

Esercitazione 09:

Caratteristiche della sollecitazione III

Indice

1	Proprietà delle caratteristiche della sollecitazione	1
1.1	Relazione fra le caratteristiche di taglio e momento flettente	1
1.2	Caratteristiche della sollecitazione in corrispondenza delle estremità della trave	2
2	Esempio di utilizzo delle proprietà delle caratteristiche della sollecitazione	2
3	Strutture simmetriche e antisimmetriche	5

1 Proprietà delle caratteristiche della sollecitazione

Esistono alcune semplici regole che possono essere molto utili per il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione, soprattutto in schemi di geometria e carichi più complessi.

1.1 Relazione fra le caratteristiche di taglio e momento flettente

Una regola molto utile per velocizzare la stesura dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione è la seguente:

$$T_y(\xi) = \frac{dM_x}{d\xi}(\xi) \quad (1)$$

$$T_x(\xi) = -\frac{dM_y}{d\xi}(\xi) \quad (2)$$

valida in tratti di trave rettilinei.

Di queste due equazioni, in un problema piano, la seconda non ha interesse, dal momento che $T_x(\xi) = 0$ e $M_y(\xi) = 0$, per ogni valore di ξ .

Alcune delle implicazioni di questa regola sono (con riferimento alla Fig.1):

- in corrispondenza di un carico concentrato, il taglio subisce un salto (pari al carico concentrato stesso), in tal punto il diagramma del momento presenta un cambio di pendenza, Fig.1(a);

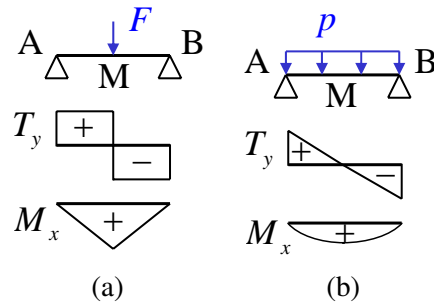


Figura 1: (a) Carico concentrato e tratti non caricati. (b) Carico distribuito uniformemente.

- in un tratto su cui non agiscono carichi, il taglio ha andamento costante, sullo stesso tratto il momento presenta un andamento lineare (la cui pendenza è appunto il valore del taglio), Fig.1(a);
- in un tratto su cui agisce un carico distribuito uniforme, il taglio ha andamento lineare, mentre il momento presenta un andamento parabolico, la cui concavità è data dal valore della derivata del taglio, Fig.1(b);
- il momento raggiunge il suo valore massimo in corrispondenza di un punto in cui il taglio si annulla, Fig.1(a),(b).

1.2 Caratteristiche della sollecitazione in corrispondenza delle estremità della trave

In corrispondenza delle estremità della trave è spesso possibile ricavare informazioni molto utili per il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

Infatti all'estremità finale della trave ($\xi = l$) i carichi applicati coincidono con le caratteristiche in quel punto, mentre in corrispondenza dell'estremità iniziale ($\xi = 0$) i carichi applicati coincidono con le caratteristiche cambiate di segno.

Da tener presente che se in una delle due estremità è applicato soltanto un carico distribuito, le caratteristiche della sollecitazione sono comunque nulle in tal punto, in quanto è necessaria una certa lunghezza di integrazione affinché un carico distribuito modifichi le caratteristiche della sollecitazione.

2 Esempio di utilizzo delle proprietà delle caratteristiche della sollecitazione

Tenendo conto delle proprietà appena elencate è possibile risolvere in modo agevole casi più complessi rispetto ai semplici esempi precedentemente riportati.

In Fig.2 si riporta lo schema di una trave appoggiata caricata a sbalzo da un carico distribuito. Applicando le regole precedenti è possibile in modo più spedito tracciare i grafici delle caratteristiche della sollecitazione.

Si consideri inizialmente l'estremo $\xi = a + d$:

- in corrispondenza dell'estremo $\xi = a + d$ non agisce nessuna forza secondo z , per cui $N_z(\xi = a + d) = 0$;

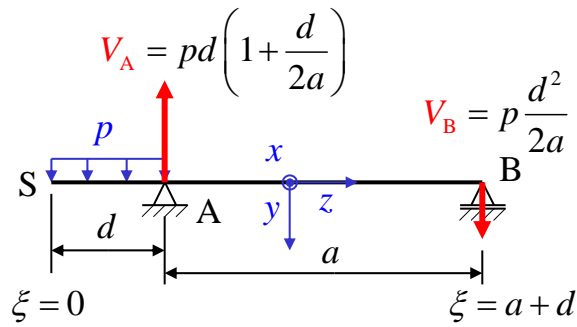


Figura 2: Trave appoggiata caricata a sbalzo da un carico distribuito.

