

Esercitazione 01:

Calcolo degli spostamenti mediante il teorema del Castigliano

Indice

1	Flessione fra tre punti	1
2	Flessione generata da più carichi	3
3	Utilizzo del carico fittizio	4

1 Flessione fra tre punti

In Fig.1 è mostrato lo schema di una trave in flessione su tre punti, carico in mezzeria e supporti verticali alle estremità.

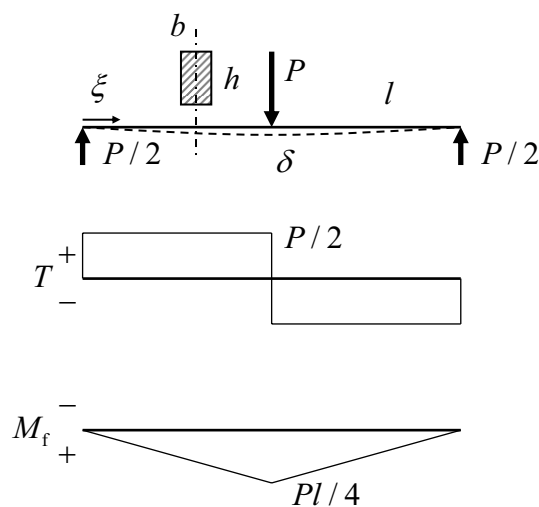


Figura 1: Trave in flessione su tre punti.

Considerando il contributo della sola flessione e applicando il teorema del Castigliano, si può calcolare lo spostamento del punto di mezzeria:

$$\begin{aligned}\delta_M &= \frac{\partial}{\partial P} U_M = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{M_f^2}{2EI} d\xi \\ &= \frac{\partial}{\partial P} 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2EI} P \frac{\xi}{2} P \frac{\xi}{2} d\xi = \frac{\partial}{\partial P} \frac{P^2}{4EI} \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_0^{l/2} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI}\end{aligned}\quad (1)$$

Considerando il contributo della flessione e anche quello del taglio (per la sezione rettangole il fattore di taglio è: $\chi = 6/5$):

$$\delta = \delta_M + \delta_T \quad (2)$$

$$\delta_T = \frac{\partial}{\partial P} U_T = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \chi \frac{T^2}{2GA} d\xi = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{6}{5} \frac{(P/2)^2}{2GA} d\xi = \frac{3}{10} \frac{Pl}{GA} \quad (3)$$

A questo punto è interessante valutare quantitativamente il peso dei due contributi.

Considerando una trave “snella”: $l = 1000$ mm, $b = 12$ mm, $h = 20$ mm, sollecitata con un carico $P = 100$ N (materiale acciaio, costanti elastiche: $E = 205000$ MPa, $\nu = 0.3$, $G = 78800$ MPa¹), si ottiene: $\delta_M = 1.270$ mm e $\delta_T = 0.002$ mm. Il contributo del taglio è minore dell’1%. Considerando, invece, una trave “tozza”: $l = 80$ mm, $b = 12$ mm, $h = 20$ mm (stesso materiale e stesso carico) si ottiene: $\delta_M = 0.00065$ mm e $\delta_T = 0.00013$ mm. In questo caso i due contributi sono dello stesso ordine di grandezza, tuttavia la freccia totale è molto piccola.

Da notare che nello svolgimento dell’esempio precedente è stata determinata l’energia elastica e successivamente è stata eseguita l’operazione di derivazione. Tuttavia si può osservare che vale il teorema:

$$\frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{M_f^2}{2EI} = \int_0^l \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial P} \quad (4)$$

Ritrovare la soluzione δ_M relativa al caso precedente, sfruttando il teorema di derivazione introdotto. Notare come l’onere di calcolo sia minore.



¹Il modulo tangenziale G è legato al modulo di Young E e al modulo di Poisson ν attraverso la relazione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

2 Flessione generata da più carichi

In Fig.2 è mostrato lo schema di un telaio caricato da due forze, che entrambe producono un contributo sullo spostamento orizzontale δ_1 del punto C.

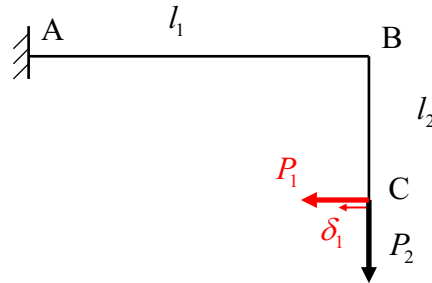


Figura 2: Telaio sollecitato da due carichi, o forze attive.

Determinare lo spostamento δ_1 , considerando soltanto i termini flessionali.



Soluzione:

$$\delta_1 = \frac{1}{EI} \left[l_1 l_2 \left(P_1 l_2 + \frac{1}{2} P_2 l_1 \right) + \frac{1}{3} P_1 l_2^3 \right] \quad (5)$$

Trovare lo spostamento δ_1 dello stesso telaio di Fig.2, nel caso in cui non ci sia la forza P_1



Soluzione:

Sostituire $P_1 = 0$ nell'equazione del risultato precedente:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \frac{P_2 l_1^2 l_2}{EI} \quad (6)$$

3 Utilizzo del carico fittizio

La possibilità di introdurre un carico e successivamente imporre tale carico nullo, al fine di trovare una componente di spostamento in un punto, suggerisce la tecnica del carico fittizio.

Determinare lo spostamento di rotazione φ_B , per effetto del carico P_1 , nello schema di telaio di Fig.3

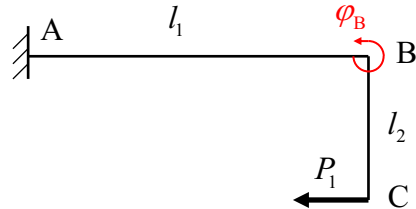


Figura 3: Utilizzo del carico fittizio.

Suggerimento:

Determinare il momento flettente sui vari tratti, introducendo un momento fittizio M_B (con direzione e verso secondo φ_B), eseguire la derivata rispetto a M_B , eseguire l'integrale sulla struttura ed infine imporre $M_B = 0$. È anche possibile imporre $M_B = 0$ prima di eseguire l'integrale, ottenendo calcoli più veloci.



Soluzione:

$$\varphi_B = -\frac{P_1 l_1 l_2}{EI} \quad (7)$$

Determinare la componente, secondo la direzione indicata, dello spostamento del punto C, dove è applicata la forza P_1 , Fig.4

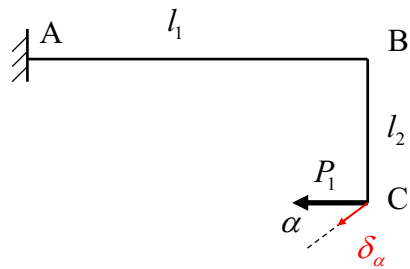


Figura 4: Componente di spostamento non allineata con il carico applicato.

Suggerimento:

Trovare il *vettore* spostamento ed infine la componente secondo la direzione indicata.



Soluzione:

$$\delta_{\alpha} = \frac{P_1 l_2^2}{EI} \left(l_1 + \frac{1}{3} l_2 \right) \cos(\alpha) + \frac{P_1 l_1^2 l_2}{EI} \sin(\alpha) \quad (8)$$

Esercitazione 02:

Calcolo degli spostamenti mediante il metodo degli integrali di Mohr

Indice

1	Flessione fra tre punti	1
2	Flessione generata da più carichi	2
3	Determinazione dello spostamento di generico punto	3
4	Equazione della linea elastica mediante l'integrale di Mohr	4
5	Risoluzione dell'equazione differenziale della linea elastica	5

1 Flessione fra tre punti

In Fig.1(a) è mostrato lo schema di una trave in flessione su tre punti, carico in mezzeria e supporti verticali alle estremità. Al fine di determinare lo spostamento verticale in mezzeria, utilizzando il teorema dei lavori virtuali si applica un carico unitario (esploratore) avente punto di applicazione, direzione e verso, coincidenti con lo spostamento che si intende valutare, Fig.1(b).

È importante sottolineare che il carico esploratore unitario ha punto di applicazione direzione e verso secondo lo spostamento che si intende determinare, *indipendentemente* dal carico applicato. Nel caso considerato il carico esploratore ha direzione e verso del carico reale che sollecita la struttura, ma questo è dovuto solo al fatto che si cerca lo spostamento esattamente in quel punto.

Considerando il contributo della sola flessione, si determina lo spostamento del punto di mezzeria, combinando spostamento e deformazioni dello schema di carico generato da P , con caratteristiche e sollecitazioni del carico unitario, ottenendo la seguente forma (integrale di Mohr):

$$1 \times \delta(= \text{L.V.E.}) = \int_0^l \frac{M(P)}{EI} M(1) d\xi (= \text{L.V.I.}) \quad (1)$$

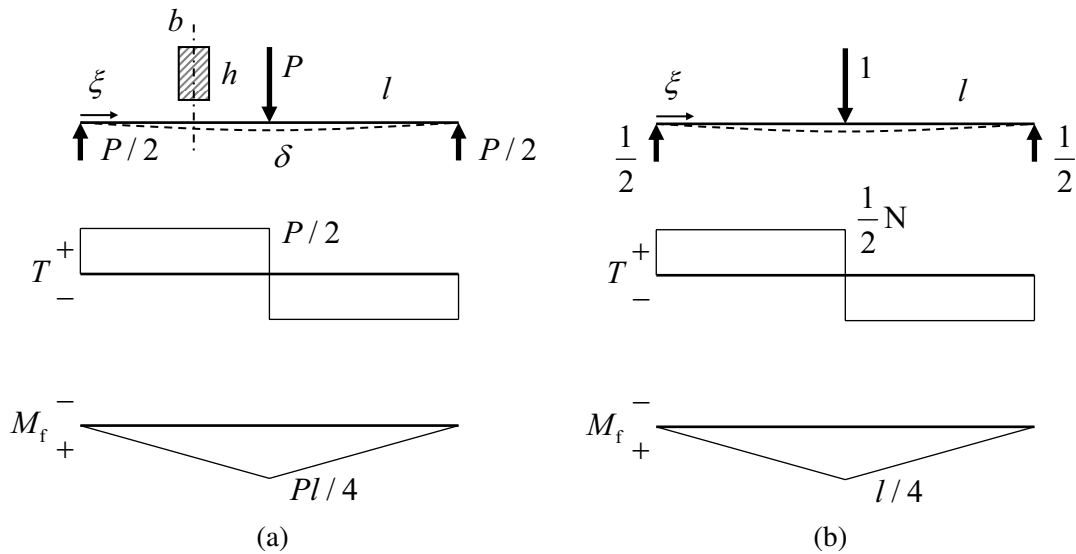


Figura 1: (a) Trave in flessione su tre punti. (b) Carico esploratore unitario.

Essendo il carico unitario, il primo termine è esattamente lo spostamento cercato. Conoscendo le caratteristiche della sollecitazione è quindi possibile risolvere l'integrale:

$$\delta = 2 \int_0^{l/2} \frac{P\xi/2}{EI} \frac{\xi}{2} d\xi = \frac{P}{2EI} \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_0^{l/2} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI} \quad (2)$$

Considerando il contributo della flessione e anche quello del taglio (per la sezione rettangolare il fattore di taglio è: $\chi = 6/5$):

$$\delta = \delta_M + \delta_T \quad (3)$$

$$\delta_T = \int_0^l \chi \frac{T(P)}{GA} T(1) = 2 \int_0^{l/2} \frac{6}{5} \frac{P/2}{GA} \frac{1}{2} d\xi = \frac{3}{10} \frac{Pl}{GA} \quad (4)$$

Notare che si ritrovano gli stessi risultati ottenuti nell'esercitazione precedente, utilizzando il teorema di Castigliano. Infatti, il teorema dei lavori virtuali e quello di Castigliano, anche se hanno una formulazione diversa, si implicano a vicenda. Più precisamente si può notare che la distribuzione di momento flettente (ed eventuali altre caratteristiche della sollecitazione che hanno un peso significativo nel calcolo dello spostamento) ottenuta applicando lo spostamento esploratore unitario (Mohr) coincide con la derivata del momento rispetto alla forza che agisce sul punto e secondo la direzione dello spostamento cercato (Castigliano). Secondo la notazione dell'esercizio mostrato: $M(1) = \partial M / \partial P$. Quindi gli argomenti di integrazione di Castigliano e di Mohr coincidono, come era lecito attendersi dal momento che il risultato finale deve essere lo stesso.

2 Flessione generata da più carichi

In Fig.2 è mostrato lo schema di un telaio caricato da due forze, che entrambe producono un contributo sullo spostamento orizzontale δ_1 del punto C.

Determinare lo spostamento δ_1 , considerando soltanto i termini flessionali, utilizzando il metodo dell'integrale di Mohr.

