

# Esercitazione 01:

## Introduzione all'algebra dei vettori

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Grandezze scalari e vettoriali</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Operazioni su vettori</b>	<b>2</b>
2.1	Modulo di un vettore . . . . .	2
2.2	Vettori notevoli . . . . .	2
2.3	Prodotto di uno scalare per un vettore . . . . .	2
2.4	Somma di due vettori . . . . .	2
2.5	Prodotto scalare . . . . .	3
2.6	Rappresentazione di un vettore in componenti . . . . .	3
2.7	Prodotto vettoriale . . . . .	4
2.8	Prodotto triplo . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Cambio di sistema di riferimento</b>	<b>7</b>

## 1 Grandezze scalari e vettoriali

- Una quantità fisica che è definita da un numero (o intensità) e da un'unità di misura è detta *scalare*.  
Es.: *Temperatura, Densità, Massa*, ecc.
- Una quantità fisica definita da una direzione, con verso, da un numero (o intensità) e da un'unità di misura è detta *vettoriale*.  
Es.: *Spostamento, Velocità, Forza*.  
Si indica con con il simbolismo:

$$\vec{v} \tag{1}$$

Inoltre è possibile definire:

- vettore *libero*: *direzione* (con verso), *intensità*, *unità di misura*;
- vettore *applicato*: *direzione* (con verso), *intensità*, *unità di misura* e *punto di applicazione*.

## 2 Operazioni su vettori

### 2.1 Modulo di un vettore

Si definisce modulo di un vettore il modulo della sua intensità e si indica con il simbolismo:

$$|\vec{v}| \quad (2)$$

Spesso si indica invece con il simbolo  $v$  l'intensità del vettore  $\vec{v}$ , l'unica differenza è che l'intensità può anche essere negativa, il che implica l'inversione di verso del vettore. Nel seguito risulterà infatti più comodo (ad esempio quando il vettore è incognito) l'utilizzo del concetto di intensità, in modo da imporre una direzione con verso, invertito eventualmente dal valore negativo dell'intensità.

### 2.2 Vettori notevoli

Si definiscono dei particolari vettori:

- vettore nullo: ha intensità nulla e quindi non sono definibili direzione ed unità di misura;
- versore, o vettore unitario: ha come intensità 1, inteso come numero puro (ossia privo di unità di misura), definisce solo una direzione (con verso).

Si indica con il simbolismo:

$$\hat{v} \quad (3)$$

Semplicemente, il modulo di un vettore nullo è 0, mentre quello di un versore è 1.

### 2.3 Prodotto di uno scalare per un vettore

Dato un scalare  $\alpha$  ed un vettore  $\vec{u}$  si definisce:

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} \quad (4)$$

il vettore di verso e direzione secondo  $\vec{u}$ , intensità  $\alpha u$  ed unità di misura il prodotto delle due:  $[\vec{v}] = [\alpha] [u]$ .

Segue che il versore  $\hat{v}$  di un vettore  $\vec{v}$  è dato da:

$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \quad (5)$$

notare che la quantità  $1/|\vec{v}|$  è uno scalare.

### 2.4 Somma di due vettori

Due vettori omogenei (stessa unità di misura) possono essere sommati, secondo la regola del parallelogramma, Fig.1.

La somma di due vettori gode delle seguenti proprietà:

- proprietà *commutativa*:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad (6)$$

- proprietà *associativa*:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad (7)$$

per cui è possibile scrivere, senza pericolo di errore:  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

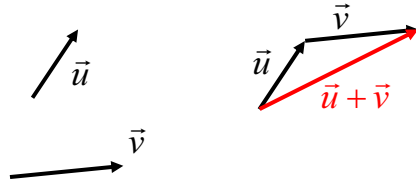


Figura 1: Somma di due vettori.

## 2.5 Prodotto scalare

Dati due vettori (non necessariamente omogenei) è possibile definire il seguente prodotto:

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = |\hat{u}||\hat{v}| \cos(\alpha) \quad (8)$$

in cui  $\alpha$  è il minimo angolo fra i due vettori, Fig.2.

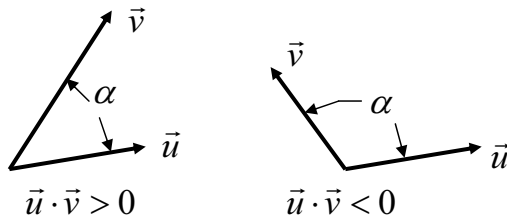


Figura 2: Segno del prodotto scalare fra due vettori.

Ovviamente tale prodotto è nullo se uno dei due vettori è nullo o se il loro angolo  $\alpha = \pi/2$ .

## 2.6 Rappresentazione di un vettore in componenti

Sia  $\vec{v}$  un qualsiasi vettore e sia data una terna di versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  uscenti da un punto O e ortogonali fra di loro, Fig.3.

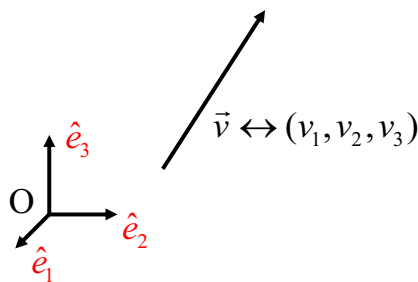


Figura 3: Componenti di un vettore, corrispondenza biunivoca con una terna di scalari.

È possibile scrivere il vettore  $\vec{v}$  nel seguente modo:

$$\vec{v} = \hat{e}_1 v_1 + \hat{e}_2 v_2 + \hat{e}_3 v_3 \quad (9)$$

essendo i versori ortogonali segue che (ad esempio per la prima componente, ma analogamente per le altre):

$$\vec{v} \cdot \hat{e}_1 = (\hat{e}_1 v_1 + \hat{e}_2 v_2 + \hat{e}_3 v_3) \cdot \hat{e}_1 = v_1 \quad (10)$$

per cui il prodotto scalare di un vettore per un versore, fornisce la componente di tale vettore rispetto alla direzione individuata dal versore.

