

Esercitazione 03:

Calcolo della linea elastica e carico critico di strutture a trave

Indice

1	Trave incastrata in flessione a sezione variabile	1
2	Trave appoggiata su due punti, caricata a sbalzo	2
3	Instabilità dell'equilibrio di strutture a trave caricate di punta	3
3.1	Sistemi ad elasticità concentrata	3
3.2	Trave ad elasticità distribuita	6

1 Trave incastrata in flessione a sezione variabile

In Fig.1 è mostrato lo schema di una trave incastrata, sollecitata da un carico flettente di estremità, la cui sezione b è variabile lungo l'asse della trave, ed è pari a b_0 in corrispondenza dell'incastro.

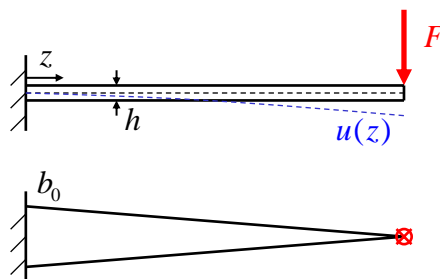


Figura 1: Trave incastrata, sollecitata da un carico flettente di estremità, con sezione variabile.

Determinare l'abbassamento dell'asse della trave u in funzione della coordinata curvilinea z , considerando soltanto i termini flessionali. Confrontare la soluzione ottenuta con quella relativa al caso notevole di trave incastrata e caricata all'estremità, con sezione uniforme.



Soluzione:

$$u(z) = \frac{6Fl}{Eb_0h^3}z^2 \quad (1)$$

2 Trave appoggiata su due punti, caricata a sbalzo

In Fig.2 è mostrato lo schema di una trave appoggiata su due punti e sollecitata da un carico flettente posto a sbalzo.

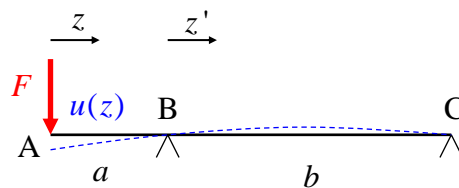


Figura 2: Trave su due appoggi con carico a sbalzo.

Determinare l'abbassamento dell'asse della trave u in funzione della coordinata curvilinea z , considerando soltanto i termini flessionali.

Suggerimento: Trovare l'integrale generale nei due tratti AB e BC, imporre spostamento nullo in corrispondenza degli appoggi B e C ed infine imporre la condizione di continuità e di tangenza in corrispondenza del punto B. Utilizzare la coordinata z nel primo tratto, mentre risulta più comodo introdurre un'altra coordinata z' per il secondo tratto.



Soluzione:

Tratto AB:

$$u(z) = \frac{Fz^3}{6EI} - \frac{Fa}{EI} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \right) z + \frac{Fa^2}{3EI}(a+b) \quad (2)$$

Tratto BC:

$$u'(z') = -\frac{Fz'^3}{6EI} \frac{a}{b} + \frac{Faz'^2}{2EI} - \frac{Fab}{3EI}z' \quad (3)$$

3 Instabilità dell'equilibrio di strutture a trave caricate di punta

3.1 Sistemi ad elasticità concentrata

In Fig.3 è mostrato lo schema di una trave dotata di una sconnessione in mezzeria, sostenuta da un elemento ad elasticità concentrata (molla flessionale) e caricata da una forza P secondo l'asse della trave.

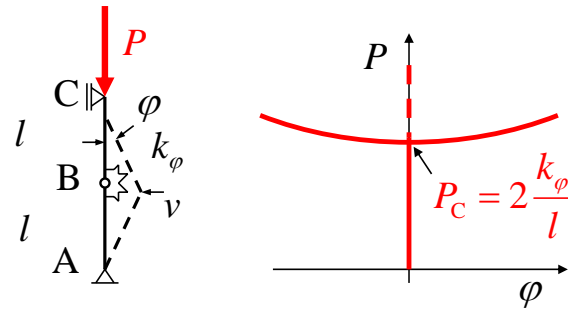


Figura 3: Trave caricata di punta con sconnessione in mezzeria ed elasticità concentrata.

