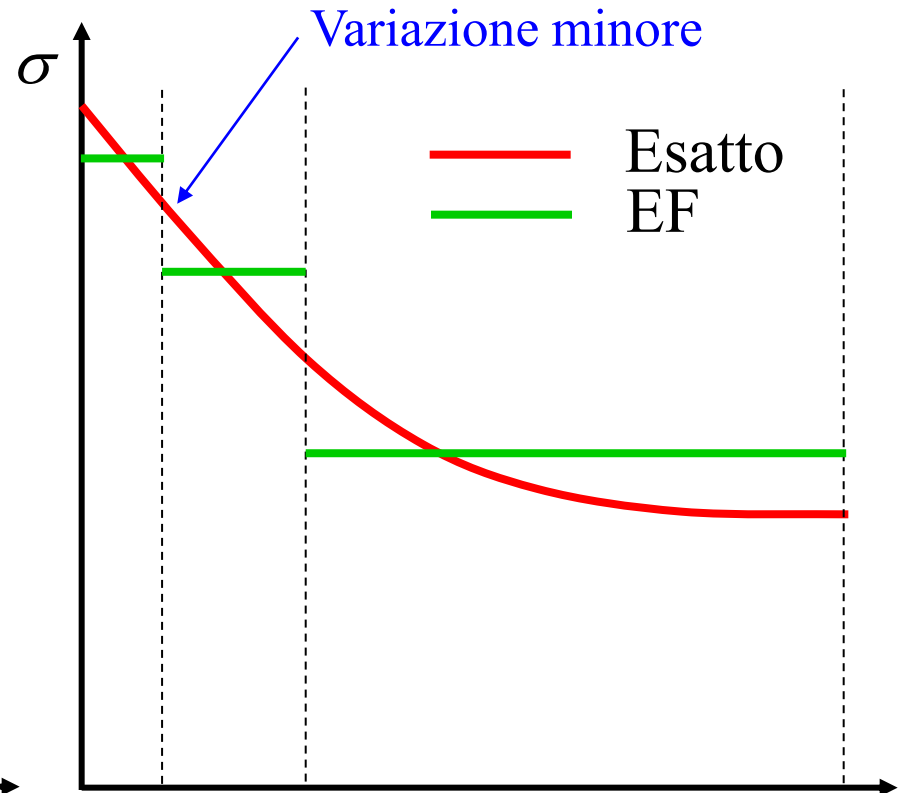
Tensioni (prop. deformazioni)  
discontinue nei nodi