È quindi possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra il vettore  $\vec{v}$  ed una terna  $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  fissata una terna di versori ortogonali fra loro  $\hat{e}_i$ , con  $i = 1 \dots 3$ .

Dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (11)$$

*Suggerimento:* il prodotto scalare è distributivo rispetto alla somma, vale pertanto la relazione  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{u} + \vec{b} \cdot \vec{u}$



## 2.7 Prodotto vettoriale

Dati due vettori  $\vec{u}, \vec{v}$  il loro prodotto vettoriale è un terzo vettore:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (12)$$

tale che:

- $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0, \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ ;
- $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha)$ ;
- per definire il verso, si utilizza la convenzione levogira, ossia  $\vec{w}$  vede ruotare il primo vettore  $\vec{u}$  sul secondo dell'angolo minore, Fig.4.

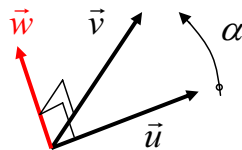


Figura 4: Definizione del verso del prodotto vettoriale,  $\vec{u}$  ruota verso  $\vec{v}$  della quantità  $\alpha$  (angolo minore fra i due).

Per cui risulta chiaro che  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ , ossia il prodotto vettoriale è anti-commutativo.

In accordo con la definizione di prodotto vettoriale, una terna di versori ortogonali fra loro  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  viene detta levogira se vale la relazione:  $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$ .

Convenzionalmente si utilizza sempre una terna levogira.

Data una terna levogira ( $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ), è possibile scrivere un vettore mediante le sue componenti<sup>1</sup> come visto in precedenza:  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Per determinare le componenti del vettore prodotto vettoriale  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  si può utilizzare la regola del determinante:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (13)$$

che quindi esplicitata:

$$\vec{w} = \hat{e}_1(u_2v_3 - u_3v_2) - \hat{e}_2(u_1v_3 - u_3v_1) + \hat{e}_3(u_1v_2 - u_2v_1) \quad (14)$$

Il *momento di una forza* si definisce come il prodotto vettoriale fra il suo *braccio* rispetto ad un polo Q (qualsiasi nello spazio) e il vettore forza stesso. Il braccio di una forza è il vettore che va da Q al suo punto di applicazione P (Fig.5):  $\vec{M}_Q^F = \vec{r} \times \vec{F}$ .

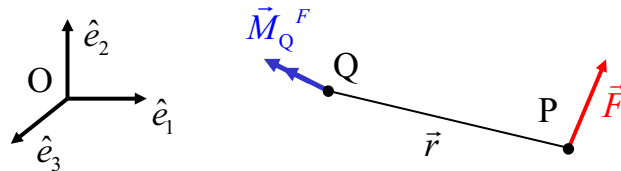


Figura 5: Definizione del momento di una forza (notazione a doppia freccia, usata spesso per indicare il vettore momento).

$Q = (1.0; 0.0; 0.0)$  mm è il polo di calcolo,  $P = (2.0; 0.0; 0.0)$  mm è il punto di applicazione della forza  $\vec{F} = 10.0 (\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; 0.0)$  N. Calcolare il vettore  $\vec{M}_Q^F$ .



<sup>1</sup>L'utilizzo del simbolo '=' è improprio, dovrebbe essere utilizzato '↔'.

Un insieme di una o più forze  $\vec{F}_i$  rispettivamente applicate nei punti di applicazione  $P_i$  si dice *sistema di forze*. Un particolare sistema di forze è quello costituito da due sole forze uguali ed opposte (stessa intensità, unità di misura, direzione ma verso opposto) ed applicate in due punti diversi (Fig.7) e viene detto *coppia di forze*.

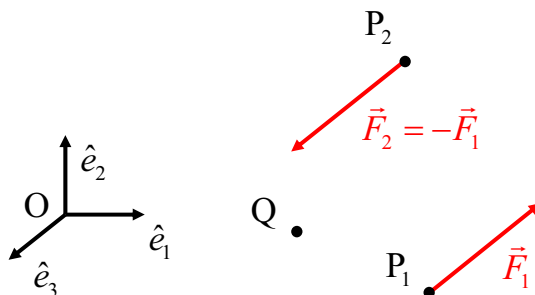


Figura 6: Coppia di forze.

Il momento di un sistema di forze  $\vec{M}_Q^{F_i}$  è semplicemente la somma (vettoriale) di tutti i singoli momenti di ciascuna forza  $\vec{F}_i$  rispetto allo stesso polo Q.

Dimostrare che per il particolare sistema di forze di Fig.6 segue che:

$$\vec{M}_Q^{F_1, F_2} = P_1 \vec{P}_2 \times \vec{F}_2 \quad (15)$$

*Suggerimento:* sfruttare la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma, ossia:  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{v} = \vec{a} \times \vec{v} + \vec{b} \times \vec{v}$



*Osservazione:* per questo particolare sistema di forze la scelta del polo di calcolo Q è indifferente, notare invece che questo non si verifica in genere per sistema di forze qualsiasi.

## 2.8 Prodotto triplo

Dati tre vettori:  $\vec{u}$ ;  $\vec{v}$ ;  $\vec{w}$ ; si definisce il prodotto triplo fra di essi come:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad (16)$$

L'interpretazione geometrica di quest'operatore rappresenta il volume individuato dai tre vettori (Fig.7).

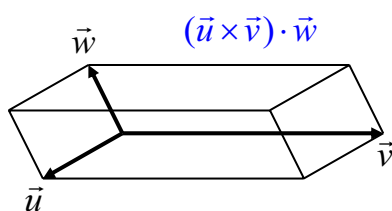


Figura 7: Prodotto triplo fra tre vettori.

È possibile dimostrare che:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

ossia il determinante della matrice delle componenti.