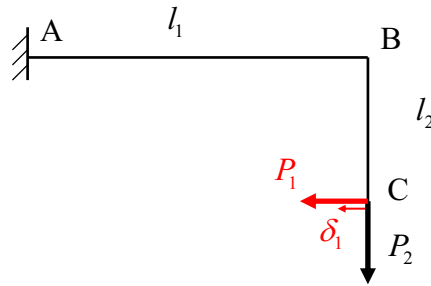


Figura 2: Telaio sollecitato da due carichi, o forze attive.



Soluzione:

$$\delta_1 = \frac{1}{EI} \left[l_1 l_2 \left(P_1 l_2 + \frac{1}{2} P_2 l_1 \right) + \frac{1}{3} P_1 l_2^3 \right] \quad (5)$$

3 Determinazione dello spostamento di generico punto

Il metodo degli integrali di Mohr fa sempre riferimento a due sistemi di carico: quello effettivamente agente sulla struttura e quello esploratore unitario, che ha la funzione di porre in evidenza lo spostamento cercato. A differenza del metodo del Castigliano, non c'è nessuna differenza formale nell'utilizzo di tale metodo per determinare lo spostamento in un punto secondo la direzione di una forza effettivamente presente, piuttosto che lo spostamento in un qualsiasi punto della struttura non caricato.

Determinare lo spostamento di rotazione φ_B , per effetto del carico P_1 , nello schema di telaio di Fig.3.

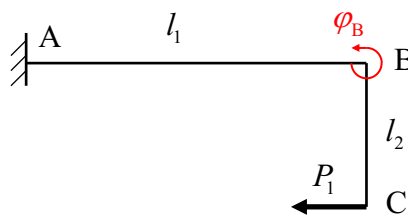


Figura 3: Utilizzo del carico fittizio.

Suggerimento:

Introdurre un momento esploratore unitario in corrispondenza di B, con direzione e verso secondo φ_B .



Soluzione:

$$\varphi_B = -\frac{Pl_1l_2}{EI} \quad (6)$$

4 Equazione della linea elastica mediante l'integrale di Mohr

Mediante l'integrale di Mohr (ma anche attraverso il metodo del Castigliano) si può determinare le componenti di spostamento in *tutti* i punti di una struttura, secondo una direzione, ottenendo quindi l'equazione della linea elastica.

Determinare la linea elastica della trave incastrata (con carico non all'estremità, Fig.4), mediante l'integrale di Mohr.

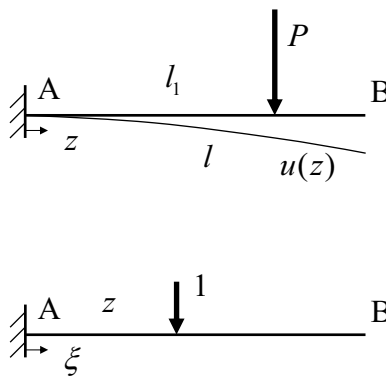


Figura 4: Trave incastrata con carico non di estremità, condizione di carico esploratore unitario nella generica posizione z .

Suggerimento:

Includere un carico esploratore unitario in una generica posizione z . Tenere presente che la variabile z non deve essere confusa con la variabile di integrazione ξ .



Soluzione:

Per $z \leq l_1$:

$$u(z) = \frac{Pz^2}{2EI} \left(l_1 - \frac{z}{3} \right) \quad (7)$$

Per $z > l_1$:

$$u(z) = \frac{Pl_1^2}{2EI} \left(z - \frac{l_1}{3} \right) \quad (8)$$

5 Risoluzione dell'equazione differenziale della linea elastica

Una trave sollecitata a flessione nel piano (trascurando l'effetto del taglio) si deforma secondo l'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (9)$$

Conoscendo le caratteristiche della sollecitazione è quindi possibile risolvere l'equazione differenziale della linea elastica, ed imporre le condizioni al contorno:

- in corrispondenza di un vincolo di spostamento nullo, in un punto \bar{z} , la condizione da imporre è: $u(\bar{z}) = 0$;
- un vincolo di incastro, inoltre elimina anche la rotazione, per cui le condizioni da imporre sono: $u(\bar{z}) = 0$, $du(\bar{z})/dz = 0$;
- in un punto in cui il momento flettente è nullo (ad esempio una cerniera o un appoggio di estremità) la condizione da imporre è: $d^2 u(\bar{z})/dz^2 = 0$;

Risolvere l'equazione differenziale appena mostrata, nel caso di trave incastrata e sollecitata da un carico P non di estremità, Fig.4.

Suggerimento:

Risolvere prima il tratto di sinistra, successivamente utilizzare spostamento e derivata prima per risolvere il tratto di destra.



Soluzione:

Per $z \leq l_1$:

$$u(z) = \frac{Pz^2}{2EI} \left(l_1 - \frac{z}{3} \right) \quad (10)$$

Per $z > l_1$:

$$u(z) = \frac{Pl_1^2}{2EI} \left(z - \frac{l_1}{3} \right) \quad (11)$$

Esercitazione 03:

Calcolo della linea elastica e carico critico di strutture a trave

Indice

1	Trave incastrata in flessione a sezione variabile	1
2	Trave appoggiata su due punti, caricata a sbalzo	2
3	Instabilità dell'equilibrio di strutture a trave caricate di punta	3
3.1	Sistemi ad elasticità concentrata	3
3.2	Trave ad elasticità distribuita	6

1 Trave incastrata in flessione a sezione variabile

In Fig.1 è mostrato lo schema di una trave incastrata, sollecitata da un carico flettente di estremità, la cui sezione b è variabile lungo l'asse della trave, ed è pari a b_0 in corrispondenza dell'incastro.

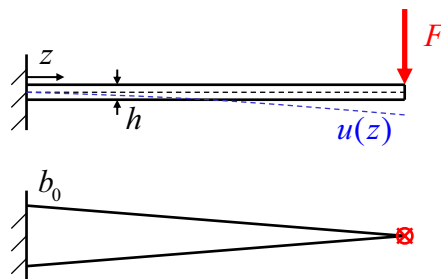


Figura 1: Trave incastrata, sollecitata da un carico flettente di estremità, con sezione variabile.

Determinare l'abbassamento dell'asse della trave u in funzione della coordinata curvilinea z , considerando soltanto i termini flessionali. Confrontare la soluzione ottenuta con quella relativa al caso notevole di trave incastrata e caricata all'estremità, con sezione uniforme.



Soluzione:

$$u(z) = \frac{6Fl}{Eb_0h^3}z^2 \quad (1)$$

2 Trave appoggiata su due punti, caricata a sbalzo

In Fig.2 è mostrato lo schema di una trave appoggiata su due punti e sollecitata da un carico flettente posto a sbalzo.

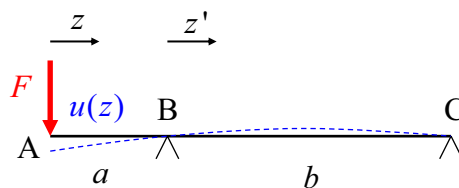


Figura 2: Trave su due appoggi con carico a sbalzo.

Determinare l'abbassamento dell'asse della trave u in funzione della coordinata curvilinea z , considerando soltanto i termini flessionali.

Suggerimento: Trovare l'integrale generale nei due tratti AB e BC, imporre spostamento nullo in corrispondenza degli appoggi B e C ed infine imporre la condizione di continuità e di tangenza in corrispondenza del punto B. Utilizzare la coordinata z nel primo tratto, mentre risulta più comodo introdurre un'altra coordinata z' per il secondo tratto.



Soluzione:

Tratto AB:

$$u(z) = \frac{Fz^3}{6EI} - \frac{Fa}{EI} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \right) z + \frac{Fa^2}{3EI}(a+b) \quad (2)$$

Tratto BC:

$$u'(z') = -\frac{Fz'^3}{6EI} \frac{a}{b} + \frac{Faz'^2}{2EI} - \frac{Fab}{3EI}z' \quad (3)$$

3 Instabilità dell'equilibrio di strutture a trave caricate di punta

3.1 Sistemi ad elasticità concentrata

In Fig.3 è mostrato lo schema di una trave dotata di una sconnessione in mezzeria, sostenuta da un elemento ad elasticità concentrata (molla flessionale) e caricata da una forza P secondo l'asse della trave.

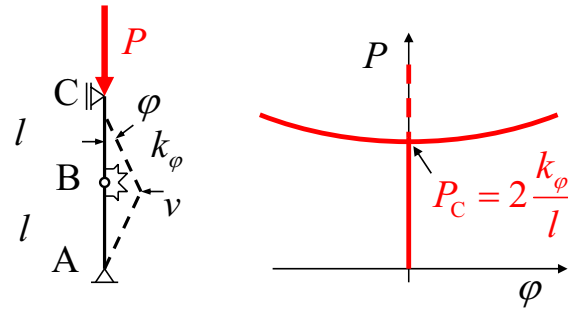


Figura 3: Trave caricata di punta con sconnessione in mezzeria ed elasticità concentrata.

La condizione indeformata è di equilibrio, ma, tale equilibrio perde di stabilità ad un certo valore del carico, detto carico critico P_C .

Al fine di valutare l'entità del carico critico è necessario considerare la struttura in una configurazione diversa da quella indeformata. Tuttavia, è di interesse soltanto il carico critico e non il comportamento successivo alla perdita di stabilità. Per cui è possibile sfruttare tutte le semplificazioni relative alla linearizzazione e scrivere la condizione di equilibrio nella configurazione deformata:

$$Pv - k_\varphi \frac{2v}{l} = 0 \quad (4)$$

Al fine di avere tale condizione soddisfatta, con spostamento v non nullo, è necessario che:

$$P - 2 \frac{k_\varphi}{l} = 0 \quad (5)$$

per cui il carico critico è pari a:

$$P_C = 2 \frac{k_\varphi}{l} \quad (6)$$

Avendo sfruttato la linearizzazione non è possibile avere nessuna informazione circa il comportamento dopo aver raggiunto il carico critico. Spesso non è di interesse tale informazione, in quanto è bene che la struttura rimanga lontana dalla condizione di perdita di stabilità.

Determinare il carico critico relativo alla struttura di Fig.4.

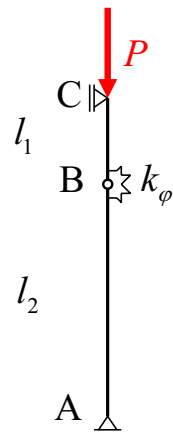


Figura 4: Trave caricata di punta con sconnessione non in mezzzeria ed elasticità concentrata.



Soluzione:

$$P_C = \frac{k_\varphi}{l^*}, \quad \frac{1}{l^*} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \quad (7)$$

Determinare il carico critico relativo alla struttura di Fig.5.

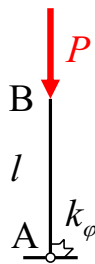


Figura 5: Trave caricata di punta, incernierata alla base con elasticità concentrata.



Soluzione:

$$P_C = \frac{k_\varphi}{l} \quad (8)$$

Osservazione:

Notare che il carico critico della struttura di Fig.5 è lo stesso di quella della struttura di Fig.4, nel caso in cui: $l_2 \gg l_1$.

Determinare il carico critico relativo alla struttura di Fig.6, in cui compaiono due sconnessioni elastiche.

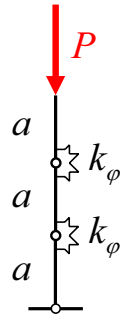


Figura 6: Trave caricata di punta, dotata di due sconnessioni ad elasticità concentrata.

Suggerimento:

Notare che la generica configurazione deformata è funzione di due parametri, ad esempio gli spostamenti orizzontali dei due punti intermedi. La condizione di equilibrio diventa quindi un sistema. L'equilibrio perde la stabilità in corrispondenza del carico per il quale il sistema ammette infinite soluzioni, ossia determinante della matrice del sistema nullo.



Soluzione:

$$P_C = \frac{k_\varphi}{a} \tag{9}$$

3.2 Trave ad elasticità distribuita

Le strutture mostrate in precedenza hanno interesse didattico, tuttavia, le travi sono caratterizzate da elasticità distribuita, piuttosto che concentrata.

Il caso più semplice di calcolo di carico critico con struttura a trave (elasticità distribuita) è fornito dalla trave caricata di punta con estremità vincolata lateralmente (trave di Eulero), Fig.7.

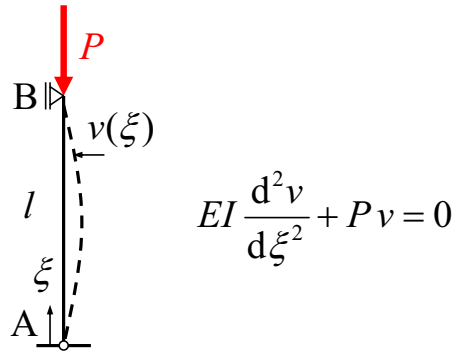


Figura 7: Trave caricata di punta ed incernierata alla base.