# Dimensioni ottimali degli elementi

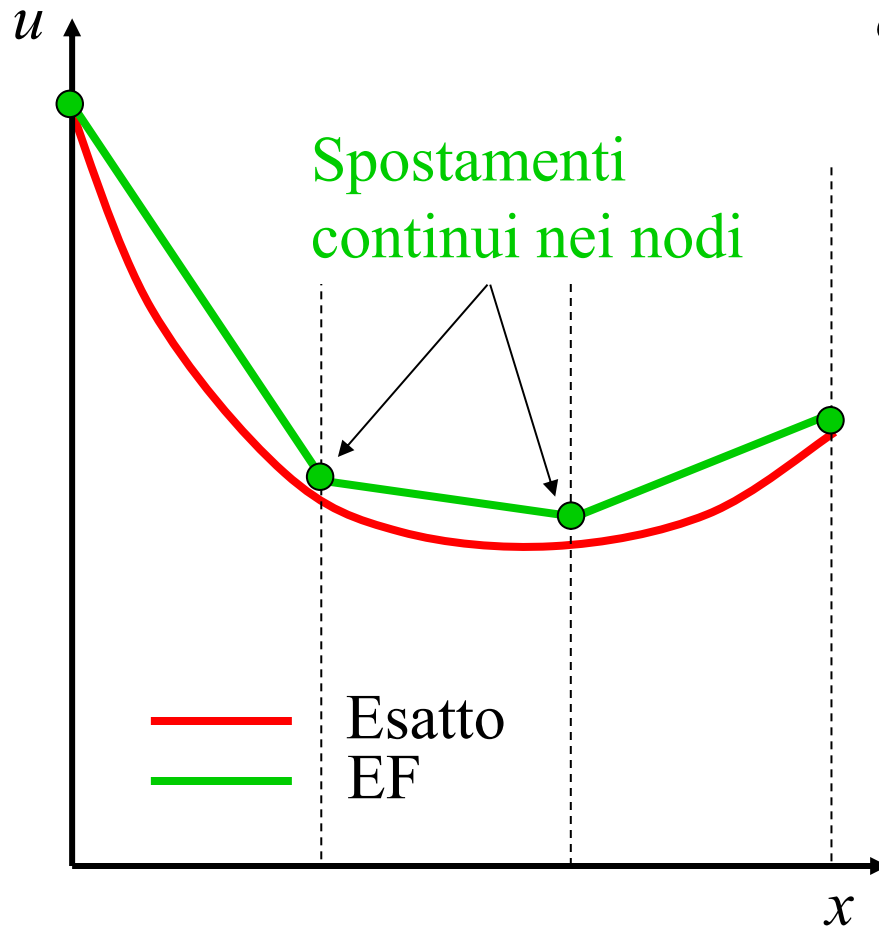


Dimensioni elementi non ottimali

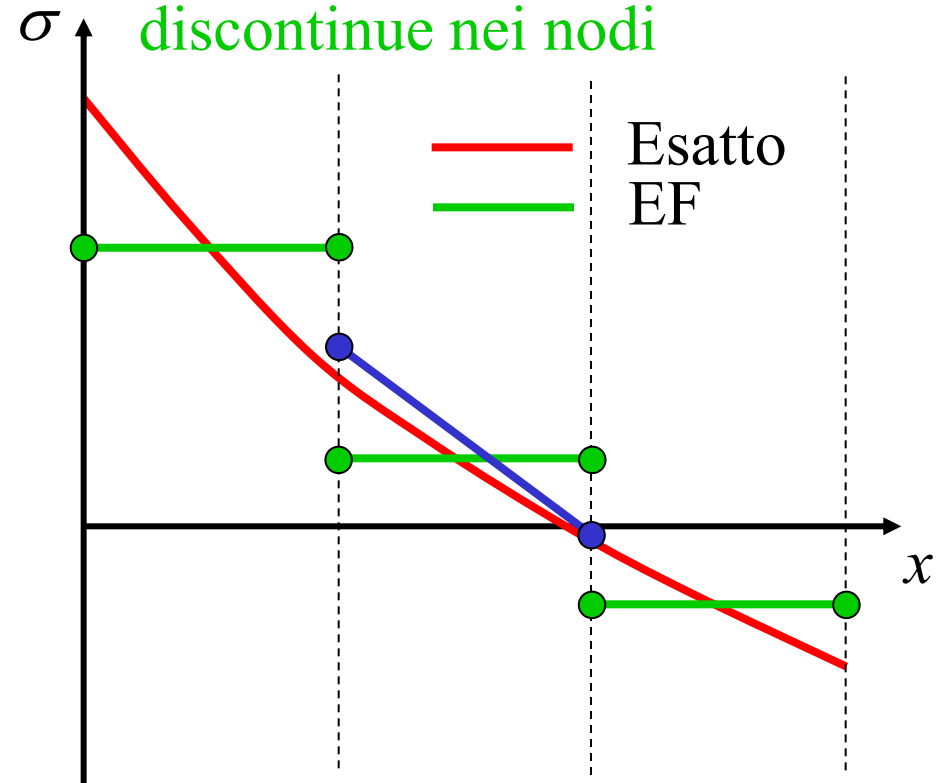


Dimensioni elementi ottimali:  
*Maggiore infittimento nelle zone di elevato gradiente*

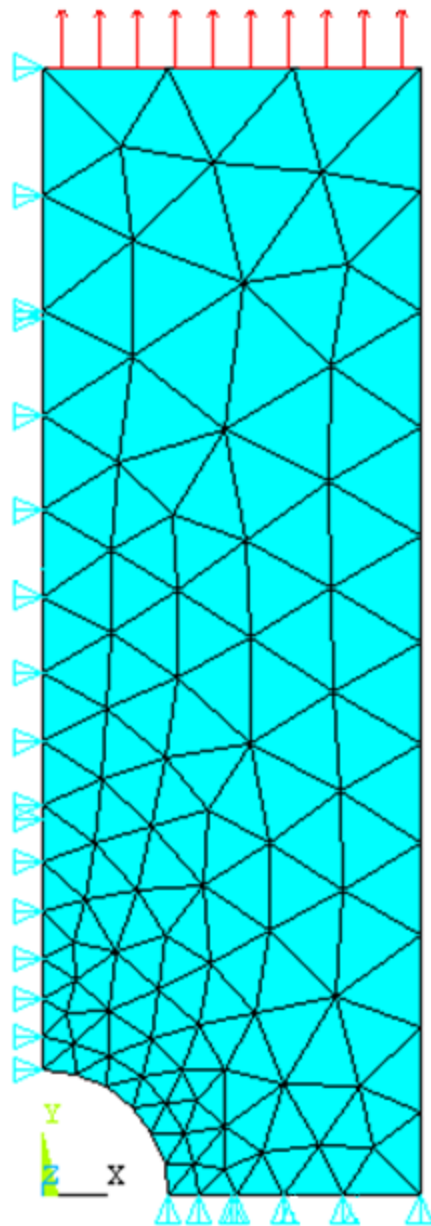
Oltre all'infittimento che può introdurre l'utente è applicata un'operazione di *Smoothing* alla soluzione nodale



Tensioni (prop. deformazioni) discontinue nei nodi

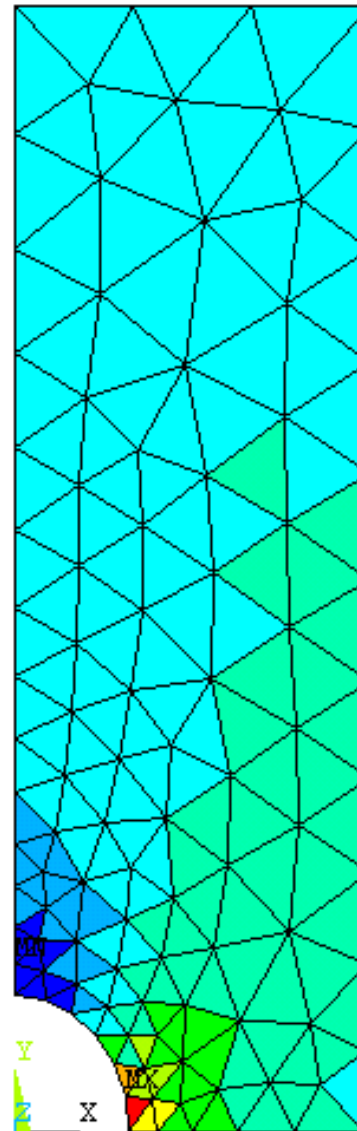


- Calcolo dei valori mediati nei nodi (media aritmetica)
- Interpolazione dei valori mediati nodali nelle zone interne (mediante le funzioni di forma)