- in corrispondenza dell'estremo $\xi = a + d$ agisce un carico in direzione y , per cui $T_y = V_B = p \frac{d^2}{2a}$;
- in corrispondenza dell'estremo $\xi = a + d$ non agisce nessun momento concentrato, per cui $M_x = 0$.

Successivamente è possibile notare che tutto il tratto A-B è scarico, per cui sforzo normale e taglio rimangono costanti.

Per quanto riguarda il momento flettente si conosce che il suo andamento varia linearmente (tratto A-B scarico) per cui è sufficiente calcolare il momento in corrispondenza del punto A: $M_x(\xi = a) = -pd^2/2$.

A questo punto il tratto A-B è completamente risolto. In Fig.3 si riportano gli andamenti del taglio T_y e del momento flettente M_x per tale tratto.

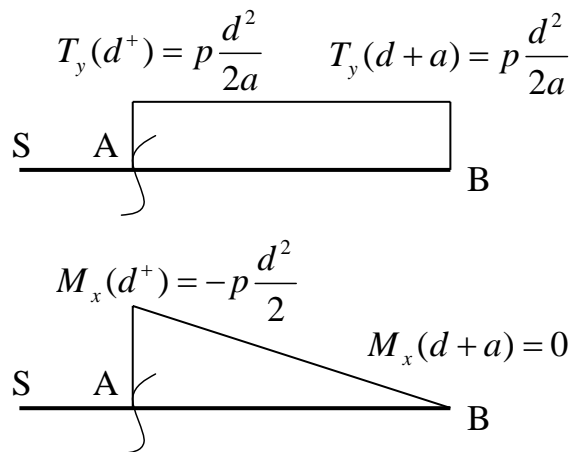


Figura 3: Andamenti del taglio T_y e del momento flettente M_x per il tratto A-B.

Per quanto riguarda il tratto S-A è possibile fare le seguenti osservazioni:

- in corrispondenza dell'estremo S tutte le caratteristiche della sollecitazione sono nulle, in quanto in tal punto non agiscono carichi concentrati ed inoltre è un punto di estremità della struttura;
- l'andamento del taglio è lineare, per cui rimane da calcolare il valore del taglio in A (avvicinandosi da sinistra, dato che T_y subisce un salto in A per la presenza di un carico concentrato);

- per calcolare il valore di $T_y(d^-)$ (ossia avvicinandosi da sinistra) è possibile valutare il contributo delle azioni di taglio della porzione a monte (ricordandosi di cambiare di segno, per coerenza con la convenzione), si ottiene quindi $T_y(d^-) = -pd$;
- per quanto riguarda l'andamento del momento flettente è noto che si tratta di un andamento parabolico (carico uniformemente distribuito) inoltre, come precedentemente notato $M_x(0) = 0$;
- dato che $T_y(0) = 0$, la pendenza dell'andamento di M_x in $\xi = 0$, per cui il diagramma di M_x è a tangenza orizzontale in S.
- per definire completamente l'andamento parabolico, è necessario determinare una terza informazione, ad esempio il valore di M_x in corrispondenza di A. Dato che in A non ci sono momenti concentrati l'andamento di M_x è continuo, nonostante il cambio di pendenza, per cui è sufficiente ricordare che $M_x(d) = p\frac{d^2}{2a}$.

A questo punto è possibile completare i diagrammi di T_y e M_x , vedi Fig.4 (lo sforzo normale è nullo su tutta la struttura).