Si può dimostrare che valgono le seguenti due regole di permutazione:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} \quad (18)$$

Con riferimento alla Fig.5 calcolare la proiezione del momento  $\vec{M}_O^F$  sulla direzione definita dal versore  $\hat{d} = (\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; 0)$ .



### 3 Cambio di sistema di riferimento

Molto spesso è utile rappresentare un vettore per componenti rispetto ad un sistema di riferimento piuttosto che ad un altro.

Si pone quindi il problema di conoscere le coordinate del vettore rispetto al nuovo sistema conoscendo quelle rispetto al precedente, Fig.8.

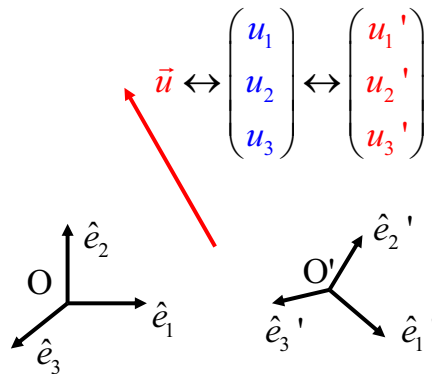


Figura 8: Cambio di sistema di riferimento, è necessario trovare le coordinate del vettore rispetto al nuovo sistema di riferimento.

Per risolvere questo problema basta eseguire lo sviluppo (ad esempio per la prima coordinata):

$$u'_1 = \vec{u} \cdot \hat{e}'_1 = (u_1 \hat{e}_1 + u_2 \hat{e}_2 + u_3 \hat{e}_3) \cdot \hat{e}'_1 = u_1 \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 + u_2 \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 + u_3 \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_1 \quad (19)$$

da cui si capisce che è sufficiente raccogliere i prodotti scalari dei versori dei due sistemi di riferimento, definendo la matrice:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_1 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_2 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_3 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_3 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

(notare che per righe scorre l'indice del riferimento vecchio, mentre per colonne scorre l'indice del riferimento nuovo).

Quindi in definitiva si ottiene che:

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Inoltre si dimostra che la matrice  $\mathbf{Q}$  è ortogonale ( $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ ) per cui è possibile il semplice passaggio inverso utilizzando la trasposta di  $\mathbf{Q}$  senza la difficoltà di calcolarne l'inversa.

---

Calcolare le componenti della forza di Fig.9 nel nuovo riferimento, conoscendo quelle rispetto al vecchio.

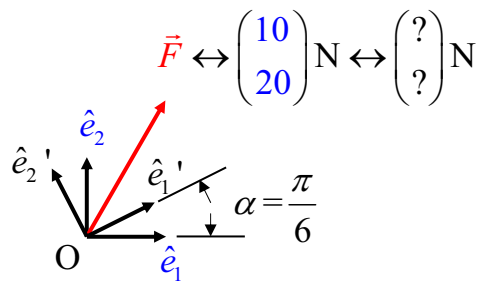


Figura 9: Cambio di sistema di riferimento (esercizio).



## Esercitazione 02:

# Sistemi di forze, nozioni di base

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Definizione di sistema di forze</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Equivalenza fra due sistemi di forze</b>	<b>2</b>
2.1	Particolari sistemi di forze . . . . .	2
2.2	Riduzione di un sistema di forze ad un punto . . . . .	3
2.3	Proprietà “associativa” dell’equivalenza di sistemi di forze . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Trinomio invariante</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Asse centrale</b>	<b>5</b>
4.1	Sistemi di forze a risultante non nulla e a trinomio invariante nullo . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Riduzione di semplici carichi distribuiti</b>	<b>7</b>

## 1 Definizione di sistema di forze

Si definisce un sistema di forze  $\Sigma$  un insieme di  $n$  forze  $\vec{F}_i$  rispettivamente applicate nei punti  $P_i$ .  
Dato un sistema di forze è possibile definire due vettori che lo caratterizzano:

- *risultante*  $\vec{R}$ ,
- *momento risultante*  $\vec{M}_Q$  calcolato rispetto ad un polo  $Q$ :

La risultante è definita semplicemente come la somma di tutti i vettori forza:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (1)$$

a differenza delle singole forze  $\vec{F}_i$  che sono vettori applicati, la risultante  $\vec{R}$  è un vettore libero ossia non necessita di un punto di applicazione.

Il momento risultante è la somma di ciascun momento di ciascuna forza  $\vec{F}_i$ , calcolati rispetto allo stesso polo Q.

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n \vec{Q}\vec{P}_i \times \vec{F}_i \quad (2)$$

anche il vettore momento risultante non necessita di un punto di applicazione, pertanto anch'esso è un vettore libero.

## 2 Equivalenza fra due sistemi di forze

Due sistemi di forze  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  vengono detti equivalenti se soddisfano entrambe le condizioni:

- hanno stessa risultante  $\vec{R} = \vec{R}'$
- hanno stesso momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo di calcolo Q.

è importante porre l'attenzione sull'espressione 'un qualsiasi polo di calcolo Q'. A rigore sarebbe necessario chiedere che il momento risultante sia uguale per tutti i poli di calcolo Q, ossia per tutti i punti dello spazio.

Fortunatamente vale il seguente risultato:

se due sistemi  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  hanno la stessa risultante  $\vec{R}$  ed esiste almeno un polo Q per il quale il momento risultante è lo stesso, allora lo è anche per un qualsiasi altro polo di calcolo  $Q^*$ , infatti:

$$\vec{M}_{Q^*} = \sum_{i=1}^n \vec{Q}^*\vec{P}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{Q}^*\vec{Q} + \vec{Q}\vec{P}_i) \times \vec{F}_i = \vec{Q}^*\vec{Q} \times \vec{R} + \vec{M}_Q \quad (3)$$

grazie a questo risultato, nella definizione di equivalenza l'espressione 'un qualsiasi polo di calcolo Q' può essere interpretata come: 'per almeno un punto' dal momento che è richiesta anche la condizione di risultante uguale.