C'è una profonda differenza fra il calcolo della linea elastica per strutture che non si discostano molto dalla loro configurazione di riferimento ed invece problemi di instabilità, dove la minima perturbazione dalla configurazione di riferimento è la causa stessa della perdita di stabilità. Il momento flettente Pv è appunto generato dalla deformazione stessa della struttura.

Imponendo l'equazione della linea elastica, nella configurazione *deformata* rispetto all'equilibrio:

$$EI \frac{d^2 v}{d\xi^2} + Pv = 0 \quad (10)$$

ponendo:

$$\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (11)$$

ed utilizzando l'apice per intendere la derivata rispetto all'ascissa curvilinea ξ , si può riscrivere l'equazione della linea elastica secondo la forma:

$$v'' + \lambda^2 v = 0 \quad (12)$$

che ammette come integrale generale:

$$v(\xi) = A \sin(\lambda \xi) + B \cos(\lambda \xi) \quad (13)$$

Imponendo la condizione al contorno:

$$v(\xi = 0) = 0 \quad (14)$$

segue che: $B = 0$.

Infine, imponendo l'altra condizione di spostamento nullo all'estremità, si ottiene:

$$A \sin(\lambda l) = 0 \quad (15)$$

Anche in questo caso si ripresenta la soluzione indeformata: $A = 0$, ma anche la possibilità di avere una soluzione *deformata* che soddisfi le condizioni al contorno:

$$\sin(\lambda l) = 0 \quad (16)$$

che è risolta da:

$$\lambda l = n\pi \quad (17)$$

È opportuno determinare soltanto la prima delle soluzioni ($n = 1$), dato che se la struttura perde la stabilità ad un certo carico non ha interesse il comportamento a carichi più alti. Quindi in definitiva il carico critico è dato dalla condizione precedente sostituendo $n = 1$ (carico di critico di Eulero):

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (18)$$

Il risultato appena trovato è corretto, tuttavia, l'imposizione dell'equazione differenziale della linea elastica, Eq.10, è valida solo nei casi particolari in cui è possibile scrivere il momento flettente in funzione dello spostamento incognito. Nel caso di Fig.8, invece, il carico P genera un momento flettente variabile lungo la trave che è funzione dello spostamento $v(\xi)$ ma anche dello spostamento dell'estremità $v(l)$.

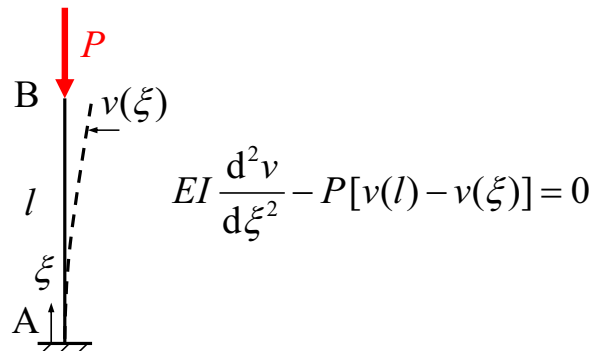


Figura 8: Trave caricata di punta, incastro alla base ed estremità libera.

L'equazione della linea elastica è:

$$EI \frac{d^2v}{d\xi^2} + Pv = Pv(l) \quad (19)$$

che è a differenza della precedente presenta un termine noto. Questa equazione differenziale può essere riscritta introducendo λ , con lo stesso significato del caso precedente:

$$v'' + \lambda^2 v = \lambda^2 v(l) \quad (20)$$

ed ammette la soluzione:

$$v(\xi) = A \sin(\lambda \xi) + B \cos(\lambda \xi) + c_1 \quad (21)$$

Determinare il carico critico, di perdita di stabilità a carico di punta, per il caso di Fig.8.

Suggerimento:

Utilizzare la soluzione dell'equazione differenziale Eq.21, ed imporre le condizioni al contorno.



Soluzione:

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (22)$$

Osservazione:

Si può ritrovare la stessa soluzione per similitudine geometrica dal caso di Eulero, precedentemente risolto.

Esercitazione 04: Collegamenti bullonati

Indice

1 Flangia bullonata sottoposta a sollecitazione generica	1
1.1 Calcolo delle azioni sui bulloni	1
1.2 Verifica statica bullone, criterio di locale aderenza fra le piastre	2
2 Collegamento bullonato fra due travi	4
3 Collegamento con distribuzione dei bulloni non a doppia simmetria	5

1 Flangia bullonata sottoposta a sollecitazione generica

1.1 Calcolo delle azioni sui bulloni

In Fig.1 si mostra una flangia bullonata che collega due piastre, di cui una è vincolata al suolo, mentre l'altra è saldata ad un telaio sollecitato da carichi esterni.

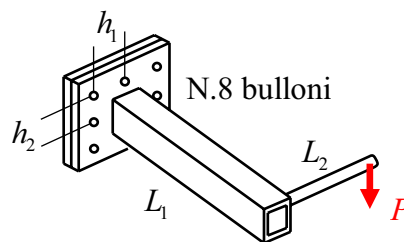


Figura 1: Flangia bullonata.

Al fine di determinare le sollecitazioni che agiscono sui singoli bulloni, il piano della flangia può essere visto come la sezione di una trave, in cui l'area è sostituita da elementi puntiformi in corrispondenza delle posizioni dei bulloni. Nelle zone di competenza dei bulloni agiscono dei carichi tali da garantire l'equilibrio. Facendo alcune ipotesi sulla distribuzione di tali carichi e imponendo l'equilibrio è possibile stimarli. In Fig.2 si mostrano le distribuzioni di carichi sui bulloni, per effetto delle sollecitazioni di: azione normale, taglio, momento flettente e momento

torcente.

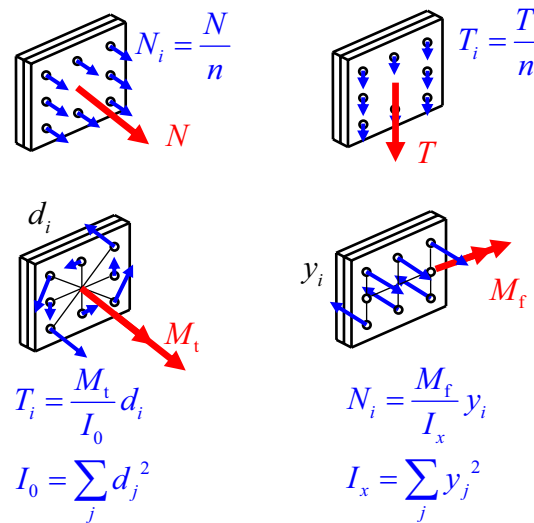


Figura 2: Distribuzioni dei carichi sui bulloni, per effetto delle varie sollecitazioni.

Nel caso di azione normale o taglio, semplicemente il carico si ripartisce equamente sui vari bulloni. Nel caso di flessione o torsione si assume l'ipotesi di piastra molto più rigida dei bulloni e quindi le forze sono proporzionali alla distanza dall'asse neutro, per la flessione, e dal baricentro, per la torsione.

Determinare le sollecitazioni che agiscono sui singoli bulloni relativi alla condizione di carico di Fig.1.

I dati del problema sono:

$$\begin{aligned}
 P &= 10 \text{ kN} \\
 L_1 &= 3 \text{ m} \\
 L_2 &= 2 \text{ m} \\
 h_1 &= 200 \text{ mm} \\
 h_2 &= 150 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Individuare il bullone che subisce l'azione tangenziale maggiore (in modulo) e quello che subisce l'azione di forza normale maggiore (con segno, ossia quello che subisce un'azione di trazione maggiore).



Soluzione:

Uno dei bulloni della flangia subisce la massima azione tangenziale di $T_{\max} = 14.4 \text{ kN}$, e anche la massima azione di trazione di $N_{\max} = 33.3 \text{ kN}$.

1.2 Verifica statica bullone, criterio di locale aderenza fra le piastre

I bulloni vengono preserrati con un carico relativamente elevato, altrimenti la loro condizione di esercizio non è corretta. Il preserraggio dei bulloni genera una condizione di compressione fra

le piastre. Prima dell'applicazione di carichi esterni la forza di preserraggio sui bulloni è uguale all'azione di compressione fra le piastre. Successivamente, la presenza di azione di trazione genera una riduzione della forza locale di compressione fra le piastre, Fig.3.

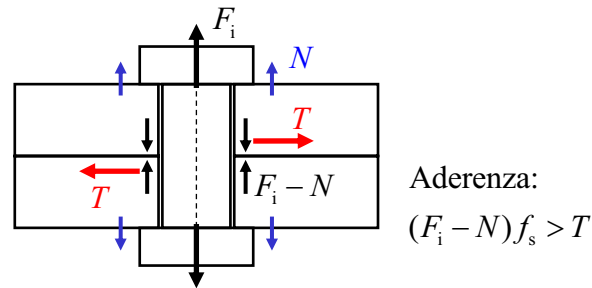


Figura 3: Azioni che agiscono nella zona intorno al bullone.

N è l'azione di trazione, le piastre sono quindi in compressione di una forza pari a: $F_i - N$, in cui F_i è la forza di preserraggio iniziale. T è l'azione tangenziale da garantire, la condizione di aderenza che deve essere soddisfatta è:

$$(F_i - N)f_s > T$$

in cui f_s è il coefficiente di attrito di primo distacco o di aderenza.

Il precarico da imporre al bullone F_i è pari a:

$$F_i = 0.9 S_p A_t$$

in cui: S_p è la massima tensione di precarico che è molto alta, pari al 90% del carico di snervamento, e A_t è l'area della sezione resistente. Il diametro con il quale si valuta la sezione resistente è circa diametro esterno della filettatura (cresta dei filetti) meno il passo della filettatura, per tenere di conto che il diametro della vite non è pieno. Tipicamente non si sfrutta al massimo la tensione di precarico, da cui il coefficiente 0.9 nella formula di F_i .

Verificare la condizione di aderenza fra le due piastre del bullone relativo all'esercitazione precedente su cui agisce azione tangenziale e forza di trazione massime (ipotizzando che sia stato applicato il serraggio opportuno).

Assumere:

$$f_s = 0.2,$$

Classe del bullone buona: SAE 8.8, $S_p = 600$ MPa (pari a circa $0.9S_Y$),

Diametro esterno della vite, $d = 22$ mm, passo $p = 2.5$ mm.



Soluzione:

La condizione di aderenza fra le piastre risulta verificata.

2 Collegamento bullonato fra due travi

In Fig.4 si mostra un collegamento bullonato, al fine di realizzare un incastro fra due travi.

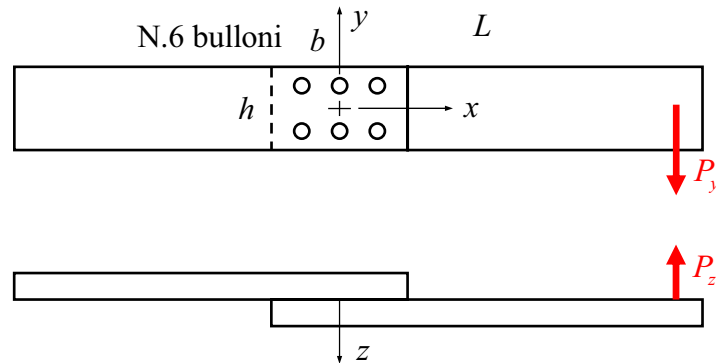


Figura 4: Collegamento bullonato fra due travi.

La forza ha una direzione generica per cui, nella sezione di bullonatura, si ha: forza normale, taglio, flessione e torsione.

I dati del problema sono:

$$\begin{aligned} P_y &= 1000 \text{ N} \\ P_z &= 500 \text{ N} \\ L &= 800 \text{ mm} \\ b &= 50 \text{ mm} \\ h &= 50 \text{ mm} \\ \text{Classe bullone SAE: } 5.8, S_p &= 380 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (2)$$

Determinare il bullone che presenta la situazione più sfavorevole di azione di tangenziale / azione di trazione. Verificare la condizione di aderenza, considerando stesso materiale dell'esercizio precedente e diametro vite $d = 10 \text{ mm}$, passo $p = 1.5 \text{ mm}$.

Suggerimento:

Verificare che le azioni tangenziale e normale sui bulloni generate da forza normale e taglio sono trascurabili, rispetto a quelle generate da flessione torsione.



Soluzione:

La condizione di aderenza risulta verificata, anche se con un margine ridotto. Quindi si suggerisce di utilizzare un'altra classe di materiale del bullone, o un diametro d maggiore, al fine di avere un preserraggio più elevato.

3 Collegamento con distribuzione dei bulloni non a doppia simmetria

In Fig.5 si mostra una flangia bullonata che realizza l'incastro di una trave a flessione. In questo caso lo schema dei bulloni non ammette due simmetrie.