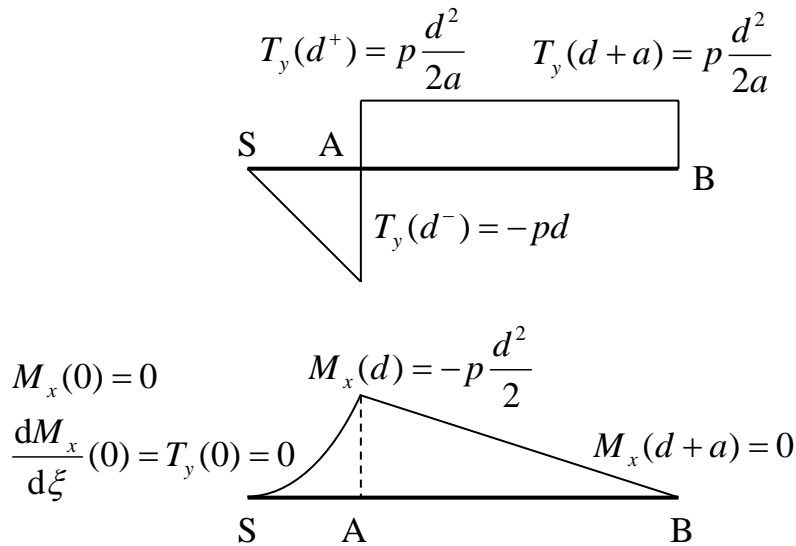


Figura 4: Andamenti del taglio T_y e del momento flettente M_x su tutta la trave.

Determinare le caratteristiche della sollecitazione, sfruttando le proprietà appena mostrate, per le strutture di Fig.5(a)(b).

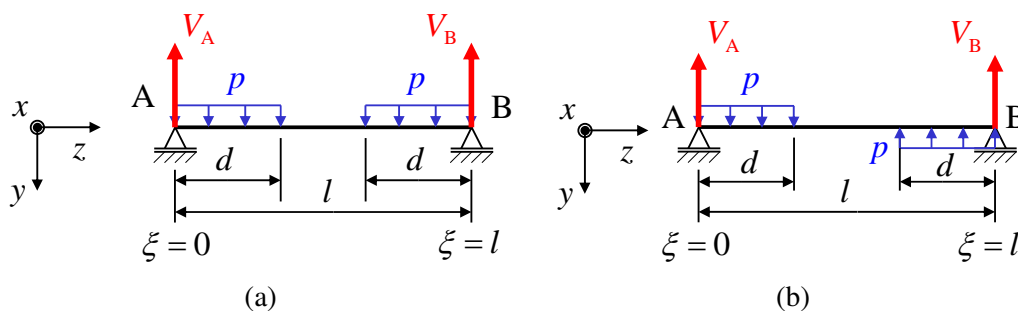


Figura 5: (a) Carico distribuito su due tratti. (b) Carico distribuito su due tratti, con inversione del segno.



3 Strutture simmetriche e antisimmetriche

In alcuni casi le strutture presentano un piano di simmetria geometrica, vale a dire un piano rispetto al quale si può ottenere la restante parte della struttura per riflessione, ad esempio Fig.6(a) e (b).

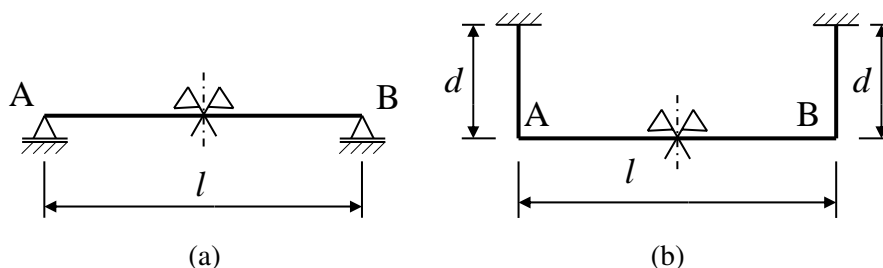


Figura 6: Esempi di strutture (nel piano) geometricamente simmetriche (forma della struttura e vincoli) rispetto ad un piano.

Strutture di questo tipo possono essere caricate nel modo più generico, tuttavia è possibile distinguere due tipi di carico notevoli:

- carico simmetrico, ossia la distribuzione delle forze di una porzione può essere ottenuta dall'altra per riflessione;
- carico anti-simmetrico, ossia la distribuzione delle forze di una porzione può essere ottenuta dall'altra per riflessione e cambio di segno;

In Fig.7 si riportano due esempi di strutture simmetriche caricate in modo: (a) simmetrico, (b) antisimmetrico.

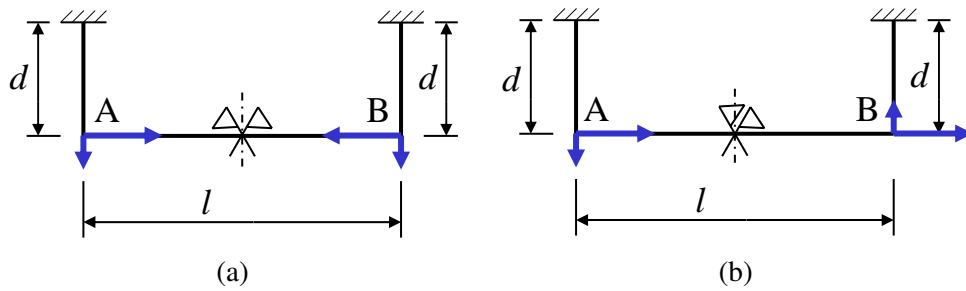


Figura 7: Esempi di strutture (nel piano) geometricamente simmetriche, (a) carico simmetrico, (b) carico antisimmetrico.