Da osservare che due sistemi possono essere *equivalenti* pur non essendo *identici*.

---

Individuare un (semplice) esempio di due sistemi di forze equivalenti ma non identici.



### 2.1 Particolari sistemi di forze

Esistono dei sistemi di forze semplici che presentano particolari proprietà:

- sistema nullo o costituito da nessuna forza. Risulta evidente che  $\vec{R} = 0$  e  $\vec{M}_Q = 0$  qualsiasi polo Q si scelga;
- sistema costituito da una sola forza  $\vec{F}$  applicata in P. Per tale sistema si ha  $\vec{R} = \vec{F}$  ed inoltre  $\vec{M}_Q = 0$  per un qualsiasi polo Q che giace lungo la retta d'azione di  $\vec{F}$  (Fig.1);
- coppia di forze (due forze uguali ed opposte applicate in due punti distinti), per tale sistema la risultante è zero, mentre il momento risultante (vedi esercitazione precedente) è indipendente dal polo considerato e vale  $\vec{M}_Q = \vec{P}_1\vec{P}_2 \times \vec{F}_2$  (Fig.2).

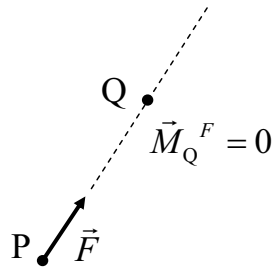


Figura 1: Sistema costituito da una sola forza, il momento risultante calcolato rispetto ad un polo Q che giace sulla retta d'azione della forza è nullo.

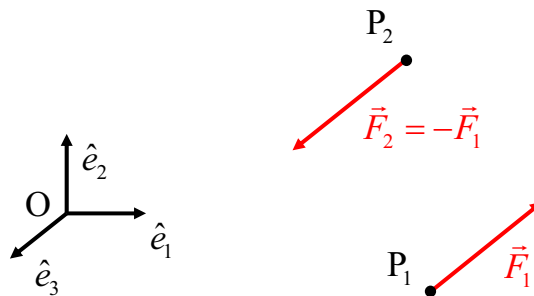


Figura 2: Coppia di forze.

Da quanto appena detto risulta evidente che un sistema costituito da una sola forza è equivalente a quello ottenuto traslando tale forza lungo la sua retta d'azione ed inoltre una coppia di forze identifica un momento.

## 2.2 Riduzione di un sistema di forze ad un punto

Sia  $\Sigma$  un sistema di forze ed A un punto qualsiasi dello spazio. Esiste la possibilità di individuare un sistema di forze più semplice e che sia equivalente al sistema dato.

Considerando il sistema costituito da:

- da una forza pari alla risultante  $\vec{R}$  applicata in A;
- una coppia di forze tale che il relativo momento sia  $M = \sum_{i=1}^n A\vec{P}_i \times \vec{F}_i$

si ottiene un sistema di forze equivalente a quello di partenza e costituito da 3 forze soltanto.

Con riferimento alla Fig.3, ridurre il sistema di forze in A.

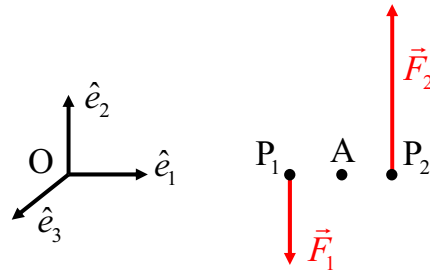


Figura 3: Sistema di forze da ridurre in A.

Dati del problema:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (4.0; 0.0; 0.0) \text{ mm} \\
 P_2 &= (5.0; 0.0; 0.0) \text{ mm} \\
 A &= (4.5; 0.0; 0.0) \text{ mm} \\
 \vec{F}_1 &= (0.0; -10.0; 0.0) \text{ N} \\
 \vec{F}_2 &= (0.0; 15.0; 0.0) \text{ N}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$



### 2.3 Proprietà “associativa” dell’equivalenza di sistemi di forze

Nell’individuare un sistema di forze equivalenti spesso è utile raggruppare due o più forze ed individuare un sistema equivalente a quella porzione di forze, successivamente da considerare con le altre rimanenti.

Una tipica applicazione di tale concetto riguarda le forze distribuite su una linea (o superficie o volume).

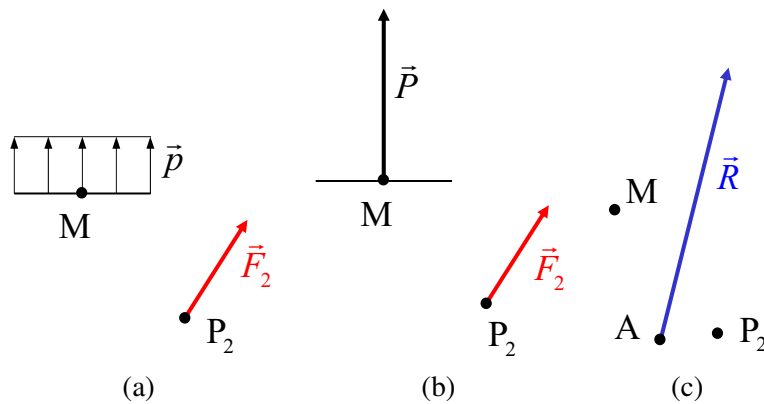


Figura 4: Utilizzo della proprietà additiva dell’equivalenza di sistemi di forze.

Se ad esempio consideriamo il sistema di forze di Fig.4(a) è possibile individuare un sistema di forze equivalente alla sola porzione di forze distribuite lungo la linea, successivamente è

possibile, in modo più agevole, comporre le due forze rimanenti di Fig.4(b) ed ottenere il sistema di Fig.4(c). Tutti i tre sistemi sono equivalenti fra loro.