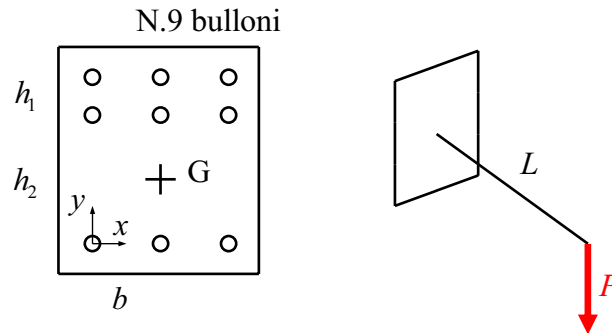


Figura 5: Flangia bullonata trave a flessione, schema dei bulloni non simmetrico.

La disposizione dei bulloni di Fig.5 è ottimizzata. La 'densità' dei bulloni superiori è doppia rispetto ai bulloni inferiori. Essendo i bulloni superiori in trazione si trovano in condizioni peggiori rispetto a quelli inferiori, per cui una migliore ripartizione delle azioni di trazione è vantaggiosa.

La disposizione dei bulloni di Fig.5 ammette tuttavia una simmetria. Risultano quindi definite le due direzioni principali della sezione: una è la direzione di simmetria e l'altra è la direzione ortogonale. Si possono quindi facilmente valutare i momenti secondi baricentrici principali. Inoltre il momento flettente che agisce è secondo una delle direzioni principali.

Verificare la condizione di aderenza fra piastre per il bullone che presenta la peggiore condizione azione tangenziale / trazione.

I dati del problema sono:

$$\begin{aligned} P &= 10000 \text{ N} \\ b &= 100 \text{ mm} \\ h_1 &= 50 \text{ mm} \\ h_2 &= 100 \text{ mm} \\ L &= 500 \text{ mm} \end{aligned} \quad (3)$$

Suggerimento:

Determinare il baricentro della distribuzione di bulloni, e successivamente calcolare il momento secondo baricentrico principale.



Soluzione:

Sollecitazione di taglio (uguale su tutti i bulloni) pari a: $T_i = 1\,111\text{ N}$, trazione sulla fila superiore di bulloni pari a: $N_{\max} = 9\,524\text{ N}$.

Scegliendo un diametro esterno della vite pari a $d = 10\text{ mm}$, $p = 1.5\text{ mm}$, classe di materiale SAE 5.8, $S_p = 380\text{ MPa}$, ed assumendo un tipico coefficiente di attrito di primo distacco fra due piastre in acciaio pari a $f_s = 0.2$, la condizione di aderenza risulta soddisfatta:

$$(F_i - N)f_s = 1\,977\text{ N} > T_i = 1\,111\text{ N}$$

Esercitazione 05: Collegamenti bullonati e saldature

Indice

1	Collegamenti bullonati con schema complesso	1
2	Collegamenti saldati	4

1 Collegamenti bullonati con schema complesso

In precedenza è stato affrontato il problema di determinare le forze che agiscono in corrispondenza dei bulloni, per flange con schemi simmetrici, Fig. 1(a). In questo caso le direzioni principali sono ovviamente gli assi di simmetria dello schema dei bulloni. Anche nel caso di un solo asse di simmetria, tale asse è principale (quindi il suo perpendicolare è a sua volta principale).

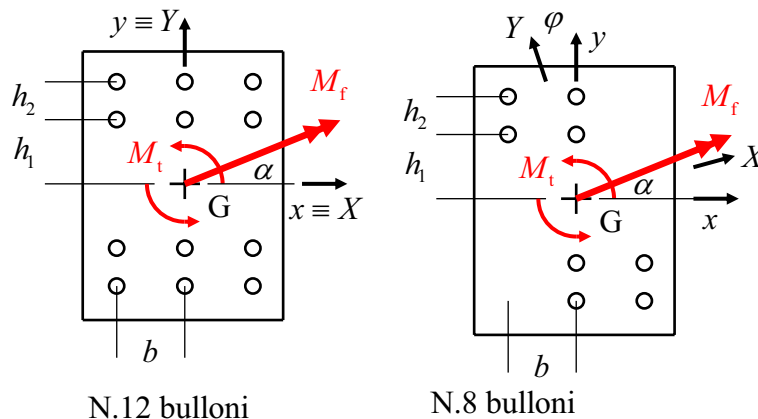


Figura 1: (a) Flangia bullonata con schema a doppia simmetria. (b) Flangia bullonata con schema non simmetrico.

Nel caso di schema non simmetrico, le direzioni principali non sono immediatamente evidenti, Fig. 1(b). Presi due assi baricentrici generici x, y , gli assi principali X, Y sono ruotati di un angolo

φ , in genere, non nullo. Inizialmente si possono calcolare i momenti secondi rispetto agli assi x, y :

$$I_x = \sum_i y_i^2$$

$$I_y = \sum_i x_i^2$$

$$I_{xy} = \sum_i x_i y_i$$

in cui x_i, y_i sono le coordinate delle posizioni dei bulloni (ad esempio, nello schema di Fig.1(b): $i = 1 \dots 8$).

Successivamente si determina l'angolo di rotazione invertendo la relazione:

$$\tan(2\varphi) = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y}$$

e si possono trovare i momenti secondi principali:

$$I_X = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_Y = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Ovviamente, qualora fosse $I_{xy} = 0$, le direzioni x, y sarebbero già le principali, per definizione. Tale situazione può accadere anche se lo schema non è simmetrico, dato che x, y sono semplicemente direzioni qualsiasi.

Le direzioni principali e i momenti secondi principali sono necessari per la determinazione delle azioni normali generate da una sollecitazione di flessione (M_f in Fig.1). Nel caso in cui il vettore M_f sia allineato con una delle direzioni principali, si ha flessione *retta*. Invece, nel caso in cui non sia allineato con nessuna direzione principale si ha flessione *deviata*. In quest'ultimo caso è necessario scomporre M_f nelle componenti secondo X e Y , eseguire i due calcoli di flessione rette ed applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Determinare le azioni che agiscono sui bulloni (sia tangenziali che normali), per effetto dei momenti M_f e M_t , dello schema di Fig.1(a). In particolare determinare la massima azione normale e la massima azione tangenziale.

I dati del problema sono:

$$\begin{aligned} M_t &= 1\,200 \text{ Nm} \\ M_f &= 3\,500 \text{ Nm} \\ \alpha &= 20^\circ \\ h_1 &= 75 \text{ mm} \\ h_2 &= 20 \text{ mm} \\ b &= 50 \text{ mm} \end{aligned} \tag{1}$$



Soluzione:

Un bullone dello schema di Fig.1(a) subisce sia la massima azione normale N_{\max} sia la massima azione tangenziale T_{\max} :

$$N_{\max} = 6501 \text{ N}$$

$$T_{\max} = 1179 \text{ N}$$

Dimensionare il bullone più sollecitato, scegliendo fra le dimensioni (diametro esterno e passo) riportate in Tab.1, classe SAE 5.8, $S_p = 380 \text{ MPa}$, e coefficiente di attrito statico $f_s = 0.2$.

Φ [mm]	p [mm]	Φ [mm]	p [mm]
5	0.8	12	1.75
6	1.0	14	2.0
7	1.0	16	2.0
8	1.25	18	2.5
10	1.5	20	2.5

Tabella 1: Diametro esterno e passo di alcuni bulloni unificati.



Soluzione:

La combinazione $\Phi = 10 \text{ mm}$, $p = 1.5 \text{ mm}$, garantisce la condizione di aderenza, con un margine di sicurezza superiore a 2: $(F_i - N_{\max})f_s = 2581 \text{ N} \gg T_{\max} = 1179 \text{ N}$.

Si supponga che le due coppie di bulloni laterali vengano eliminate, ottenendo la configurazione di Fig.1(b).

Determinare azione normale massima e tangenziale massima, e verificare se il dimensionamento fatto in precedenza garantisce anche in questa configurazione l'aderenza fra le piastre.

Suggerimento:

Notare che la posizione del baricentro non cambia, individuare le nuove direzioni principali, infine, scomporre la sollecitazione di flessione nelle due componenti di flessione retta e applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Notare inoltre che la direzione di M_f è circa la stessa del nuovo asse principale. Sfruttare tale semplificazione.



Soluzione:

Le azioni che agiscono sul bullone più sollecitato sono:

$$N_{\max} = 5772 \text{ N}$$

$$T_{\max} = 1851 \text{ N}$$

Utilizzando le stesse dimensioni del bullone trovate per il caso precedente, la verifica di aderenza viene soddisfatta anche se con margine ridotto.

Osservazione:

Nonostante siano stati eliminati due bulloni il margine di sicurezza è lo stesso verificato. Tale situazione può sembrare paradossale. Da notare che i bulloni eliminati hanno allineato l'asse di sollecitazione (ossia l'asse perpendicolare all'asse neutro) con la diagonale contenente gli altri bulloni rimasti. Invece, eliminare i bulloni dell'altra diagonale avrebbe prodotto un effetto molto negativo.

2 Collegamenti saldati

Analogamente ai collegamenti bullonati una soluzione dello stato di tensione, nella sezione di saldatura, si può ottenere assumendo il cordone molto più cedevole rispetto ai due elementi saldati fra loro, ed imponendo l'equilibrio, Fig.2.

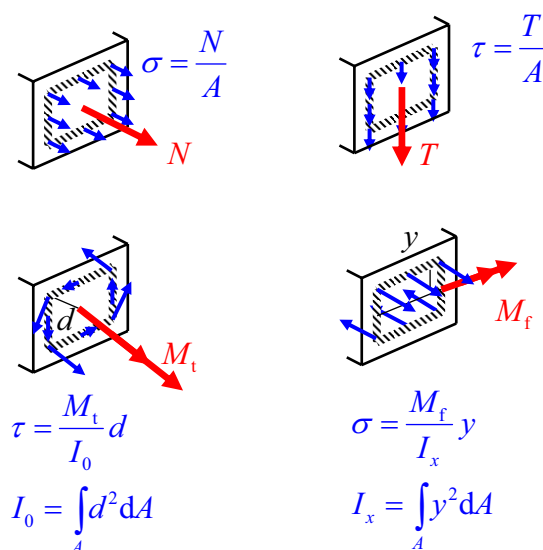


Figura 2: Stato di tensione nella sezione di saldatura, generato dalle varie caratteristiche di sollecitazione.

Anche per il calcolo delle tensioni nella sezione di saldatura si presentano le eventuali difficoltà di flessione deviata e sezione non simmetrica.

L'area A è quella del cordone proiettata sul piano della saldatura, e $I_0, I_x (I_y)$ sono i momenti secondi di area rispettivamente polare ed assiale. Nel caso di giunto saldato a cordone d'angolo, si individua come sezione resistente il ribaltamento dello spessore di gola sul piano della sezione della saldatura, Fig3.

Analogamente ai collegamenti bullonati, le differenti componenti della tensione nel cordone hanno ruoli diversi. Per il caso di cordone d'angolo, considerando la direzione del cordone, si individuano le componenti di tensione: σ_{\perp} (tensione normale perpendicolare), τ_{\perp} (tensione tangenziale perpendicolare), τ_{\parallel} (tensione tangenziale parallela).

È importante sottolineare che la componente τ_{\perp} non esiste secondo la teoria dello stato di sollecitazione della trave, dato che implica uno stato di tensione su un bordo libero. Nella trattazione della sollecitazione della saldatura a cordone d'angolo invece tale tensione è ammessa in quanto è una media di uno stato di tensione fortemente variabile. Nel caso di cordone a piena penetrazione fra due lembi, lo stato di sollecitazione è lo stesso di quello nella sezione di una trave, ed

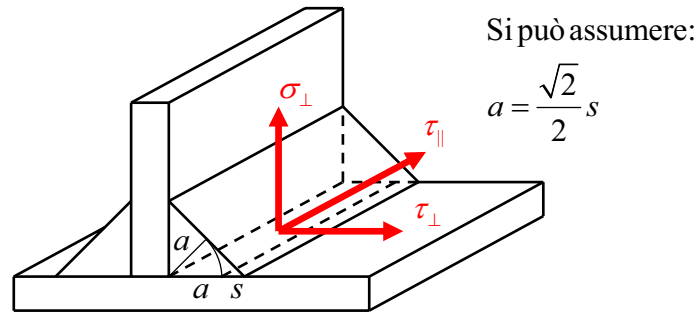


Figura 3: Giunto a cordone d'angolo, componenti di tensione.

infatti la componente τ_{\perp} non è presente.

La procedura di calcolo descritta nella norma italiana CNR 10011-97, permette di valutare la resistenza del giunto saldato a cordone d'angolo sulla base dei valori di σ_{\perp} , τ_{\perp} , τ_{\parallel} , della qualità della saldatura e della tensione ammissibile del materiale.

In Fig.4 è mostrata una mensola sollecitata da un'azione normale posta all'estremità.