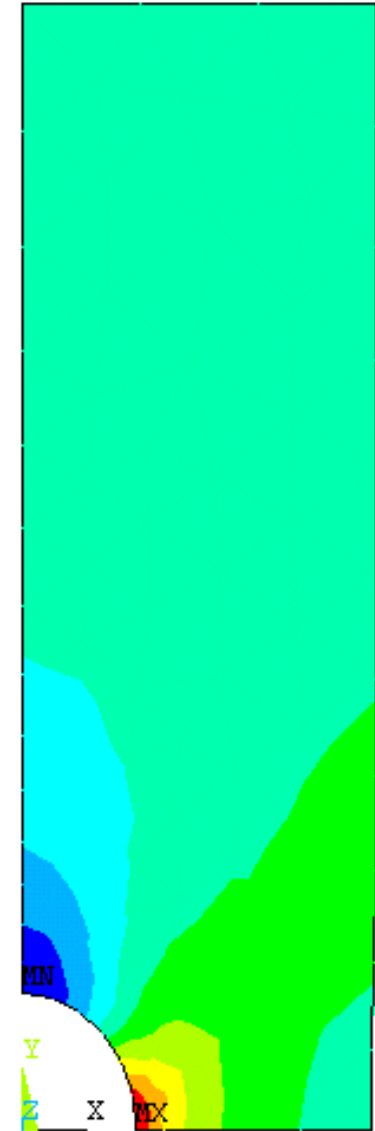
Modello

Ansys: Element Solution



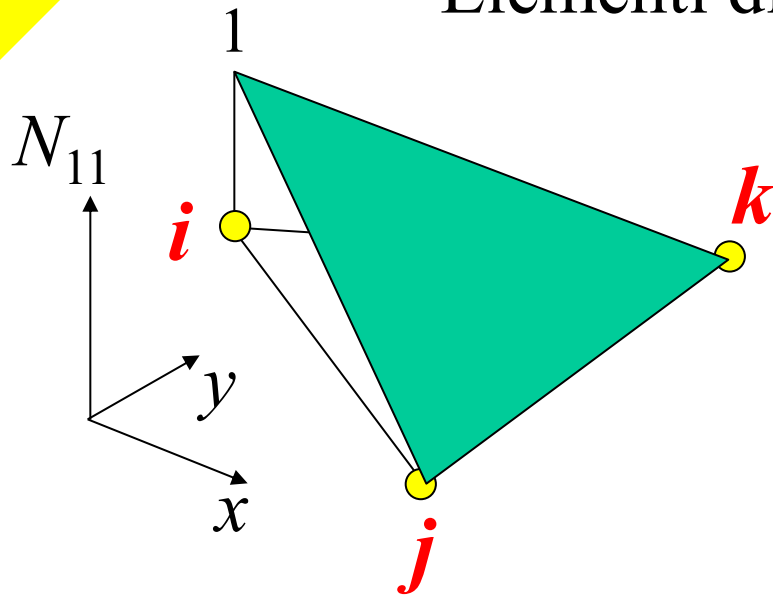
Tensioni  $\sigma_y$  non mediate

Ansys: Nodal Solution



Tensioni  $\sigma_y$  mediate

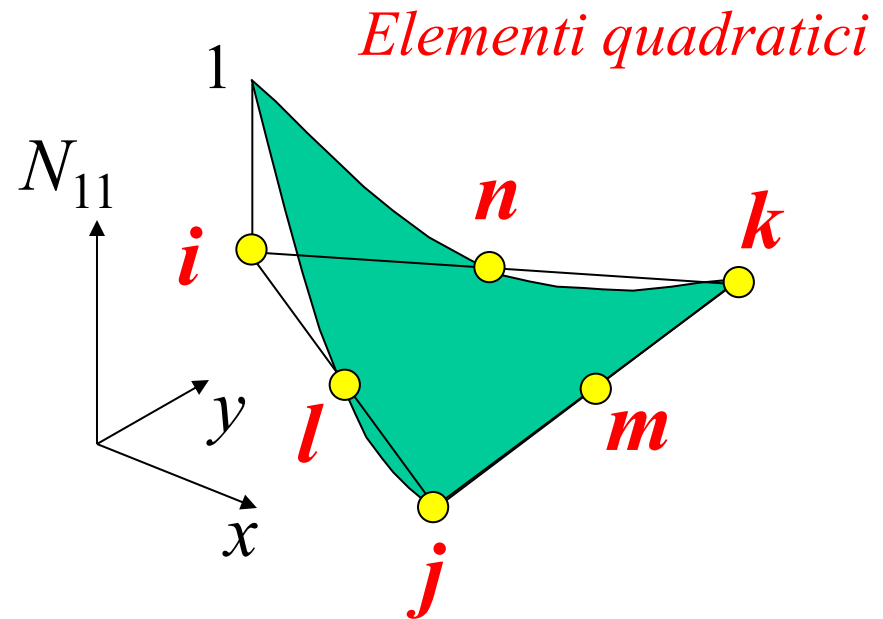
# Elementi di ordine superiore



$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} x + C_{lm} y$$