### 3 Trinomio invariante

Dato un qualsiasi sistema  $\Sigma$  di  $n$  forze  $\vec{F}_i$ , rispettivamente applicate nei punti  $P_i$ , si indica come trinomio invariante:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_Q = R_1 M_1 + R_2 M_2 + R_3 M_3 \quad (5)$$

ed ha la proprietà di non dipendere da  $Q$  (invariante rispetto al polo di calcolo).

In particolare per un sistema a risultante non nulla e tale che  $Q'$  appartenga all'asse centrale, il trinomio invariante è il prodotto dell'intensità di  $\vec{R}$  e di  $\vec{M}_Q$ .

Con riferimento alla Fig.5, verificare la proprietà del trinomio invariante:  $\vec{R} \cdot M_{Q_0} = \vec{R} \cdot M_{Q_1} = \vec{R} \cdot M_{Q_2}$ .

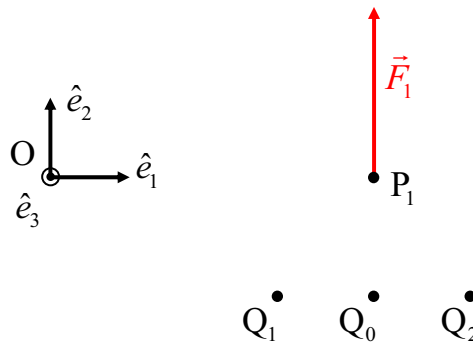


Figura 5: Semplice esempio su cui verificare l'indifferenza del trinomio invariante rispetto al polo di calcolo.

*Dati del problema:*

- $P_1 = (3.0; 0.0; 0.0) \text{ m}$
- $\vec{F}_1 = (0.0; 1.0; 0.0) \text{ N}$
- $Q_0 = (3.0; -1.0; 0.0) \text{ m}$
- $Q_1 = (2.0; -1.0; 0.0) \text{ m}$
- $Q_2 = (4.0; -1.0; 0.0) \text{ m}$



### 4 Asse centrale

Dato un sistema  $\Sigma$  di  $n$  forze  $\vec{F}_i$ , rispettivamente applicate nei punti  $P_i$ , tale che  $\vec{R} \neq 0$  (in pratica che non sia una coppia di forze) si può dimostrare che esiste un opportuno polo  $Q'$  tale che valga la relazione:

$$\vec{M}_{Q'} \times \vec{R} = 0 \quad (6)$$

Partendo da tale polo  $Q'$  segue che un qualsiasi altro punto  $Q''$  sulla retta parallela ad  $\vec{R}$  e passante per  $Q'$  offre lo stesso risultato, ossia:

$$\vec{M}_{Q''} \times \vec{R} = 0 \quad (7)$$

per cui i punti di tale retta, definita come *asse centrale* sono in un certo senso ‘preferenziali’ per la scelta del polo di riduzione.

Per individuare un punto dell’asse centrale  $Q'$  si parte da un polo di tentativo  $Q$  qualsiasi, si calcolano  $\vec{R}$  e  $\vec{M}_Q$  ed infine si determina:

$$\vec{QQ'} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_Q}{\vec{R} \cdot \vec{R}} \quad (8)$$

La condizione di asse centrale stabilisce che il vettore risultante e momento risultante siano paralleli, Fig.6.

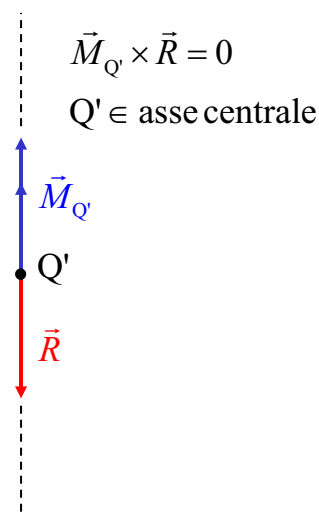


Figura 6: Asse centrale di un sistema di forze.

#### 4.1 Sistemi di forze a risultante non nulla e a trinomio invariante nullo

Sono di particolare interesse i sistemi che hanno trinomio invariante nullo pur essendo a risultante non nulla. In tal caso infatti è possibile utilizzare un punto dell’asse centrale su cui ridurre il sistema ottenendo  $\vec{M}_Q = 0$ . Ossia il sistema è equivalente semplicemente ad una forza (pari ovviamente alla risultante) applicata su un punto dell’asse centrale, senza la necessità di un’ulteriore coppia di forze.

Le categorie di sistemi di forze che hanno questa proprietà sono:

- sistemi di forze parallele (ad esempio un distribuzione di forze peso), in tal caso l’asse centrale è sicuramente parallelo a tutte le altre forze;
- sistemi piani, ossia tutte le forze e i rispettivi punti di applicazione sono contenuti in un unico piano, in tal caso l’asse centrale giace anch’esso nel piano;
- sistemi di forze tutte incidenti in un punto, in tal caso l’asse centrale passa per il punto di incidenza.

## 5 Riduzione di semplici carichi distribuiti

Un esempio di sistema di forze, particolarmente utile nella Tecnica delle Costruzioni Meccaniche è una distribuzione di carichi lungo una linea.

Tale sistema di forze rappresenta una buona modellazione di una struttura monodimensionale caricata ad esempio dal peso di masse appoggiate.

Come presentato in Fig.7 considerato un tratto elementare  $dx$  si può considerare su di esso una forza concentrata  $d\vec{F}$ .

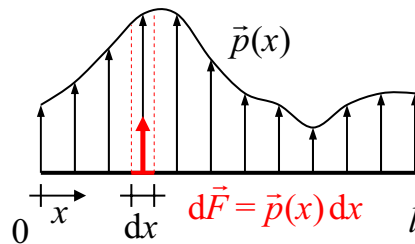


Figura 7: Carico distribuito lungo una linea, insieme di forze elementari.

L'intero sistema di forze può quindi essere considerato come un'insieme di tante forze elementari, inoltre tutte le singole forze elementari sono parallele. Per cui il sistema ha la proprietà di avere trinomio invariante nullo. Per quanto detto prima è quindi possibile individuare un sistema di forze equivalenti a quello dato costituito soltanto da una sola forza (pari alla risultante) applicata in corrispondenza dell'asse centrale.