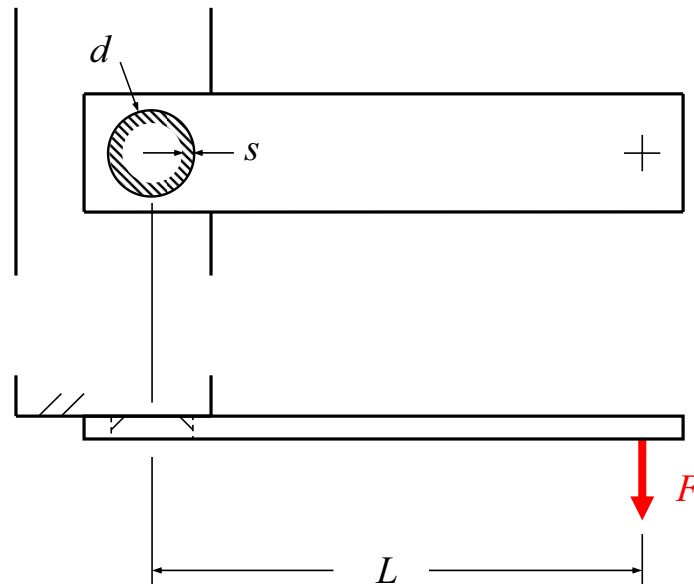


Figura 4: Mensola saldata sollecitata da una forza normale all'estremità.

La sezione di saldatura è ricavata all'interno di un foro, ed è sollecitata a trazione e a flessione. Notare che in corrispondenza della sezione di saldatura è presente solo la componente σ_{\perp} .

Determinare lo stato di sollecitazione nel cordone della saldatura, in particolare determinare la massima tensione normale σ_{\perp} .

I dati del problema sono:

$$F = 270 \text{ N}$$

$$L = 1300 \text{ mm}$$

$$d = 50 \text{ mm}$$

$$s = 2 \text{ mm}$$

(2)



Soluzione:

Nella sezione della saldatura la massima tensione normale σ_{\perp} è:

$$\sigma_{\perp}(\text{max}) = 139 \text{ MPa}$$

In Fig.5 è mostrata una mensola sollecitata da un'azione tangenziale posta all'estremità.

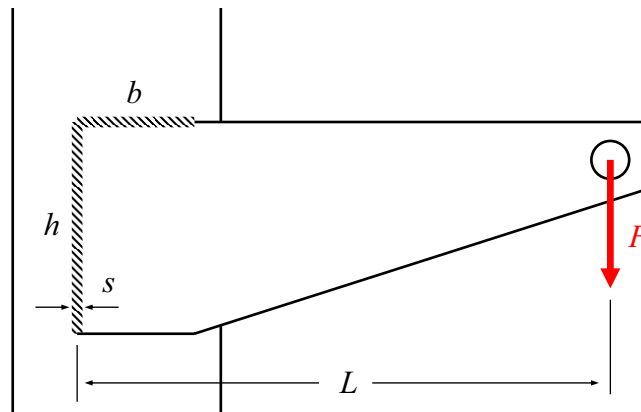


Figura 5: Mensola saldata sollecitata da una forza tangenziale all'estremità.

La sezione di saldatura è su due cordoni ed è sollecitata a torsione e a taglio. Nel cordone agiscono soltanto tensioni tangenziali normale e parallela $\tau_{\perp}, \tau_{\parallel}$.

Determinare lo stato di sollecitazione nella sezione della saldatura di Fig.5, in particolare individuare il punto in cui $\sqrt{\tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2}$ è maggiore, e i valori di $\tau_{\perp}, \tau_{\parallel}$ in tale punto.

I dati del problema sono:

$$F = 1.8 \text{ kN}$$

$$L = 1300 \text{ mm}$$

$$b = 120 \text{ mm}$$

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$s = 2 \text{ mm}$$

(3)

Soluzione:

Nel punto più sollecitato della saldatura le componenti di tensione tangenziale sono:

$$\tau_{\perp} = 146 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\parallel} = 20 \text{ MPa}$$



Infine, si può eseguire la verifica statica del punto più sollecitato del collegamento. Secondo la normativa CNR è necessario verificare che:

$$\sqrt{\sigma_{\perp}^2 + \tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2} \leq 0.70 \sigma_{\text{adm}}$$

nel caso si utilizzi Fe 510, per il quale $\sigma_{\text{adm}} = 240$ MPa.

Considerando lo stato di sollecitazione dell'esempio precedente:

$$\sqrt{\sigma_{\perp}^2 + \tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2} = 147 \text{ MPa} < 0.70 \sigma_{\text{adm}} = 168 \text{ MPa}$$

la verifica risulta quindi soddisfatta.

Esercitazione 06:

Verifica di strutture sollecitate a fatica

Indice

1	Verifica della resistenza a fatica	1
1.1	Resistenza statica	1
1.2	Resistenza a fatica	2
1.3	Effetto della tensione media	2
1.4	Sensibilità all'intaglio	3
2	Struttura sollecitata da carico ripetuto	5

1 Verifica della resistenza a fatica

1.1 Resistenza statica

La resistenza statica di un materiale è determinata attraverso la semplice prova di trazione. La prova viene eseguita sollecitando un provino, in genere cilindrico, mediante un carico crescente nel tempo molto lentamente. Durante la prova vengono misurati carico applicato al provino e deformazione e riportati su un grafico, Fig.1. La perdita di linearità della curva $\sigma - \varepsilon$ rappresenta il limite di snervamento S_Y mentre S_U è la tensione di rottura del materiale.

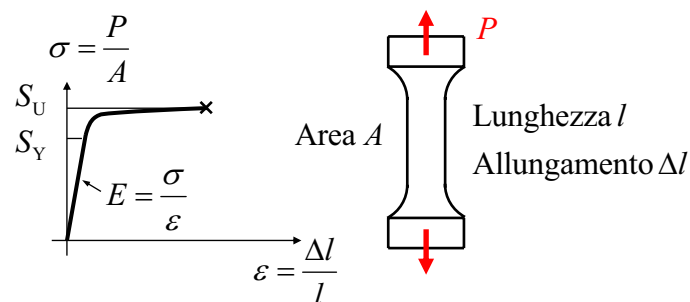


Figura 1: Curva di resistenza statica del materiale.

L'andamento mostrato in Fig.1 è tipico di materiali metallici che riescono a deformarsi molto, dopo aver superato lo snervamento, prima di arrivare a rottura.

1.2 Resistenza a fatica

Un componente sollecitato in modo ciclico può tuttavia rompersi, dopo un numero elevato di ripetizioni del carico, anche se l'entità della sollecitazione è inferiore a S_Y . Questa modalità di rottura viene detta 'a fatica'.

Solitamente si fissa un numero di cicli molto elevato (ad esempio 10^6 o 10^7) e si individua il *limite di fatica*, ossia il valore di variazione di tensione ΔS_e per il quale il materiale resiste alla sollecitazione di fatica, Fig.2.

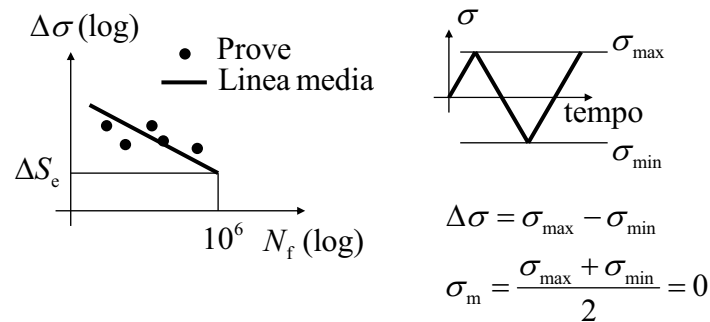


Figura 2: Curva di fatica e limite di fatica.

Una stima del limite di fatica, valido per gli acciai, è:

$$\Delta S_e \approx S_U \quad (1)$$

In realtà si corregge il valore fornito da tale relazione con fattori cautelativi (inferiori all'unità) per tenere conto di eventuali effetti che riducono la resistenza a fatica, ad esempio lo stato della superficie.

1.3 Effetto della tensione media

Nella Fig.2 è stato mostrato un carico ciclico di fatica a tensione media σ_m nulla. La presenza di tensione media positiva tende a ridurre la resistenza a fatica del componente. Un modello che riproduce questo effetto è l'equazione di Soderberg.

Si corregge la variazione di tensione $\Delta \sigma$ individuando una variazione di tensione maggiorata $\Delta \sigma^*$, che tenga conto della presenza della tensione media positiva:

$$\Delta \sigma^* = \frac{\Delta \sigma}{1 - \frac{\sigma_m}{S_Y}} \quad (2)$$

$\Delta \sigma^*$ potrà quindi essere confrontato con il limite di fatica ΔS_e a tensione media nulla. Se $\Delta \sigma^* < \Delta S_e$ allora il componente garantisce una resistenza di 10^6 cicli altrimenti è probabile che si rompa.

Infine, si definisce Coefficiente di Sicurezza C_S il rapporto fra il limite di fatica e la variazione di tensione corretta:

$$C_S = \frac{\Delta S_e}{\Delta \sigma^*} \quad (3)$$

Nel caso di verifica positiva della resistenza a fatica, C_S è maggiore dell'unità e quindi fornisce una misura del margine di sicurezza che il componente ha rispetto alla rottura a fatica.

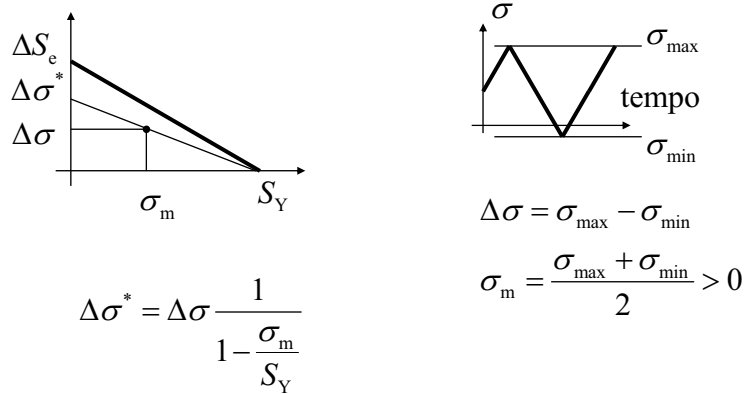


Figura 3: Modello di Soderberg per considerare l'effetto della tensione media sulla resistenza a fatica.

1.4 Sensibilità all'intaglio

Fin'ora sono state considerate prove di fatica eseguite su provini cilindrici, tuttavia i componenti meccanici sono spesso caratterizzati da forme complesse, che introducono una locale 'concentrazione di tensioni', ossia un aumento della sollecitazione confinato in una zona, ma che favorisce l'innescarsi della sollecitazione di fatica.

Considerando ad esempio un foro in una lastra sollecitata da un carico assiale F alternato, Fig.4, è possibile definire una tensione *nominale* σ_n , nell'ipotesi di distribuzione uniforme. Per effetto della presenza del foro lo stato di tensione subisce una locale concentrazione che viene quantificata dal parametro k_t definito come fattore di concentrazione delle tensioni:

$$k_t = \frac{\sigma_0}{\sigma_n} \tag{4}$$

in cui σ_0 è la tensione locale massima.

Il fattore di concentrazione k_t dipende unicamente della geometria. In particolare, per il caso di lastra con foro circolare piccolo rispetto alla larghezza, $b \gg D$, vale $k_t = 3.0$.

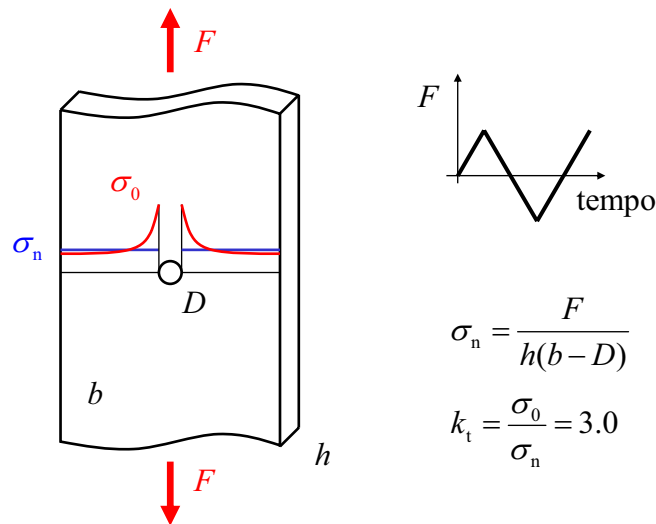


Figura 4: Lastra con foro centrale sollecitata da un carico remoto alternato.

In queste condizioni di geometria e carico, si esegue la verifica a fatica semplicemente moltiplicando la tensione nominale per k_t , e ripetendo la procedura esposta precedentemente valutando

in definitiva il coefficiente di sicurezza C_S .

La lastra di Fig.5, con fori vicini alle estremità, è sollecitata a flessione ripetuta nel tempo da zero ad un valore massimo.

