

Esercitazione 02:

Calcolo degli spostamenti mediante il metodo degli integrali di Mohr

Indice

1	Flessione fra tre punti	1
2	Flessione generata da più carichi	2
3	Determinazione dello spostamento di generico punto	3
4	Equazione della linea elastica mediante l'integrale di Mohr	4
5	Risoluzione dell'equazione differenziale della linea elastica	5

1 Flessione fra tre punti

In Fig.1(a) è mostrato lo schema di una trave in flessione su tre punti, carico in mezzeria e supporti verticali alle estremità. Al fine di determinare lo spostamento verticale in mezzeria, utilizzando il teorema dei lavori virtuali si applica un carico unitario (esploratore) avente punto di applicazione, direzione e verso, coincidenti con lo spostamento che si intende valutare, Fig.1(b).

È importante sottolineare che il carico esploratore unitario ha punto di applicazione direzione e verso secondo lo spostamento che si intende determinare, *indipendentemente* dal carico applicato. Nel caso considerato il carico esploratore ha direzione e verso del carico reale che sollecita la struttura, ma questo è dovuto solo al fatto che si cerca lo spostamento esattamente in quel punto.

Considerando il contributo della sola flessione, si determina lo spostamento del punto di mezzeria, combinando spostamento e deformazioni dello schema di carico generato da P , con caratteristiche e sollecitazioni del carico unitario, ottenendo la seguente forma (integrale di Mohr):

$$1 \times \delta(= \text{L.V.E.}) = \int_0^l \frac{M(P)}{EI} M(1) d\xi (= \text{L.V.I.}) \quad (1)$$

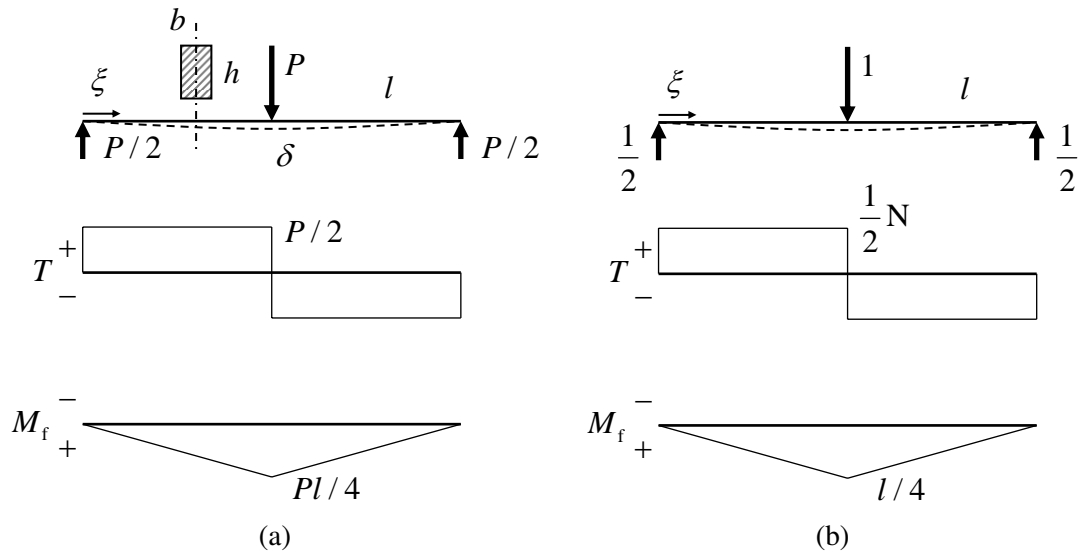


Figura 1: (a) Trave in flessione su tre punti. (b) Carico esploratore unitario.

Essendo il carico unitario, il primo termine è esattamente lo spostamento cercato. Conoscendo le caratteristiche della sollecitazione è quindi possibile risolvere l'integrale:

$$\delta = 2 \int_0^{l/2} \frac{P\xi/2}{EI} \frac{\xi}{2} d\xi = \frac{P}{2EI} \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_0^{l/2} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI} \quad (2)$$

Considerando il contributo della flessione e anche quello del taglio (per la sezione rettangolare il fattore di taglio è: $\chi = 6/5$):

$$\delta = \delta_M + \delta_T \quad (3)$$

$$\delta_T = \int_0^l \chi \frac{T(P)}{GA} T(1) = 2 \int_0^{l/2} \frac{6}{5} \frac{P/2}{GA} \frac{1}{2} d\xi = \frac{3}{10} \frac{Pl}{GA} \quad (4)$$

Notare che si ritrovano gli stessi risultati ottenuti nell'esercitazione precedente, utilizzando il teorema di Castigliano. Infatti, il teorema dei lavori virtuali e quello di Castigliano, anche se hanno una formulazione diversa, si implicano a vicenda. Più precisamente si può notare che la distribuzione di momento flettente (ed eventuali altre caratteristiche della sollecitazione che hanno un peso significativo nel calcolo dello spostamento) ottenuta applicando lo spostamento esploratore unitario (Mohr) coincide con la derivata del momento rispetto alla forza che agisce sul punto e secondo la direzione dello spostamento cercato (Castigliano). Secondo la notazione dell'esercizio mostrato: $M(1) = \partial M / \partial P$. Quindi gli argomenti di integrazione di Castigliano e di Mohr coincidono, come era lecito attendersi dal momento che il risultato finale deve essere lo stesso.