Per determinare la risultante si esegue semplicemente un integrale:

$$R = \int_0^l p(x) dx \quad (9)$$

mentre per determinare la posizione dell'asse centrale basta ricordare che il momento del sistema di forze dato deve essere uguale a quello equivalente, rispetto ad un qualsiasi polo (ad esempio l'origine della coordinata  $x$ ). Per cui è necessario imporre:

$$Rd = \int_0^l p(x)x dx \quad (10)$$

dove con  $d$  si indica la posizione dell'asse centrale rispetto all'origine della coordinata  $x$ , per cui in definitiva:

$$d = \frac{\int_0^l p(x)x dx}{\int_0^l p(x) dx} \quad (11)$$

Il sistema equivalente ottenuto è rappresentato in Fig.8.

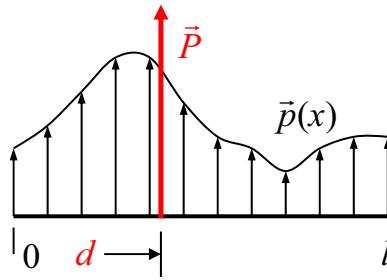
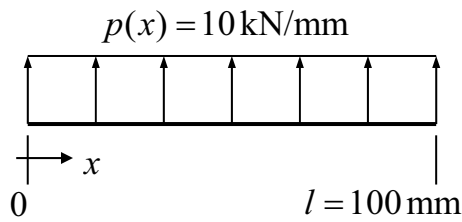
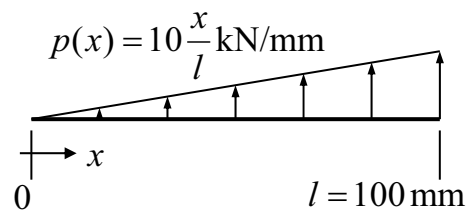


Figura 8: Carico distribuito lungo una linea. Sistema equivalente costituito dalla sola risultante applicata all'asse centrale.

Determinare il sistema equivalente più semplice per le distribuzioni di Fig.9(a),(b).



(a)



(b)

Figura 9: Carichi distribuiti di cui trovare il sistema equivalente: (a) carico uniforme, (b) carico distribuito linearmente.



---

Determinare il sistema equivalente più semplice per la distribuzione di Fig.10.

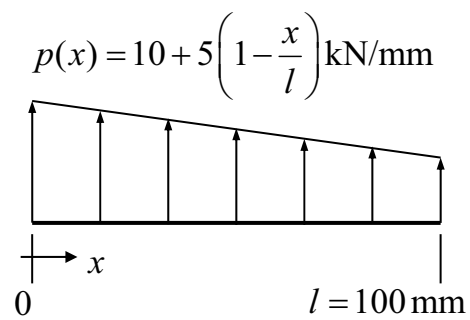


Figura 10: Carico con distribuzione trapezoidale di cui trovare il sistema equivalente.

*Suggerimento:* Utilizzare i risultati del precedente esercizio ed applicare la proprietà additiva dell'equivalenza di sistemi di forze.



## Esercitazione 03:

# Sistemi di forze equilibrati

---

### Indice

1	Definizione di sistema di forze equilibrato	1
2	Equilibrio di tre forze nel piano	2
3	Equilibrio nel piano con carico distribuito su una linea	3
4	Riduzione di un sistema di forze generico, a risultante non nulla, ad un punto dell'asse centrale	4
5	Equilibrio nello spazio di un sistema di forze generico	5

## 1 Definizione di sistema di forze equilibrato

Sia  $\Sigma$  un sistema di  $n$  forze  $\vec{F}_i$  applicate nei punti  $P_i$ .  $\Sigma$  si dice equilibrato, se è equivalente ad un sistema di forze vuoto, ossia costituito da nessuna forza.

Evidentemente un sistema di forze è *equilibrato* se e solo se:

$$\vec{R} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{M}_Q = 0 \quad (2)$$

con Q polo di calcolo qualsiasi.

Un problema di notevole importanza tecnica è quello di determinare una o più forze *equilibranti* al sistema dato, ossia tali che il loro intervento renda il sistema complessivo equilibrato.

Nei problemi di questo tipo, è consuetudine quindi distinguere le forze note da quelle incognite (equilibranti). Un suggerimento pratico è quello di rappresentare le forze note con il verso corretto in modo che l'intensità coincida con il modulo di ciascuna forza, mentre per le forze incognite applicare un verso di tentativo, eventualmente invertito dal segno negativo dell'intensità risultante. Cercare di prevedere il verso delle forze equilibranti, al fine di non avere segno negativo, è un approccio poco efficiente e che può indurre in errori.

## 2 Equilibrio di tre forze nel piano

Nello schema di Fig.1 si mostra un sistema di tre forze contenute nel piano ( $x - y$ ). Delle tre forze  $\vec{F}_1$  è nota,  $\vec{F}_2$  è nota in direzione ma non la sua intensità ed infine  $\vec{F}_3$  è incognita nel piano, quindi comporta due incognite.

Determinare le incognite affinché il sistema di forze sia equilibrato.

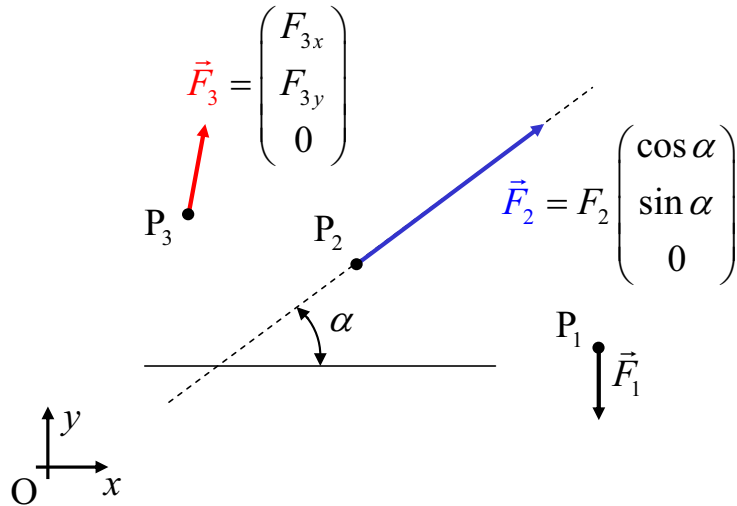


Figura 1: Sistema piano di tre forze.