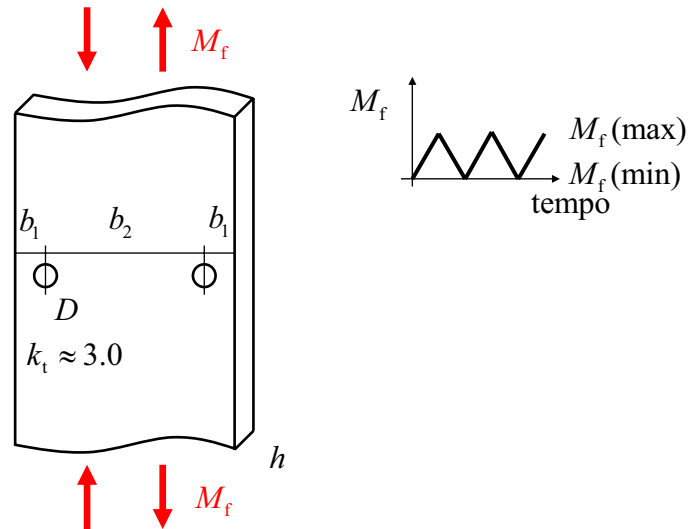


Figura 5: Lastra con fori vicino alle estremità, sollecitata da un momento flettente ripetuto.

I dati del problema sono:

Geometria :

$$D = 10 \text{ mm}$$

$$b_1 = 30 \text{ mm}$$

$$b_2 = 100 \text{ mm}$$

$$h = 5 \text{ mm}$$

Materiale :

$$S_U = 900 \text{ MPa}$$

$$S_Y = 650 \text{ MPa}$$

Carico :

$$M_f(\max) = 3000 \text{ Nm}$$

$$M_f(\min) = 0 \text{ Nm}$$

(5)

Determinare il coefficiente di sicurezza C_S a fatica.



Soluzione:

Nel punto più sollecitato il coefficiente di sicurezza è pari a: $C_S = 1.95$. Essendo maggiore dell'unità la struttura garantisce resistenza a fatica.

2 Struttura sollecitata da carico ripetuto

In Fig.6 si mostra una piccola gru che sostiene un carico P , il quale oscilla fra due posizioni. Nonostante il carico non cambi, per effetto della variazione di configurazione, le travi della gru risultano sollecitate a fatica.

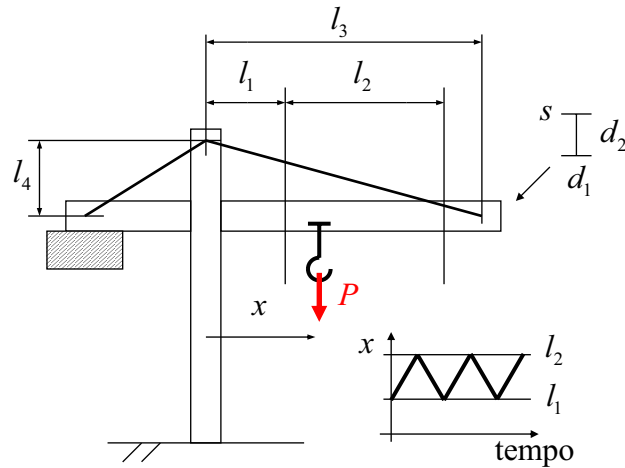


Figura 6: Gru sollecitata da un carico di posizione variabile.

I dati del problema sono:

Geometria :

$$l_1 = 1 \text{ m}$$

$$l_2 = 2 \text{ m}$$

$$l_3 = 4 \text{ m}$$

$$l_4 = 1 \text{ m}$$

$$d_1 = 300 \text{ mm}$$

$$d_2 = 400 \text{ mm}$$

$$s = 10 \text{ mm}$$

Materiale :

$$S_U = 520 \text{ MPa}$$

$$S_Y = 345 \text{ MPa}$$

Carico :

$$P = 250 \text{ kN}$$

(6)

Verificare se la trave orizzontale, che sostiene il carico P , è in sicurezza rispetto alla sollecitazione di fatica.



Soluzione:

Nel punto critico della trave il coefficiente di sicurezza (minimo) è: $C_S = 3.3$.

Esercitazione 07:

Progettazione di strutture meccaniche

Indice

1	Progettazione e dimensionamento di strutture meccaniche	1
1.1	Verifica e dimensionamento	1
1.2	Progettazione e dimensionamento	2
1.3	Utilizzo di valori tabulati di proprietà di sezione	3
2	Dimensionamento di un asse sollecitato a fatica	6

1 Progettazione e dimensionamento di strutture meccaniche

La progettazione di strutture meccaniche consiste nell'individuare una configurazione in grado di sostenere il carico a cui la struttura è sottoposta ed evitare il verificarsi di cedimenti di ogni tipo.

Le modalità di cedimento, analizzato in precedenza, sono:

- rottura statica, raggiungimento del limite di rottura o anche soltanto del limite di snervamento;
- instabilità elastica, la soluzione elastica non è stabile, la struttura si deforma notevolmente causando quindi una rottura;
- rottura per fatica, in una zona della struttura (tipicamente in corrispondenza di concentrazione di tensioni) la sollecitazione ciclica, ripetuta per un numero molto elevato di volte (dell'ordine di 10^6), genera una sezione di frattura sul componente.
- altre forme di cedimento.

1.1 Verifica e dimensionamento

Nelle esercitazioni precedenti le modalità di cedimento appena elencate erano già state presentate. In particolare era stata svolta la *verifica*. La configurazione geometrica, le dimensioni, e le condizioni di carico erano date e quindi era necessario individuare la sezione critica e verificare che il coefficiente di sicurezza fosse maggiore dell'unità.

Il *dimensionamento* consiste, invece, nel trovare le dimensioni della struttura, data la configurazione geometrica e i carichi. Un modo di dimensionamento è quello di fare delle verifiche partendo da dimensioni di ‘tentativo’ e iterativamente trovare la condizione di coefficiente di sicurezza maggiore dell’unità. La linea guida per il metodo di dimensionamento iterativo è che: maggiore è la dimensione della sezione e maggiore è anche la sua capacità di sostenere il carico. In alcuni casi è tuttavia possibile risolvere il problema del dimensionamento in modo diretto, piuttosto che iterativamente. In questi casi semplici, infatti, è possibile imporre la condizione di coefficiente di sicurezza pari all’unità e determinare per formula inversa la dimensione della sezione che soddisfi tale condizione. Ovviamente è poi necessario considerare una dimensione maggiore in modo da avere un certo margine di sicurezza.

In Fig.1 si mostra una travatura reticolare, che sostiene un carico all’estremità. Dimensionare la sezione delle aste (ipotizzando di realizzare tutte le aste con lo stesso diametro).

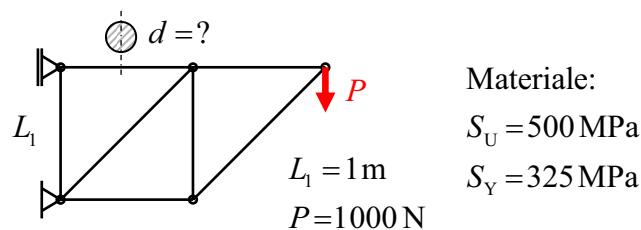


Figura 1: Dimensionamento di una travatura reticolare.

Suggerimento:

Notare che le modalità di rottura sono: il superamento del limite elastico delle travi, ma anche la perdita di stabilità delle travi in compressione.



Soluzione:

Diametro minimo, per il quale coefficiente di sicurezza è pari all’unità:

$$d^* = 13.0 \text{ mm}$$

Applicando una maggiorazione cautelativa:

$$d = 15.0 \text{ mm}$$

1.2 Progettazione e dimensionamento

Talvolta i termini ‘dimensionamento’ e ‘progettazione’ vengono considerati come sinonimi. Tuttavia, è bene puntualizzare che per dimensionamento si intende la determinazione delle dimensioni di una struttura meccanica al fine di sostenere una certo livello di carico (ad esempio l’esercizio precedente), mentre per progettazione si intende, in modo più ampio, pensare una configurazione della struttura migliore, ai fini della resistenza, e quindi successivamente farne il dimensionamento.

Individuare una configurazione di maggiore resistenza al fine di sostenere il carico della Fig.1.



Soluzione:

Dato che la modalità di cedimento più critica è l'instabilità (a carico di punta) si può suggerire di considerare la configurazione speculare, nella quale i versi delle forze si invertono (punti diventano tiranti e viceversa). In questo modo si ottiene come diametro minimo:

$$d^* = 11.9 \text{ mm}$$

Applicando una maggiorazione cautelativa:

$$d = 13.0 \text{ mm}$$

quindi il diametro richiesto è (leggermente) minore.

1.3 Utilizzo di valori tabulati di proprietà di sezione

Molto spesso vengono utilizzate sezioni standardizzate, per le quali sono disponibili i valori tabulati delle proprietà di sezione. In questo caso, il dimensionamento mediante formula inversa non è fattibile, mentre è immediato il procedimento di dimensionamento iterativo.

Si consideri la struttura di Fig.2, in cui una traversa, caricata da un peso che grava sopra, è sostenuta da 3 pilastri allineati.

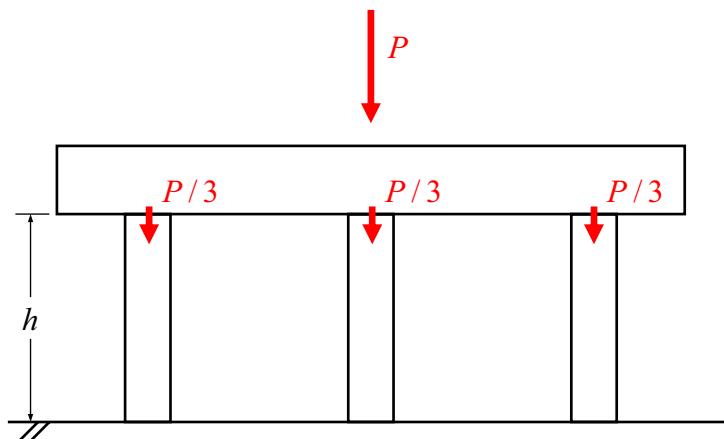


Figura 2: Traversa sostenuta da 3 pilastri.

In Fig.3 si mostrano i due possibili modi di cedimento, per instabilità elastica, che ammette la struttura.

In particolare il secondo modo, Fig.3(b), ammette un carico critico più basso di 4 volte, dato che nel senso laterale la struttura ha una lunghezza di libera inflessione (da punto di flesso a punto di flesso) doppia. Tuttavia, non è detto che la sezione sia isotropa (stesso momento d'inerzia I nelle due direzioni).

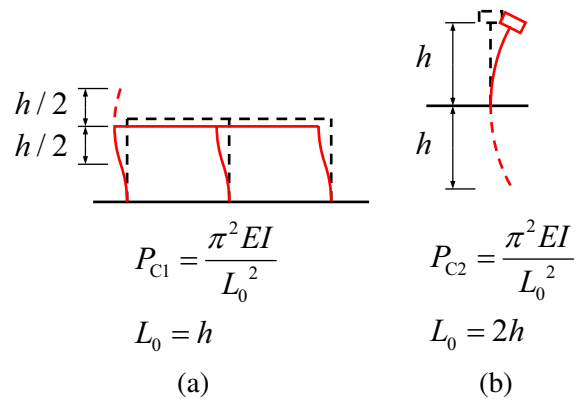


Figura 3: Modi di cedimento della struttura per instabilità elastica.

Il *progetto* della struttura, in questo caso, consiste nel decidere di utilizzare una sezione con anisotropia (momenti d'inerzia diversi, ad esempio $I_x > I_y$), in modo da compensare la disparità di carico critico in una direzione. Scegliendo di utilizzare una trave a 'doppio T', la configurazione più favorevole è quella mostrata in Fig.4.

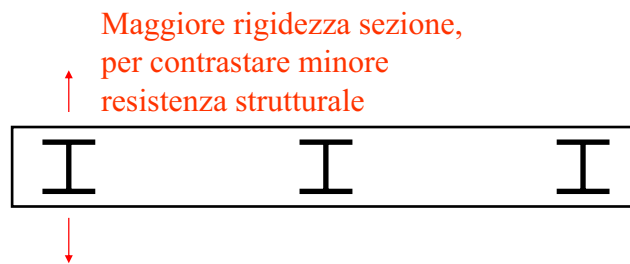
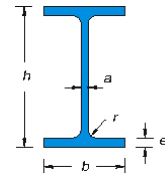


Figura 4: Disposizione migliore di sezione a doppio T.