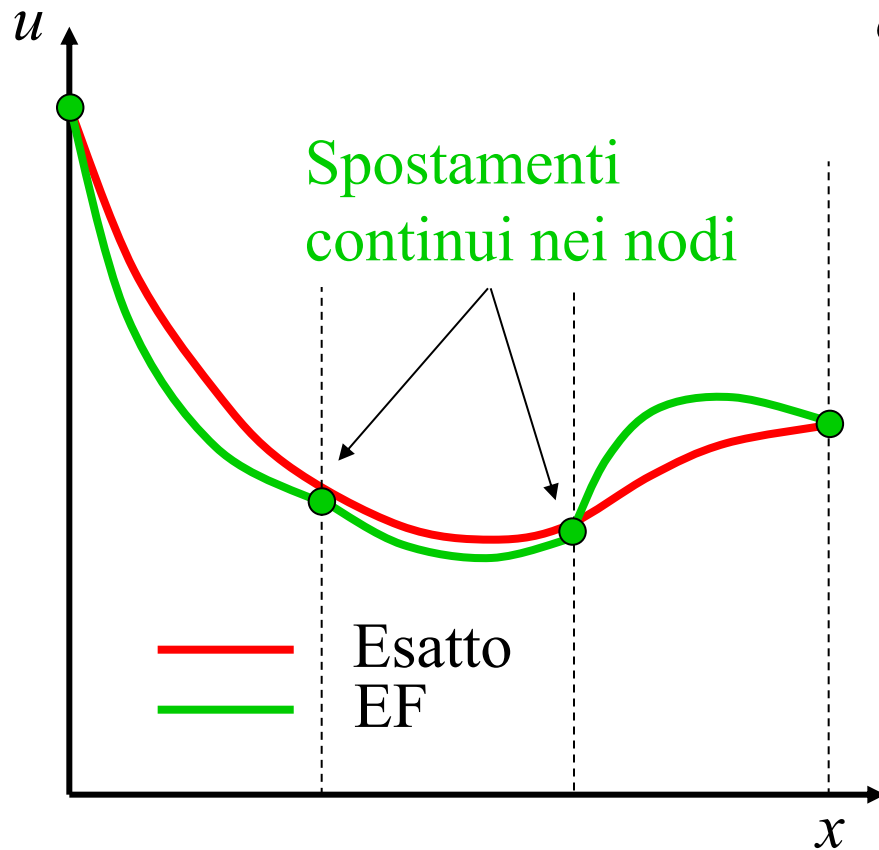
*Elementi lineari*



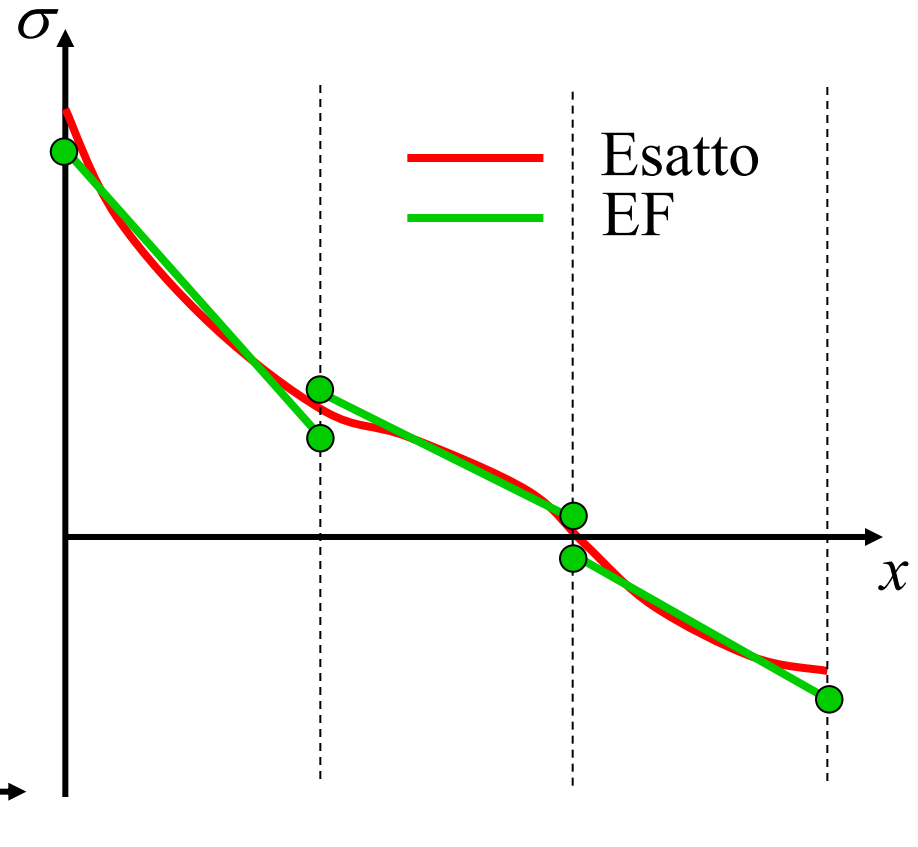
$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{11}(x_l, y_l) = 0 \\ N_{11}(x_m, y_m) = 0 \\ N_{11}(x_n, y_n) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} x + C_{lm} y + D_{lm} x^2 + E_{lm} y^2 + F_{lm} xy$$