Dati del problema:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (x_1; y_1; 0) = (12.0; 2.5; 0.0) \text{ mm} \\
 P_2 &= (x_2; y_2; 0) = (5.0; 4.0; 0.0) \text{ mm} \\
 P_3 &= (x_3; y_3; 0) = (4.2; 15.0; 0.0) \text{ mm} \\
 \alpha &= \pi/6 \\
 \vec{F}_1 &= (F_{1x}; F_{1y}; 0) = (0.0; -10.0; 0.0) \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Incognite del problema:

$$\begin{aligned}
 F_2 &\text{ intensità di } \vec{F}_2 \text{ lungo la direzione nota} \\
 F_{3x} &\text{ componente della forza } \vec{F}_3 \text{ secondo } x \\
 F_{3y} &\text{ componente della forza } \vec{F}_3 \text{ secondo } y
 \end{aligned}$$



*Soluzione:*

$$\begin{aligned}
 F_2 &= 7.858 \text{ kN} \\
 F_{3x} &= -6.805 \text{ kN} \\
 F_{3y} &= 6.071 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

### 3 Equilibrio nel piano con carico distribuito su una linea

In Fig.2 si mostra uno schema di forze piano, in cui compare una distribuzione di forze lungo una linea. Analogamente al caso precedente compaiono due ulteriori forze, di cui una nota in direzione e l'altra incognita nel piano.

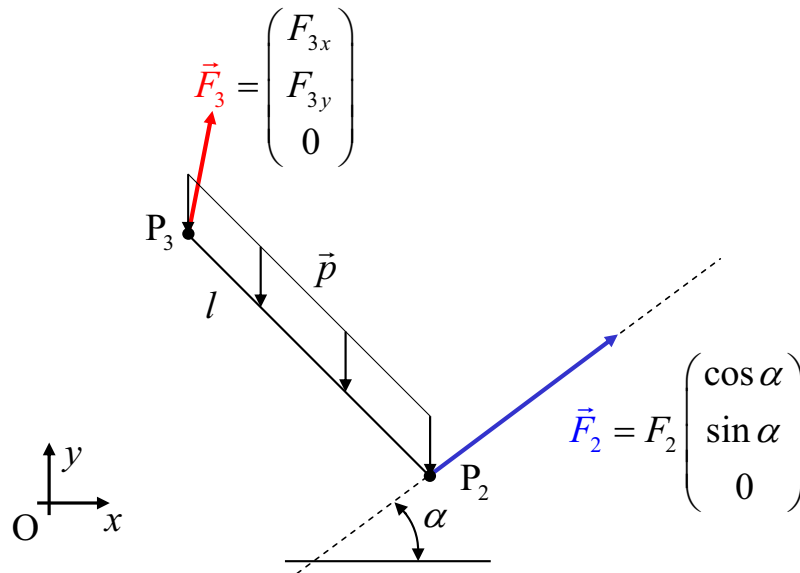


Figura 2: Sistema piano in cui compare una distribuzione di forze su una linea.

Dati del problema:

$$\begin{aligned} P_2 &= (x_2; y_2; 0) = (15.0; -2.0; 0.0) \text{ mm} \\ P_3 &= (x_3; y_3; 0) = (2.5; 10.0; 0.0) \text{ mm} \\ \alpha &= \pi/6 \\ \vec{p} &= (0; -p; 0) = (0.0; -300; 0.0) \text{ N m}^{-1} \end{aligned}$$

Incognite del problema:

$$\begin{aligned} F_2 &\text{ intensità di } \vec{F}_2 \text{ lungo la direzione nota} \\ F_{3x} &\text{ componente della forza } \vec{F}_3 \text{ secondo } x \\ F_{3y} &\text{ componente della forza } \vec{F}_3 \text{ secondo } y \end{aligned}$$



Soluzione:

$$\begin{aligned} F_2 &= 1.95 \text{ N} \\ F_{3x} &= -1.69 \text{ N} \\ F_{3y} &= 4.22 \text{ N} \end{aligned}$$

#### 4 Riduzione di un sistema di forze generico, a risultante non nulla, ad un punto dell'asse centrale

Dato un sistema di due forze  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  generiche nello spazio, Fig.3.

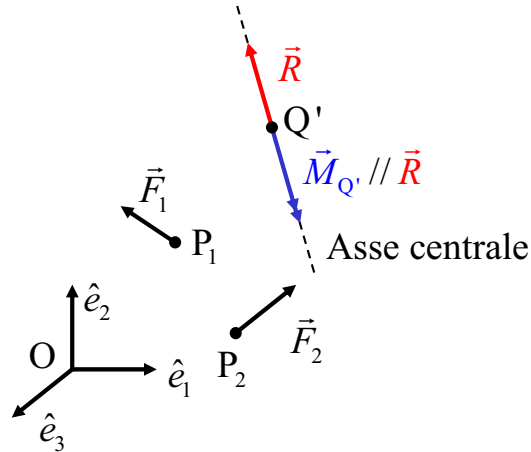


Figura 3: Sistema generico, equilibrato da due forze nel piano perpendicolare all'asse centrale.