A questo punto si può procedere con il *dimensionamento* della sezione. In Fig.5 vengono riportate le proprietà di sezione di profilati IPE, fra cui scegliere quale usare, sfruttando la configurazione favorevole di Fig.4.

h mm	b mm	a mm	e mm	r mm	Peso kg/m	Sezione cm ²	Momenti di inerzia		Moduli di resistenza		Raggi di inerzia	
							Jx cm ⁴	Jy cm ⁴	Wx cm ³	Wy cm ³	ix cm	iy cm
80	46	3,8	5,2	5	6,0	7,64	80,14	8,49	20,03	3,69	3,24	1,05
100	55	4,1	5,7	7	8,1	10,32	171,0	15,92	34,20	5,79	4,07	1,24
120	64	4,4	6,3	7	10,4	13,21	317,8	27,67	52,96	8,65	4,90	1,45
140	73	4,7	6,9	7	12,9	16,43	541,2	44,92	77,32	12,31	5,74	1,65
160	82	5,0	7,4	9	15,8	20,09	869,3	68,31	108,7	16,66	6,58	1,84
180	91	5,3	8,0	9	18,8	23,95	1.317	100,9	146,3	22,16	7,42	2,05
200	100	5,6	8,5	12	22,4	28,48	1.943	142,4	194,3	28,47	8,26	2,24
220	110	5,9	9,2	12	26,2	33,37	2.772	204,9	252,0	37,25	9,11	2,48
240	120	6,2	9,8	15	30,7	39,12	3.892	283,6	324,3	47,27	9,97	2,69
270	135	6,6	10,2	15	36,1	45,95	5.790	419,9	428,9	62,20	11,23	3,02
300	150	7,1	10,7	15	42,2	53,81	8.356	603,8	557,1	80,50	12,46	3,35
330	160	7,5	11,5	18	49,1	62,61	11.770	788,1	713,1	98,52	13,71	3,55
360	170	8,0	12,7	18	57,1	72,73	16.270	1.043	903,6	122,8	14,95	3,79
400	180	8,6	13,5	21	66,3	84,46	23.130	1.318	1.156	146,4	16,55	3,95
450	190	9,4	14,6	21	77,6	98,82	33.740	1.676	1.500	176,4	18,48	4,12
500	200	10,2	16,0	21	90,7	115,5	48.200	2.142	1.928	214,2	20,43	4,31
550	210	11,1	17,2	24	106	134,4	67.120	2.668	2.441	254,1	22,35	4,45
600	220	12,0	19,0	24	122	156,0	92.080	3.387	3.069	307,9	24,30	4,66



(a)

(b)

Figura 5: Profilati IPE.

Scegliere la sezione IPE più piccola, in grado di garantire resistenza ad entrambi i tipi di cedimento elastico.



Soluzione:

Essendo $J_x > 4J_y$ per tutte le sezioni, sfruttando la configurazione di Fig.4, il tipo di cedimento più pericoloso è quello di Fig.3(a).

La sezione più piccola in grado di sostenere il carico è la IPE 220 (altezza della sezione: 220 mm). Con tale sezione si ha:

$$P_{C1} = 41 \text{ kN} > \frac{P}{3} = 33 \text{ kN}$$

2 Dimensionamento di un asse sollecitato a fatica

In Fig.6 si mostra un asse, sostenuto da cuscinetti radiali, alla cui estremità è collocata una puleggia su cui si avvolge una cinghia precaricata.

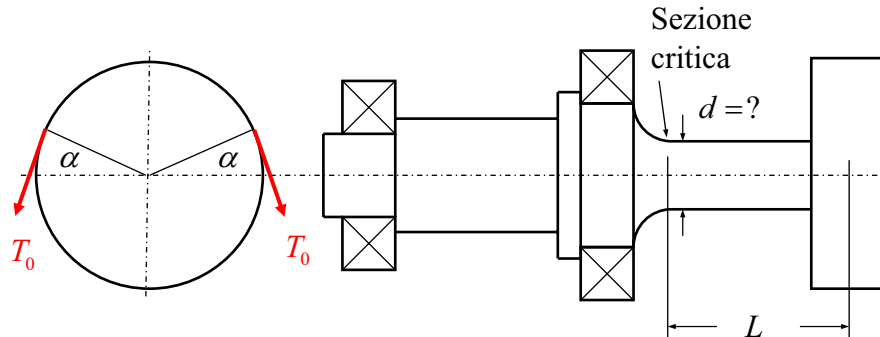


Figura 6: Puleggia folle. Sollecitazione sull'asse e sui supporti, generato dal precarico della cinghia.

Essendo i rami delle cinghie sollecitate dal precarico, tale sollecitazione si scarica sull'asse e quindi sui cuscinetti (o supporti). In corrispondenza della sezione critica (momento massimo, sezione minima) si ha flessione rotante, e concentrazione di tensione k_t , dovuta ad una variazione di sezione, anche se mitigata da un evidente raggio di raccordo.

Determinare il diametro d tale che l'asse sia in grado di sostenere la sollecitazione di flessione rotante.

Dati:

$$S_U = 900 \text{ MPa}$$

$$S_Y = 800 \text{ MPa}$$

$$k_t = 2.0$$

$$L = 370 \text{ mm}$$

$$T_0 = 1200 \text{ N}$$

$$\alpha = 30^\circ$$



Soluzione:

Il diametro che garantisce un coefficiente di sicurezza unitario è pari a: $d^* = 36.8 \text{ mm}$.

Tuttavia, nella fatica è particolarmente importante sovradimensionare. Un valore affidabile di diametro è pertanto: $d = 50 \text{ mm}$, a cui corrisponde un coefficiente di sicurezza pari a 2.5.

Esercitazione 08:

Introduzione alla cinematica e dinamica del punto materiale e del corpo rigido

Indice

1	Dinamica del punto materiale	1
2	Cinematica del corpo rigido	4

1 Dinamica del punto materiale

Il punto materiale è un'astrazione concettuale di un sistema le cui dimensioni sono piccole rispetto alle dimensioni della traiettoria del moto che realizza. Addirittura la terra può essere considerata un punto materiale studiandone il moto intorno al sole.

Il punto materiale è caratterizzato da dimensioni di ingombro nulle, per cui la sua posizione (rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento) è definita, semplicemente, da una terna di coordinate: x, y, z . Il punto materiale inoltre è caratterizzato da una massa m .

Le note definizioni della cinematica sono:

- Velocità v_x, v_y, v_z :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

in cui t è il tempo.

- Accelerazione a_x, a_y, a_z :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

La legge fondamentale della dinamica lega le componenti della *risultante* delle forze che agiscono sul punto materiale alle componenti dell'accelerazione rispetto ad un sistema di coordinate *inerziale*:

$$F_x = ma_x \quad F_y = ma_y \quad F_z = ma_z$$

Per le applicazioni di interesse del presente corso, un sistema di coordinate inerziale è il suolo terrestre, e quindi anche un qualsiasi altro sistema che trasla, in modo uniforme e senza ruotare, rispetto al suolo.

In Fig.1 si mostra un punto materiale di massa m che si muove lungo una traiettoria circolare, sul quale agisce l'azione F esercitata da un filo.

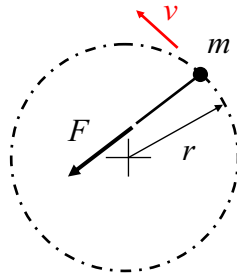


Figura 1: Punto materiale in moto lungo una traiettoria circolare.

Nel caso in cui il moto circolare sia uniforme, determinare:

1. l'angolo formato dal cavo con la tangente della traiettoria;
2. la massima velocità di rotazione senza causare il cedimento del cavo (resistenza materiale S_U , diametro filo Φ).

I dati del problema sono:

$$\begin{aligned} m &= 10 \text{ kg} \\ r &= 1 \text{ m} \\ S_U &= 300 \text{ MPa} \\ \Phi &= 2 \text{ mm} \end{aligned}$$



Soluzione:

La velocità periferica a cui il filo si rompe è pari a: $v_T = 9.71 \text{ m/s}$.

Si consideri nuovamente il punto materiale di Fig.1 che si muove lungo una traiettoria circolare, e a cui viene imposto un moto vario di accelerazione *tangenziale* a costante, mediante l'azione F del filo.

La velocità moto è variabile nel tempo:

$$v = v_0 + at \text{ [m/s]}$$

Le componenti di accelerazione, tangenziale e centrifuga, sono rispettivamente:

$$a_t = a$$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

All'istante iniziale $t_0 = 0$ s, il corpo si muove di velocità $v_0 = 0.5$ m/s, e si imprime un'accelerazione tangenziale costante $a = 0.1$ m/s².

Determinare:

- La tensione agente nel cavo al tempo $t_1 = 5$ s.
- L'angolo formato dal cavo con la tangente alla traiettoria al tempo t_1 .
- Il tempo t_r necessario per raggiungere la condizione di rottura del filo.



Soluzione:

Al tempo $t_1 = 5$ s la tensione sul cavo è: $\sigma_1 = 3.199$ MPa, l'angolo formato con la tangente è: $\theta_1 = 84.29^\circ$. Infine, mantenendo l'accelerazione imposta, il tempo necessario per raggiungere la rottura del filo è: $t_r = 92.1$ s.

2 Cinematica del corpo rigido

Un corpo rigido è l'insieme di più punti materiali i quali non possono modificare la loro posizione relativa. Tutti i materiali di fatto sono invece deformabili, tuttavia il modello di corpo rigido è spesso molto efficace per descrivere fenomeni dinamici dove la deformazione dei corpi è trascurabile.

Il campo di velocità istantaneo di un corpo rigido può essere espresso nella forma:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP} \quad (1)$$

Dove: \vec{v}_O è la velocità di un qualsiasi punto O del corpo rigido, \vec{v}_P è la velocità di un qualsiasi altro punto P del corpo rigido, rispetto ad un sistema di riferimento, \vec{r}_{OP} è il vettore dal punto O al punto P, infine $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare, rispetto allo stesso sistema di riferimento, ossia come varia nel tempo l'*orientamento* del corpo rigido.

In Fig.2 si mostra una ruota che *rotola* su un piano. Dato che il moto è di rotolamento il punto della ruota a contatto con il suolo è fermo. Quindi, assumendo il sistema di riferimento x, y solidale al suolo la sua velocità è nulla: $v_O = 0$. Inoltre la velocità del punto centrale della ruota è v_C con orientamento orizzontale.

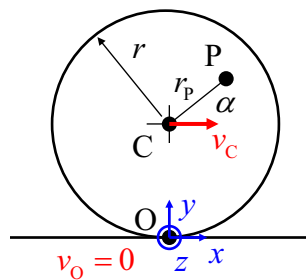


Figura 2: Moto di rotolamento di una ruota rispetto ad un piano.

Determinare la velocità angolare $\vec{\omega}$, conoscendo v_C e r , e tenendo conto che il moto della ruota è piano. Inoltre determinare la velocità v_P del punto P.



Soluzione:

La velocità angolare è:

$$\vec{\omega} = \left(0, 0, -\frac{v_C}{r}\right)$$

La velocità del punto P è:

$$\vec{v}_P = \left(v_C + v_C \frac{r_P}{r} \sin \alpha, -v_C \frac{r_P}{r} \cos \alpha, 0\right)$$

Derivando, nel tempo, l'Eq.1 si può scrivere il campo di accelerazione istantaneo di un corpo rigido:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\gamma} \times \vec{r}_{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OP}) \quad (2)$$

in cui $\vec{\gamma}$ è il vettore derivata della velocità angolare, ossia l'accelerazione angolare:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Nel caso in cui il punto O sia fermo e abbia accelerazione nulla, il termine $\vec{\gamma} \times \vec{r}_{OP}$ rappresenta l'accelerazione tangenziale e il termine $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OP})$ rappresenta l'accelerazione centripeta.

Con riferimento alla Fig.2, assumendo che l'accelerazione del punto C sia nulla, determinare l'accelerazione del punto P.



Soluzione:

L'accelerazione del punto P è:

$$\vec{a}_P = -\left(\frac{v_C}{r}\right)^2 \vec{r}_{CP}$$

Nel caso in cui il punto C sia dotato di velocità v_C e di accelerazione tangenziale a_C , determinare l'accelerazione del punto P.



Soluzione:

$$\vec{a}_P = \begin{pmatrix} a_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_C(r_P/r) \sin \alpha \\ -a_C(r_P/r) \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{v_C}{r}\right)^2 \begin{pmatrix} r_P \cos \alpha \\ r_P \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se al punto P è fissata una massa m , determinare l'azione che la ruota esercita su tale punto materiale.

Dati:

$$\begin{aligned} m &= 10 \text{ g} \\ v_C &= 70 \text{ km/h} \\ a_C &= 0.15 \text{ m/s}^2 \\ r &= 200 \text{ mm} \\ r_P &= 150 \text{ mm} \\ \alpha &= 30^\circ \end{aligned}$$



Soluzione:

$$F_P = 14.177 \text{ N}$$

Esercitazione 09: Forze d'inerzia e oscillatore armonico

Indice

1	Moto relativo	1
2	Utilizzo delle forze d'inerzia	2
2.1	Dinamica del meccanismo biella–manovella	4
3	Modello di un oscillatore ad un grado di libertà	5
3.1	Oscillatore smorzato	6

1 Moto relativo

Dati due sistemi di riferimento, un primo sistema $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ed un secondo sistema $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$, la velocità di un generico punto materiale può essere espressa sia rispetto al primo sistema: \vec{v}_a , sia rispetto all'altro sistema: \vec{v}_r . In generale, le velocità dello *stesso* punto materiale, osservate dai due sistemi sono *diverse*, e legate dalla relazione:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_t + \vec{v}_r$$

in cui \vec{v}_t è la velocità osservata dal primo sistema di riferimento del punto appartenente al secondo sistema in cui istantaneamente cade il punto materiale. Le velocità $\vec{v}_a, \vec{v}_t, \vec{v}_r$ vengono indicate come velocità *assoluta*, di *trascinamento* e *relativa*, rispettivamente.