# Elemento con F.ne di Forma quadratica: Tensioni lineari

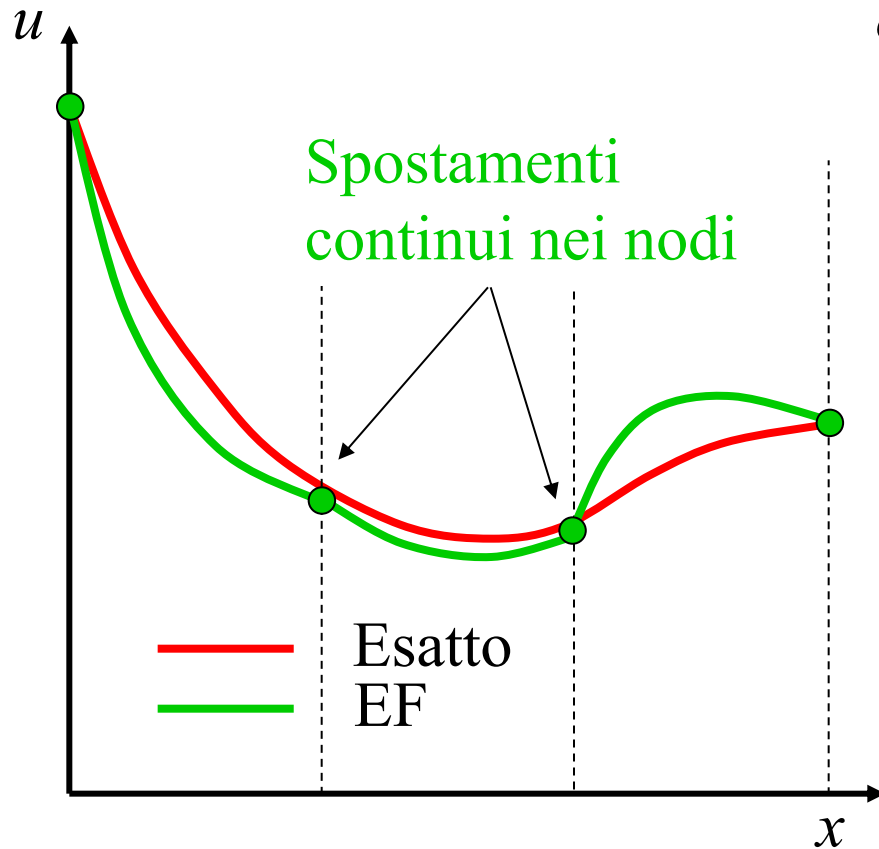


## Tensioni discontinue nei nodi

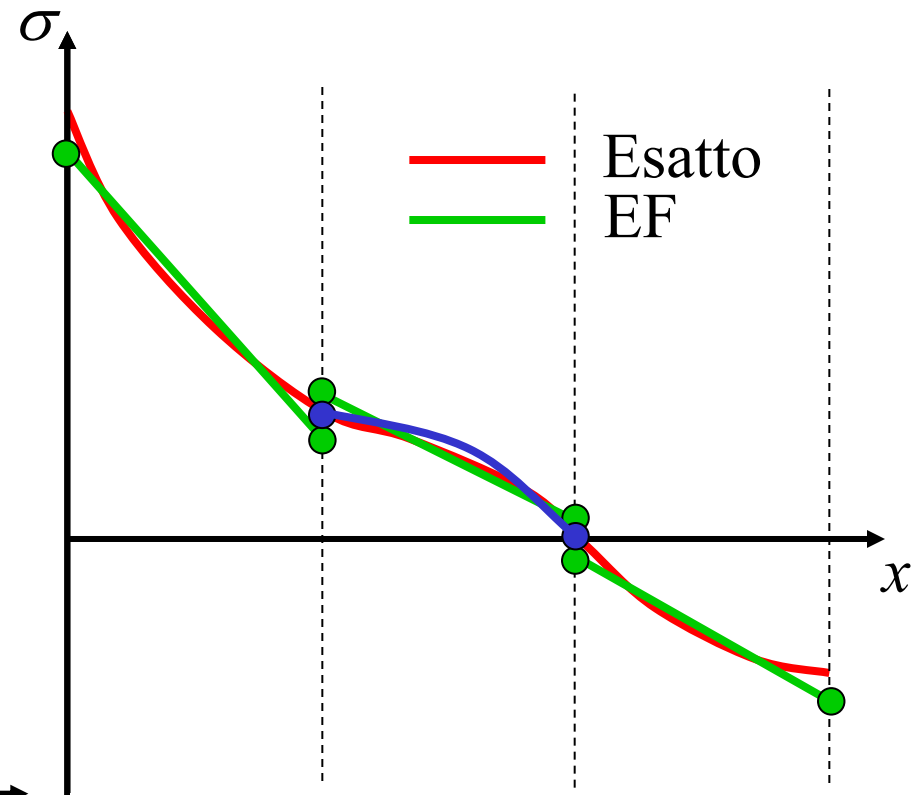


Tendenzialmente la soluzione è più accurata (a parità di dimensione dell'elemento), rimangono tuttavia dei casi particolari

# Elemento con F.ne di Forma quadratica: Tensioni lineari



## Tensioni discontinue nei nodi



- Calcolo dei valori mediati nei nodi (media aritmetica)
- Interpolazione dei valori mediati nodali nelle zone interne (mediante le funzioni di forma)

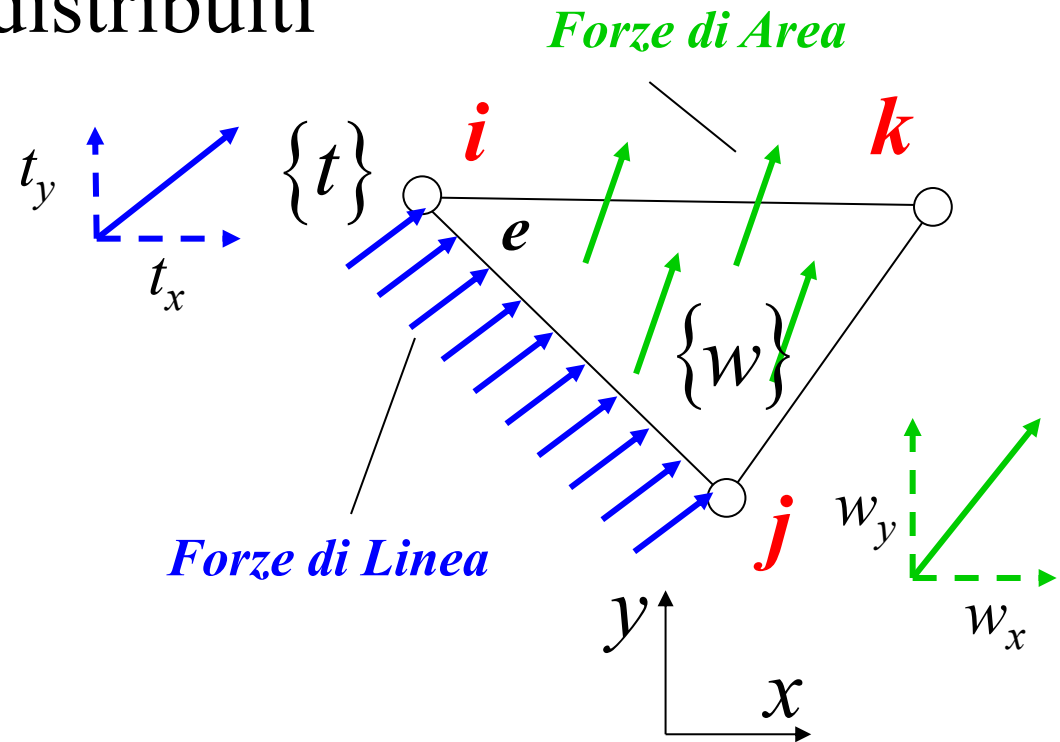
# Carichi distribuiti

Con elementi 3D i carichi distribuiti sono:

di Linea,  
di Area,  
di Volume.