2 Flessione generata da più carichi

In Fig.2 è mostrato lo schema di un telaio caricato da due forze, che entrambe producono un contributo sullo spostamento orizzontale δ_1 del punto C.

Determinare lo spostamento δ_1 , considerando soltanto i termini flessionali, utilizzando il metodo dell'integrale di Mohr.

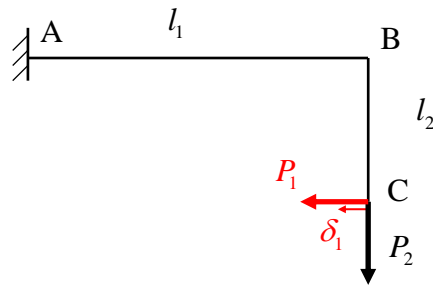


Figura 2: Telaio sollecitato da due carichi, o forze attive.



Soluzione:

$$\delta_1 = \frac{1}{EI} \left[l_1 l_2 \left(P_1 l_2 + \frac{1}{2} P_2 l_1 \right) + \frac{1}{3} P_1 l_2^3 \right] \quad (5)$$

3 Determinazione dello spostamento di generico punto

Il metodo degli integrali di Mohr fa sempre riferimento a due sistemi di carico: quello effettivamente agente sulla struttura e quello esploratore unitario, che ha la funzione di porre in evidenza lo spostamento cercato. A differenza del metodo del Castigliano, non c'è nessuna differenza formale nell'utilizzo di tale metodo per determinare lo spostamento in un punto secondo la direzione di una forza effettivamente presente, piuttosto che lo spostamento in un qualsiasi punto della struttura non caricato.

Determinare lo spostamento di rotazione φ_B , per effetto del carico P_1 , nello schema di telaio di Fig.3.

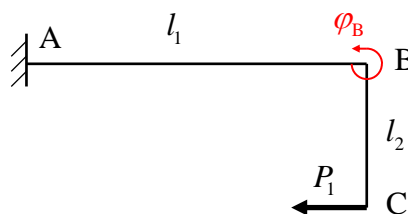


Figura 3: Utilizzo del carico fittizio.

Suggerimento:

Introdurre un momento esploratore unitario in corrispondenza di B, con direzione e verso secondo φ_B .



Soluzione:

$$\varphi_B = -\frac{Pl_1l_2}{EI} \quad (6)$$

4 Equazione della linea elastica mediante l'integrale di Mohr

Mediante l'integrale di Mohr (ma anche attraverso il metodo del Castigliano) si può determinare le componenti di spostamento in *tutti* i punti di una struttura, secondo una direzione, ottenendo quindi l'equazione della linea elastica.

Determinare la linea elastica della trave incastrata (con carico non all'estremità, Fig.4), mediante l'integrale di Mohr.

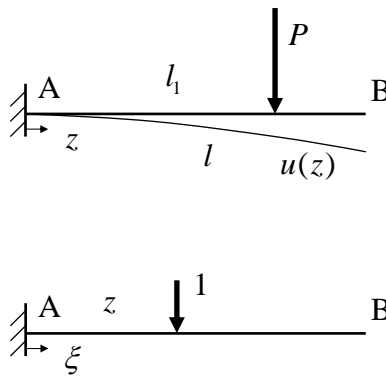


Figura 4: Trave incastrata con carico non di estremità, condizione di carico esploratore unitario nella generica posizione z .

Suggerimento:

Includere un carico esploratore unitario in una generica posizione z . Tenere presente che la variabile z non deve essere confusa con la variabile di integrazione ξ .



Soluzione:

Per $z \leq l_1$:

$$u(z) = \frac{Pz^2}{2EI} \left(l_1 - \frac{z}{3} \right) \quad (7)$$

Per $z > l_1$:

$$u(z) = \frac{Pl_1^2}{2EI} \left(z - \frac{l_1}{3} \right) \quad (8)$$

5 Risoluzione dell'equazione differenziale della linea elastica

Una trave sollecitata a flessione nel piano (trascurando l'effetto del taglio) si deforma secondo l'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (9)$$

Conoscendo le caratteristiche della sollecitazione è quindi possibile risolvere l'equazione differenziale della linea elastica, ed imporre le condizioni al contorno:

- in corrispondenza di un vincolo di spostamento nullo, in un punto \bar{z} , la condizione da imporre è: $u(\bar{z}) = 0$;
- un vincolo di incastro, inoltre elimina anche la rotazione, per cui le condizioni da imporre sono: $u(\bar{z}) = 0$, $du(\bar{z})/dz = 0$;
- in un punto in cui il momento flettente è nullo (ad esempio una cerniera o un appoggio di estremità) la condizione da imporre è: $d^2 u(\bar{z})/dz^2 = 0$;

Risolvere l'equazione differenziale appena mostrata, nel caso di trave incastrata e sollecitata da un carico P non di estremità, Fig.4.

Suggerimento:

Risolvere prima il tratto di sinistra, successivamente utilizzare spostamento e derivata prima per risolvere il tratto di destra.



Soluzione:

Per $z \leq l_1$:

$$u(z) = \frac{Pz^2}{2EI} \left(l_1 - \frac{z}{3} \right) \quad (10)$$

Per $z > l_1$:

$$u(z) = \frac{Pl_1^2}{2EI} \left(z - \frac{l_1}{3} \right) \quad (11)$$