Una relazione analoga vale per le accelerazioni. Siano \vec{a}_a e \vec{a}_r le accelerazioni assoluta e relativa del punto materiale osservate rispetto a due sistemi di riferimento diversi, vale la relazione:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_c + \vec{a}_r \tag{1}$$

in cui: l'accelerazione di *trascinamento* \vec{a}_t è l'accelerazione osservata dal primo sistema di riferimento del punto appartenente al secondo sistema in cui istantaneamente cade il punto materiale, mentre il termine \vec{a}_c è l'accelerazione di Coriolis (che non ha un corrispettivo nella relazione precedente relativa alle velocità) e che è pari a:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

in cui $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del secondo sistema di riferimento osservata dal primo. In alcune situazioni il termine \vec{a}_c è nullo, ad esempio se $\vec{v}_r = 0$, ossia se il punto materiale è fermo rispetto al secondo sistema di riferimento, oppure se $\vec{\omega} = 0$, ossia se il secondo sistema rispetto al primo non ruota, pur eventualmente spostandosi.

2 Utilizzo delle forze d'inerzia

La legge fondamentale della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

è valida qualora \vec{a} venga osservata rispetto ad un sistema inerziale.

Supponendo di avere l'accelerazione a_r rispetto ad un sistema *non* inerziale, preso un secondo sistema inerziale, le accelerazioni sono legate dall'Eq.1 (tale equazione è di natura cinematica per cui vale per qualsiasi coppia di sistemi di riferimento, anche entrambi non inerziali):

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c \quad (2)$$

I due termini $-m\vec{a}_t, -m\vec{a}_c$ sono definiti come forze d'inerzia di *trascinamento* e di *Coriolis*. Le forze d'inerzia vengono talvolta dette *apparenti*, in quanto sono appunto solo componenti dell'accelerazione e non effettive forze esercitate sul punto materiale. L'aspetto fondamentale che distingue le forze d'inerzia *apparenti* da quelle *vere* è che per le forze d'inerzia non vale il principio di azione e reazione, dato che non si tratta di una interazione con un altro corpo.

Per quanto l'utilizzo delle forze d'inerzia possa sembrare un'inutile complicazione, molti problemi di dinamica possono essere risolti in modo più agevole osservando il moto rispetto ad un sistema non inerziale.

In Fig.1 si mostra l'esempio più classico di utilizzo del concetto di forze d'inerzia. Un punto materiale che si muove lungo una traiettoria circolare, di moto rettilineo uniforme e il cui moto viene osservato da un sistema di riferimento non inerziale, che ruota intorno al centro della traiettoria con la stessa velocità angolare del punto materiale.

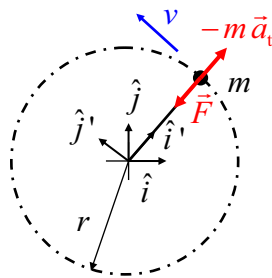


Figura 1: Punto materiale in moto lungo una traiettoria circolare. Utilizzo di un secondo sistema di riferimento non inerziale.

Sapendo che \hat{i}, \hat{j} costituisce un sistema inerziale, considerando invece il sistema non inerziale \hat{i}', \hat{j}' , individuare i termini dell'Eq.2.



Osservazione:

Il termine *forza centrifuga* rappresenta appunto la forza d'inerzia $-m\vec{a}_t$ e quindi non è una forza vera ma una forza apparente.

In Fig.2 si mostra un cilindro con elementi longitudinali sulla superficie laterale, posto in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$.

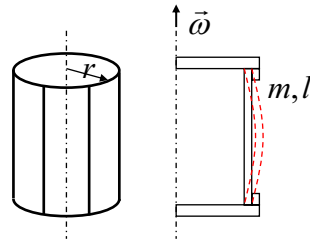


Figura 2: Cilindro con elementi longitudinali in rotazione.

Ogni singolo elemento laterale, di massa m e di lunghezza l , è obbligato ad eseguire una traiettoria circolare di raggio r per cui è sottoposto ad un'accelerazione.

Determinare le caratteristiche della sollecitazione del generico elemento laterale (considerandolo come trave), e sfruttando il concetto di forza centrifuga.

Determinare, inoltre, la massima tensione di flessione nel caso in cui l'elemento laterale abbia sezione $b \times h$.

I dati del problema sono:

$$\begin{aligned}l &= 350 \text{ mm} \\b &= 15 \text{ mm} \\h &= 25 \text{ mm} \\r &= 200 \text{ mm} \\\rho &= 7.86 \text{ kg/dm}^3 \\n &= 3000 \text{ giri/min}\end{aligned}$$

in cui: ρ è la densità (in questo esempio si considera la densità dell'acciaio) e n è il numero di giri al minuto.



Soluzione:

La massima tensione di flessione è: $\sigma(\max) = 570 \text{ MPa}$.

2.1 Dinamica del meccanismo biella–manovella

In Fig.3 si mostra il meccanismo biella–manovella, in grado di trasformare un moto alternato longitudinale in rotatorio, o viceversa.

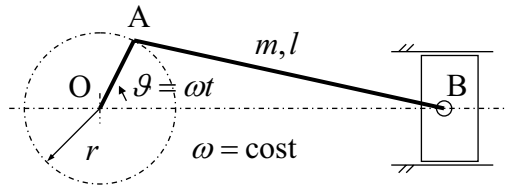


Figura 3: Meccanismo biella–manovella.

Determinare le caratteristiche della sollecitazione dell'elemento biella (modello a trave), nelle configurazioni notevoli del meccanismo, considerando soltanto gli effetti dinamici, quindi in assenza di carichi esterni.

Suggerimento:

Semplificare la cinematica del meccanismo al primo ordine, in particolare considerando la lunghezza dell'elemento biella molto più grande del raggio della manovella (anche se invece spesso queste due lunghezze sono confrontabili, ad esempio nei motori automobilistici). Determinare le accelerazioni alle estremità della biella ed estrapolare linearmente le accelerazioni nei punti intermedi.



3 Modello di un oscillatore ad un grado di libertà

Sistemi dinamici molto importanti sono gli ‘oscillatori’ ossia quei sistemi che vibrano nell’intorno della loro configurazione di riferimento.

L’oscillatore ad un grado di libertà è costituito da un elemento ad elasticità concentrata (molla) ed un elemento ad inerzia concentrata (massa), Fig.4.

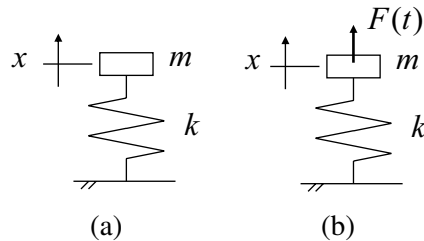


Figura 4: Oscillatore ad un grado di libertà: (a) moto libero, (a) moto forzato.

L’equazione differenziale del moto è:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (3)$$

in cui: k è la rigidezza della molla, m è la massa, x è il discostamento dalla posizione di riposo e $F(t)$ è la forza applicata alla molla variabile nel tempo.

Nel caso in cui l’oscillatore sia abbandonato a se stesso ($F(t) = 0$), la massa oscilla con una frequenza naturale pari a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

quindi:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t + \varphi_0) \quad (4)$$

in cui A , φ_0 dipendono dalle condizioni iniziali. Ovviamente il sistema oscilla solo se viene abbandonato o in una posizione diversa da quella di riposo, oppure ad una velocità non nulla. Quindi $A = 0$ soltanto se inizialmente il corpo ha velocità nulla e si trova nella configurazione di riferimento.

Nel caso in cui l’oscillatore sia sollecitato da una forza esterna $F(t)$ il moto è ovviamente dipendente da tale forza, oltre che comunque dalle condizioni iniziali. Tuttavia, le condizioni iniziali hanno un ruolo sulla dinamica dell’oscillatore limitato nel tempo. Nel caso in cui la forza esterna sia di tipo armonico:

$$F(t) = F \cos(\omega t + \varphi)$$

con: $\omega \neq \omega_n$ la risposta dell’oscillatore è (dopo che il transitorio delle condizioni iniziali si è estinto):

$$x(t) = \frac{F/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Come ben noto, la forma della soluzione appena trovata mette in evidenza la possibilità di verificarsi la condizione di *risonanza* per $\omega = \omega_n$. In tale condizione l’oscillazione si amplifica indefinitamente.

3.1 Oscillatore smorzato

Nel caso il moto venga impedito da un effetto di dissipazione, interviene un ulteriore parametro concentrato che è la viscosità c , Fig.5.

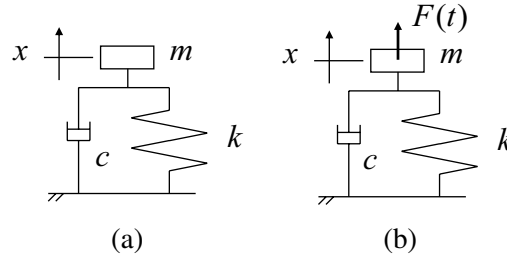


Figura 5: Oscillatore ad un grado di libertà smorzato: (a) moto libero, (a) moto forzato.

Nell'ipotesi di viscosità proporzionale alla velocità il moto dello smorzatore è descritto dall'equazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (6)$$

Nel caso in cui l'oscillatore sia abbandonato a se stesso ($F(t) = 0$), analogamente a prima, la massa oscilla, ma con un progressivo rallentamento. L'equazione del moto è:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega' t + \varphi_0) \quad (7)$$

in cui: ω_n è definita come sopra e:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad \omega' = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

In realtà questa soluzione è valida soltanto se lo smorzamento è 'piccolo', ossia se $\xi < 1$, che equivale alla condizione $c < c_c$, in cui c_c è la viscosità 'critica' pari a: $c_c = 2m\omega_n$.

Nel caso in cui l'eccitazione esterna sia di tipo armonico:

$$F(t) = F \cos(\omega t + \varphi)$$

la soluzione (dopo transitorio iniziale) è:

$$x(t) = \frac{F/k}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2}} \cos(\omega t + \varphi + \varphi_c) \quad (8)$$

in cui:

$$\tan \varphi_c = -2 \frac{\xi(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Da notare che, nel caso di viscosità non nulla, la condizione di risonanza ($\omega = \omega_n$) non causa una soluzione singolare, ma semplicemente un'ampiezza di oscillazione molto grande.

È bene inoltre ricordare che un certo valore minimo di viscosità è intrinseco in ogni sistema e quindi la risonanza non è mai una singolarità, ma comunque un problema pratico importante. Infine, la presenza di una certa viscosità (anche se piccola) giustifica la possibilità di trascurare il transitorio relativo alle condizioni iniziali, che appunto si estingue per effetto dissipativo.

Determinare la frequenza propria del sistema dinamico costituito da una trave incastrata ad un'estremità, Fig.6.

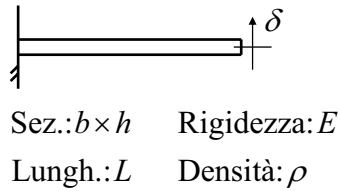


Figura 6: Oscillazione trave incastrata.

I dati del problema sono:

$$\begin{aligned} b &= 12 \text{ mm} \\ h &= 18 \text{ mm} \\ L &= 1.2 \text{ m} \\ \rho &= 7.86 \text{ kg/dm}^3 \\ E &= 205\,000 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Suggerimento:

Ricondurre il sistema ad un oscillatore ad un grado di libertà, determinando la rigidezza all'estremità della trave e considerando una frazione di tutta la massa concentrata all'estremità (ad esempio pari a metà massa totale).



Soluzione:

La frequenza propria *stimata* è: $f_n = \omega_n / (2\pi) = 7.2 \text{ Hz}$.

Con riferimento all'esercizio precedente, partendo dall'informazione che il sistema lasciato libero di vibrare, riduce la propria ampiezza di oscillazione di un fattore 2, dopo un certo tempo: $t_2 = 3 \text{ s}$, determinare il coefficiente di viscosità c , rifacendosi al sistema oscillatore smorzato.



Soluzione:

La viscosità è: $c = 0.471 \text{ kg/s}$.

Lo smorzamento relativo $\xi = c/c_c$ è pertanto: $\xi = 5.119 \times 10^{-3}$.