Nel caso 2D sono:

di Linea,  
di Area.



P.L.V.:

$$L_{\text{est}} = \left\{ \delta U^e \right\}^T \left\{ P^e \right\} + L_w + L_t \quad \leftarrow \text{Lavoro virt. forze di Linea}$$

↑  
Lavoro virt. forze di Area

# Carichi distribuiti

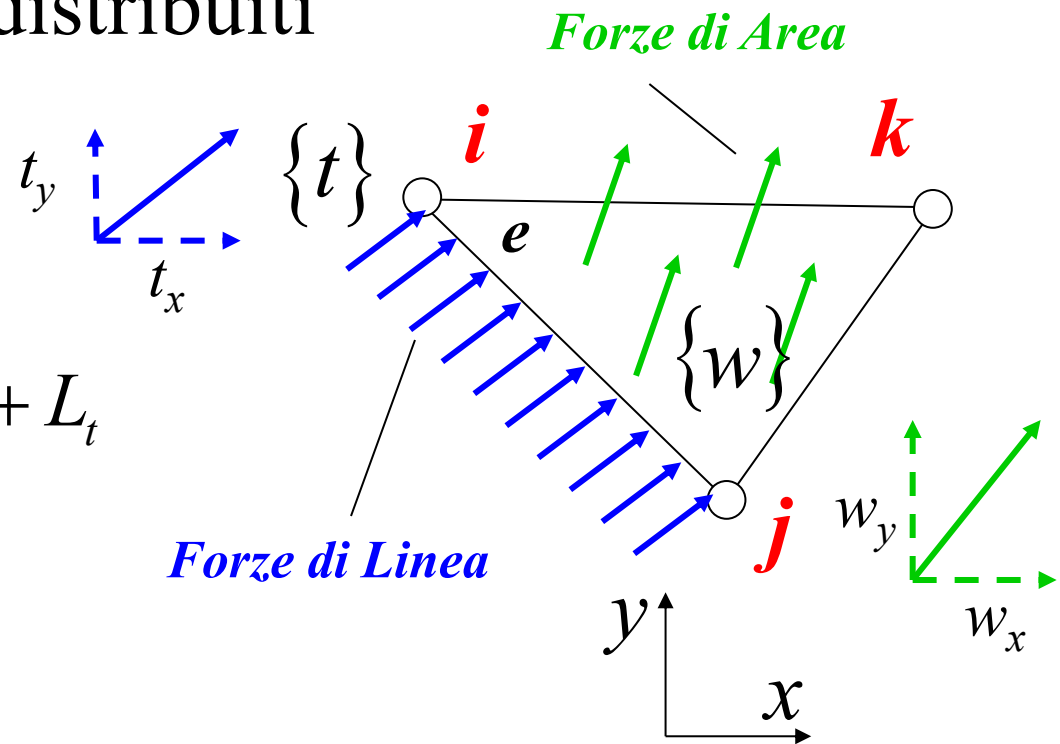
$$L_{\text{est}} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_w + L_t$$

$$dL_w = \{\delta u\}^T \{w\} dA$$

$$dL_t = \{\delta u\}^T \{t\} dL$$

$$L_w = \int_A \{\delta u\}^T \{w\} dA = \int_A \{\delta U^e\}^T [N]^T \{w\} dA = \{\delta U^e\}^T \int_A [N]^T \{w\} dA$$

$$L_t = \int_L \{\delta u\}^T \{t\} dL = \{\delta U^e\}^T \int_L [N]^T \{t\} dL$$



Si possono sostituire delle forze sui nodi equivalenti alle forze distribuite di area e di linea, che esercitano lo stesso lavoro virtuale:

$$L_{\text{est}} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + \{\delta U^e\}^T \int_A [N]^T \{w\} dA + \{\delta U^e\}^T \int_L [N]^T \{t\} dL$$

$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T [K^e] \{U^e\}$$

$$\{F_w^e\} = \int_A [N]^T \{w\} dA \quad \{F_t^e\} = \int_L [N]^T \{t\} dL$$

$$\{P^e\} + \{F_w^e\} + \{F_t^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

Le forze distribuite di area e di linea, nodali equivalenti, sono forze **esterne** per la struttura, quindi nell'equazione di equilibrio dei nodi si ritrovano a primo membro:

$$\text{P.L.V. singolo elemento: } \{P^e\} = [K^e] \{U^e\} - \{F_w^e\} - \{F_t^e\}$$

$$\text{Equilibrio nodi intero modello (forma espansa): } \{F\} - \sum_{e=1}^{n_E} \{P^e\}^* = 0$$

$$\{F\} + \sum_{e=1}^{n_E} \{F_w^e\}^* + \sum_{e=1}^{n_E} \{F_t^e\}^* = \sum_{e=1}^{n_E} [K^e]^* \{U\}$$

Si può definire:

$$\{F_w\} = \sum_{e=1}^{n_E} \{F_w^e\}^* \quad \{F_t\} = \sum_{e=1}^{n_E} \{F_t^e\}^*$$