La condizione indeformata è di equilibrio, ma, tale equilibrio perde di stabilità ad un certo valore del carico, detto carico critico P_C .

Al fine di valutare l'entità del carico critico è necessario considerare la struttura in una configurazione diversa da quella indeformata. Tuttavia, è di interesse soltanto il carico critico e non il comportamento successivo alla perdita di stabilità. Per cui è possibile sfruttare tutte le semplificazioni relative alla linearizzazione e scrivere la condizione di equilibrio nella configurazione deformata:

$$Pv - k_\varphi \frac{2v}{l} = 0 \quad (4)$$

Al fine di avere tale condizione soddisfatta, con spostamento v non nullo, è necessario che:

$$P - 2 \frac{k_\varphi}{l} = 0 \quad (5)$$

per cui il carico critico è pari a:

$$P_C = 2 \frac{k_\varphi}{l} \quad (6)$$

Avendo sfruttato la linearizzazione non è possibile avere nessuna informazione circa il comportamento dopo aver raggiunto il carico critico. Spesso non è di interesse tale informazione, in quanto è bene che la struttura rimanga lontana dalla condizione di perdita di stabilità.

Determinare il carico critico relativo alla struttura di Fig.4.

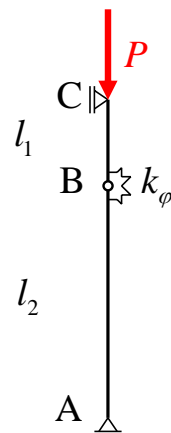


Figura 4: Trave caricata di punta con sconnessione non in mezzzeria ed elasticità concentrata.



Soluzione:

$$P_C = \frac{k_\varphi}{l^*}, \quad \frac{1}{l^*} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \quad (7)$$

Determinare il carico critico relativo alla struttura di Fig.5.

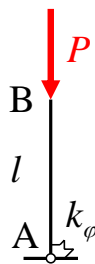


Figura 5: Trave caricata di punta, incernierata alla base con elasticità concentrata.



Soluzione:

$$P_C = \frac{k_\varphi}{l} \quad (8)$$

Osservazione:

Notare che il carico critico della struttura di Fig.5 è lo stesso di quella della struttura di Fig.4, nel caso in cui: $l_2 \gg l_1$.

Determinare il carico critico relativo alla struttura di Fig.6, in cui compaiono due sconnessioni elastiche.

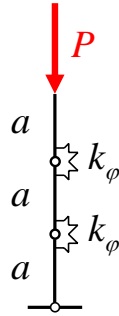


Figura 6: Trave caricata di punta, dotata di due sconnessioni ad elasticità concentrata.

Suggerimento:

Notare che la generica configurazione deformata è funzione di due parametri, ad esempio gli spostamenti orizzontali dei due punti intermedi. La condizione di equilibrio diventa quindi un sistema. L'equilibrio perde la stabilità in corrispondenza del carico per il quale il sistema ammette infinite soluzioni, ossia determinante della matrice del sistema nullo.



Soluzione:

$$P_C = \frac{k_\varphi}{a} \tag{9}$$

3.2 Trave ad elasticità distribuita

Le strutture mostrate in precedenza hanno interesse didattico, tuttavia, le travi sono caratterizzate da elasticità distribuita, piuttosto che concentrata.

Il caso più semplice di calcolo di carico critico con struttura a trave (elasticità distribuita) è fornito dalla trave caricata di punta con estremità vincolata lateralmente (trave di Eulero), Fig.7.

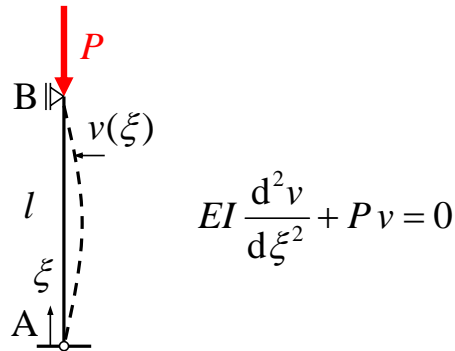


Figura 7: Trave caricata di punta ed incernierata alla base.