Esiste la possibilità di scomporre una qualsiasi condizione di carico (in modo univoco) in componente simmetrica e componente antisimmetrica, per cui applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile ottenere la soluzione come composizione delle due soluzioni date dalle due porzioni di carico, Fig.8.

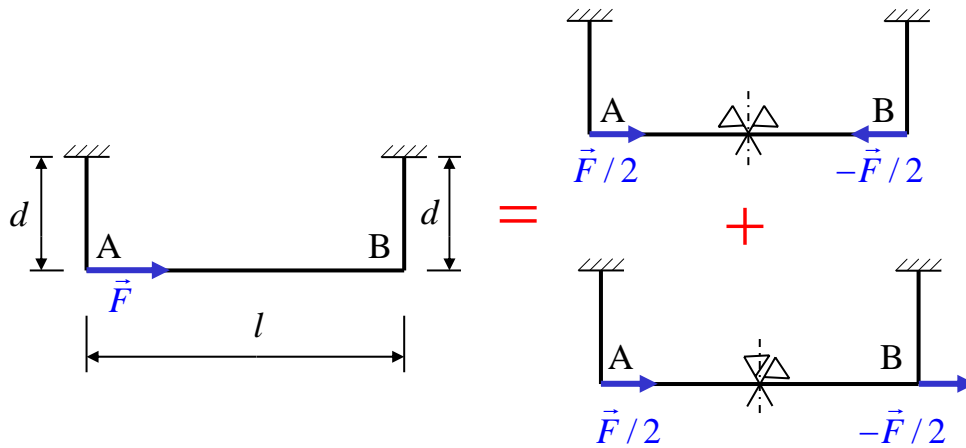


Figura 8: Scomposizione di un generico carico in componente simmetrica ed asimmetrica, possibilità di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Notare che il carico è generico, ma geometria e vincoli sono simmetrici

I diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione, in schemi simmetrici ed antisimmetrici, godono di proprietà di *simmetria* che permettono quindi di analizzare soltanto metà struttura e successivamente dedurre l'altra.

Gli schemi di carico *simmetrici* godono delle seguenti proprietà:

- il diagramma dello sforzo normale è simmetrico (quindi è possibile ottenere l'altra porzione per riflessione della prima);
- il diagramma del taglio è antisimmetrico (quindi è possibile ottenere l'altra porzione per riflessione della prima, con cambio di segno), come diretta conseguenza di ciò segue che il taglio si annulla in corrispondenza del piano di simmetria;
- il diagramma del momento flettente è simmetrico (quindi è possibile ottenere l'altra porzione per riflessione della prima);

In modo duale è immediato dedurre le proprietà per il caso di strutture *antisimmetriche*:

- il diagramma dello sforzo normale è antisimmetrico (quindi si annulla in corrispondenza del piano di simmetria);

- il diagramma del taglio è simmetrico;
- il diagramma del momento flettente è antisimmetrico (quindi si annulla in corrispondenza del piano di simmetria);

Notare che gli schemi di Fig.5 sono rispettivamente simmetrico (a) ed antisimmetrico (b).

Verificare la validità delle proprietà appena citate dei diagrammi della sollecitazione per gli schemi di carico di Fig.5.



Dedurre le caratteristiche della sollecitazioni per il caso di Fig.9 utilizzando i risultati relativi agli schemi di carico di Fig.5 e il principio di sovrapposizione degli effetti.

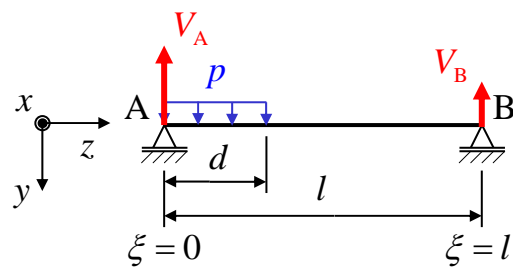


Figura 9: Struttura geometricamente (e relative condizioni di vincolo) simmetrica, a cui viene applicato un carico generico.

Suggerimento: scomporre il carico distribuito in parte simmetrica e antisimmetrica.