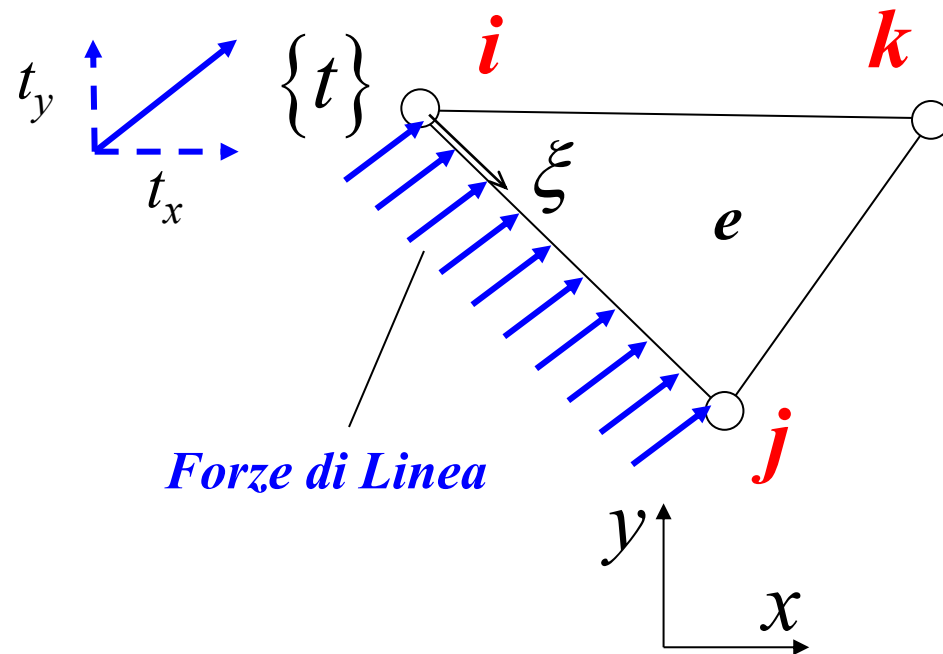
e si ottiene quindi l'equazione finale, comprensiva delle forze distribuite:

$$\boxed{\{F\} + \{F_w\} + \{F_t\} = [K] \{U\}}$$

Esempio: carico uniformemente distribuito sul lato di un elemento triangolare

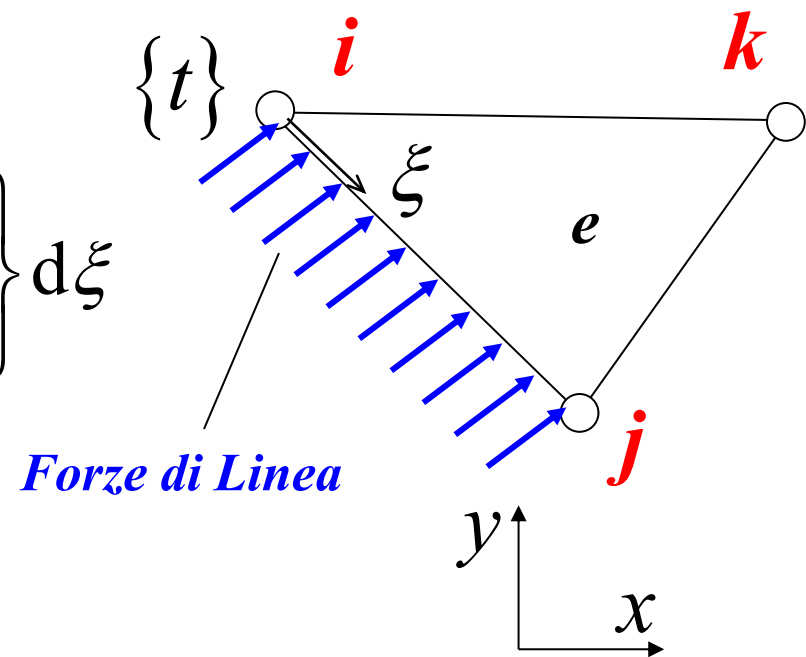
$$\{F_t^e\} = \int_L [N]^T \{t\} d\xi$$

$$6 \times 1 \quad 6 \times 2 \quad 2 \times 1$$



$$[N] = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix} \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$$

$$\{F_t^e\} = \begin{Bmatrix} f_{t,ix}^e \\ f_{t,iy}^e \\ f_{t,jx}^e \\ f_{t,jy}^e \\ f_{t,kx}^e \\ f_{t,ky}^e \end{Bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{11} \\ N_{13} & 0 \\ 0 & N_{13} \\ N_{15} & 0 \\ 0 & N_{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} d\xi$$



$$f_{t,ix}^e = \int_L N_{11}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L \frac{L-\xi}{L} d\xi$$

$$f_{t,jx}^e = \int_L N_{13}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L \frac{\xi}{L} d\xi$$

$$f_{t,kx}^e = \int_L N_{15}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L 0 d\xi$$