C'è una profonda differenza fra il calcolo della linea elastica per strutture che non si discostano molto dalla loro configurazione di riferimento ed invece problemi di instabilità, dove la minima perturbazione dalla configurazione di riferimento è la causa stessa della perdita di stabilità. Il momento flettente Pv è appunto generato dalla deformazione stessa della struttura.

Imponendo l'equazione della linea elastica, nella configurazione *deformata* rispetto all'equilibrio:

$$EI \frac{d^2v}{d\xi^2} + Pv = 0 \quad (10)$$

ponendo:

$$\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (11)$$

ed utilizzando l'apice per intendere la derivata rispetto all'ascissa curvilinea ξ , si può riscrivere l'equazione della linea elastica secondo la forma:

$$v'' + \lambda^2 v = 0 \quad (12)$$

che ammette come integrale generale:

$$v(\xi) = A \sin(\lambda \xi) + B \cos(\lambda \xi) \quad (13)$$

Imponendo la condizione al contorno:

$$v(\xi = 0) = 0 \quad (14)$$

segue che: $B = 0$.

Infine, imponendo l'altra condizione di spostamento nullo all'estremità, si ottiene:

$$A \sin(\lambda l) = 0 \quad (15)$$

Anche in questo caso si ripresenta la soluzione indeformata: $A = 0$, ma anche la possibilità di avere una soluzione *deformata* che soddisfi le condizioni al contorno:

$$\sin(\lambda l) = 0 \quad (16)$$

che è risolta da:

$$\lambda l = n\pi \quad (17)$$

È opportuno determinare soltanto la prima delle soluzioni ($n = 1$), dato che se la struttura perde la stabilità ad un certo carico non ha interesse il comportamento a carichi più alti. Quindi in definitiva il carico critico è dato dalla condizione precedente sostituendo $n = 1$ (carico di critico di Eulero):

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (18)$$

Il risultato appena trovato è corretto, tuttavia, l'imposizione dell'equazione differenziale della linea elastica, Eq.10, è valida solo nei casi particolari in cui è possibile scrivere il momento flettente in funzione dello spostamento incognito. Nel caso di Fig.8, invece, il carico P genera un momento flettente variabile lungo la trave che è funzione dello spostamento $v(\xi)$ ma anche dello spostamento dell'estremità $v(l)$.

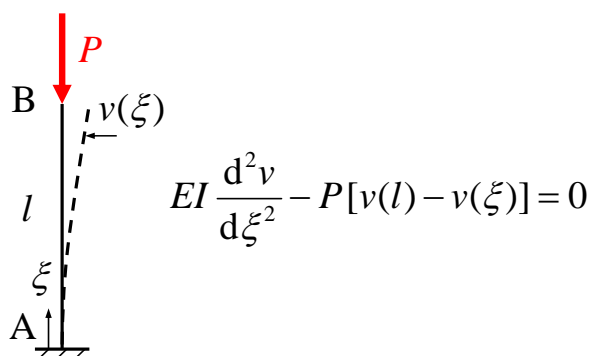


Figura 8: Trave caricata di punta, incastro alla base ed estremità libera.

L'equazione della linea elastica è:

$$EI \frac{d^2v}{d\xi^2} + Pv = Pv(l) \quad (19)$$

che è a differenza della precedente presenta un termine noto. Questa equazione differenziale può essere riscritta introducendo λ , con lo stesso significato del caso precedente:

$$v'' + \lambda^2 v = \lambda^2 v(l) \quad (20)$$

ed ammette la soluzione:

$$v(\xi) = A \sin(\lambda \xi) + B \cos(\lambda \xi) + c_1 \quad (21)$$

Determinare il carico critico, di perdita di stabilità a carico di punta, per il caso di Fig.8.

Suggerimento:

Utilizzare la soluzione dell'equazione differenziale Eq.21, ed imporre le condizioni al contorno.



Soluzione:

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (22)$$

Osservazione:

Si può ritrovare la stessa soluzione per similitudine geometrica dal caso di Eulero, precedentemente risolto.