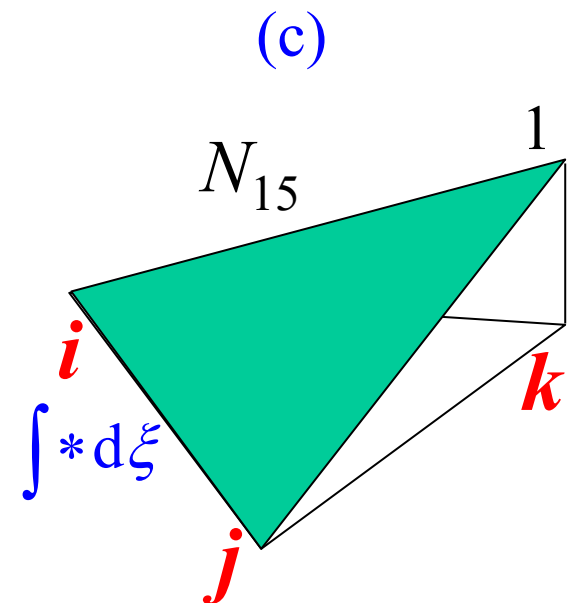
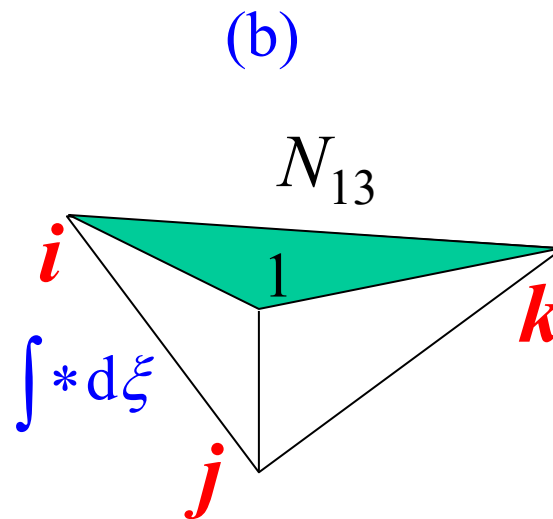
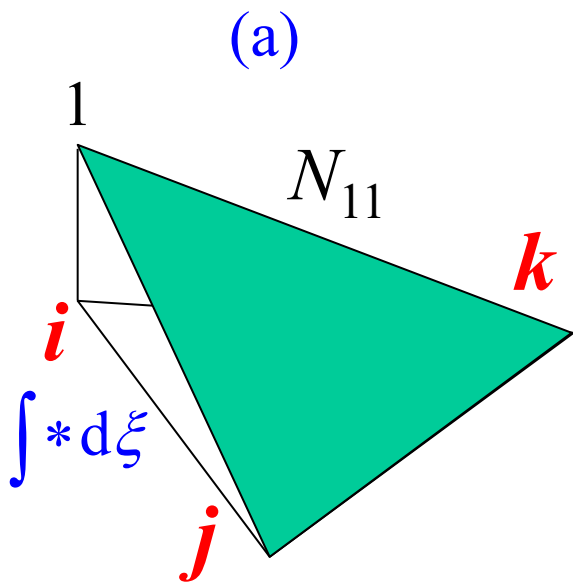
$$(a) \quad f_{t,ix}^e = \int_L N_{11}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L \frac{L-\xi}{L} d\xi = t_x \frac{L}{2}$$

$$(b) \quad f_{t,jx}^e = \int_L N_{13}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L \frac{\xi}{L} d\xi = t_x \frac{L}{2}$$

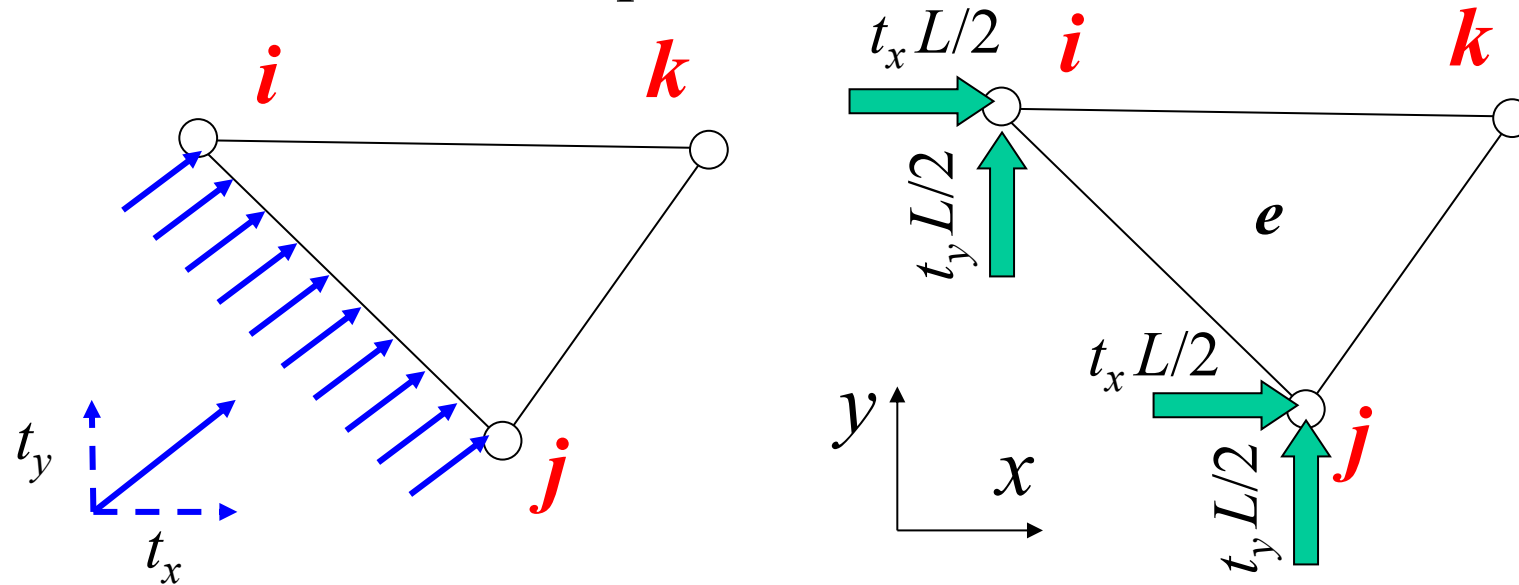
$$(c) \quad f_{t,kx}^e = \int_L N_{15}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L 0 d\xi = 0$$

... analogamente per:

$$f_{t,iy}^e, f_{t,jy}^e, f_{t,ky}^e$$



## Carichi nodali equivalenti



Le forze distribuite di volume, di area e di linea, anche se inserite come tali dall'utente del software, vengono di fatto sostituite da **forze nodali equivalenti**, dato che i nodi sono le uniche entità del modello EF su cui possono essere applicati i carichi.

L'equivalenza è in termini di P.L.V., che nel caso "isostatico" si può ottenere semplicemente dall'equilibrio.

Controesempi: carico distribuito sul lato con nodo centrale, quindi da ripartire su tre nodi; oppure carico distribuito su una linea interna (non coincidente con un lato), che coinvolge tutti i 3 nodi.