Dati del problema:

$$\begin{aligned} P_1 &= (2.0; 0.0; 0.0) \text{ mm} \\ \vec{F}_1 &= (3.0; 4.0; 0.0) \text{ N} \\ P_2 &= (0.0; 1.0; 0.0) \text{ mm} \\ \vec{F}_2 &= (10.0; 0.0; -2.0) \text{ N} \end{aligned}$$

Ridurre il sistema ad un punto  $Q'$  dell'asse centrale del sistema.



*Soluzione:*

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (13.0; 4.0; -2.0) \text{ N} \\ Q' &= (-0.042; 0.159; 0.042) \text{ mm} \\ M_{Q'} &= \alpha \vec{R} \\ \alpha &= -0.116 \text{ mm} \end{aligned}$$

## 5 Equilibrio nello spazio di un sistema di forze generico

Sia dato un sistema di forze  $\Sigma$  generico nello spazio, già ridotto in un punto  $Q'$  del proprio asse centrale. Pertanto tale sistema è costituito da una forza  $\vec{R}$  ed una coppia di forze di momento  $\vec{M}_{Q'}$ , Fig.3.

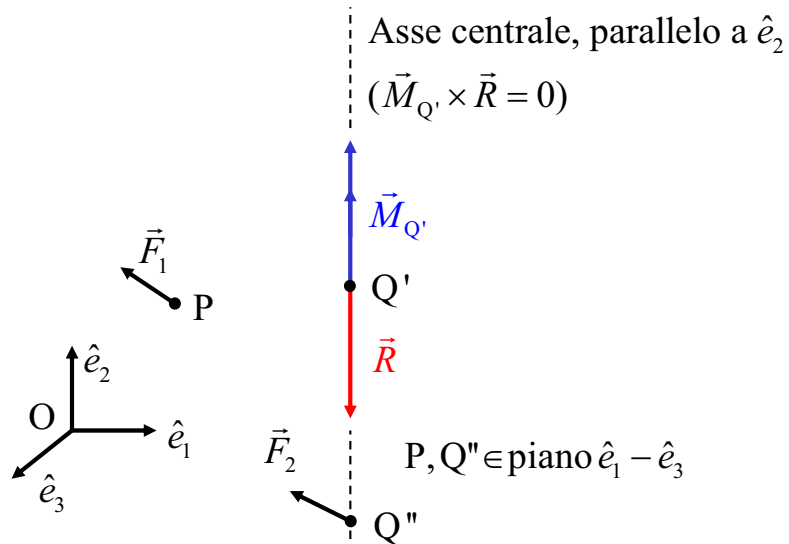


Figura 4: Sistema generico, equilibrato da due forze nel piano perpendicolare all'asse centrale.

Determinare  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  tali che il sistema sia equilibrato.

Quante soluzioni ammette il problema ?

Sotto quali condizioni il problema ammette soluzione ?



## Esercitazione 04:

# Statica del corpo rigido vincolato

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Statica del corpo rigido</b>	<b>1</b>
1.1	Reazioni vincolari . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Casistica, per esempi, di corpo rigido vincolato</b>	<b>2</b>
2.1	Trave fra appoggio e cerniera . . . . .	2
2.2	Trave fra due appoggi . . . . .	3
2.3	Trave fra due cerniere . . . . .	4
2.4	Trave fra tre appoggi . . . . .	5
2.5	Principio di sovrapposizione degli effetti . . . . .	6

## 1 Statica del corpo rigido

Un corpo *rigido* è in condizioni di *equilibrio statico* se è inizialmente fermo e se il sistema di forze applicato su di esso è equilibrato.

Nel seguito si parte dall'ipotesi di equilibrio statico e quindi il sistema di forze deve essere necessariamente equilibrato.

### 1.1 Reazioni vincolari

Su di un corpo rigido possono essere esercitate sia forze attive (ad esempio la forza peso) sia forze reattive generate dalla presenza di vincoli applicati sul corpo. L'unica differenza è che generalmente le forze attive sono note, mentre le reazioni vincolari si sviluppano per impedire il moto secondo una o più direzioni, per cui tali forze sono le incognite del problema. Ai fini dell'equilibrio non c'è distinzione fra forze note o reazioni vincolari, deve essere soddisfatto l'equilibrio del sistema di *tutte* le forze che agiscono sul corpo rigido.

Un problema di statica prevede quindi di utilizzare le equazioni di equilibrio per risolvere le reazioni vincolari incognite, generando quindi un sistema lineare. Tuttavia non sempre il sistema ottenuto è ben posto, ossia non sempre esiste una ed una sola soluzione del problema.

Piuttosto che affrontare l'intera casistica in termini generici, verranno mostrati di seguito opportuni esempi.

## 2 Casistica, per esempi, di corpo rigido vincolato

### 2.1 Trave fra appoggio e cerniera

In Fig.1 è mostrato lo schema di trave fra appoggio e cerniera sollecitata con forza concentrata (nota) applicata su di un suo punto.

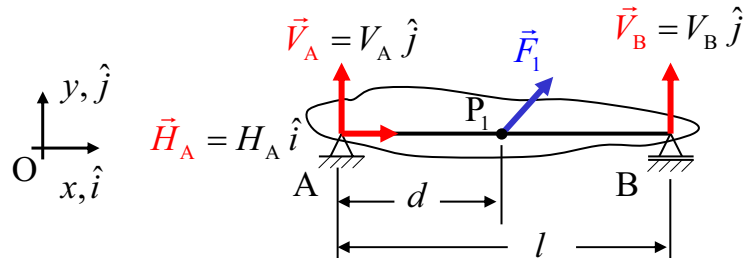


Figura 1: Schema di trave fra appoggio e cerniera.

Determinare le reazioni vincolari incognite, che in accordo con lo schema, sono gli scalari  $H_A, V_A, V_B$ .



*Osservazione:* Il sistema ottenuto ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia la condizione di carico. In tal caso si dice che il problema è intrinsecamente isostatico, ed è quindi il caso preferenziale.

## 2.2 Trave fra due appoggi

In Fig.2(a),(b) è mostrato lo schema di trave fra due appoggi sollecitata in due modi diversi.

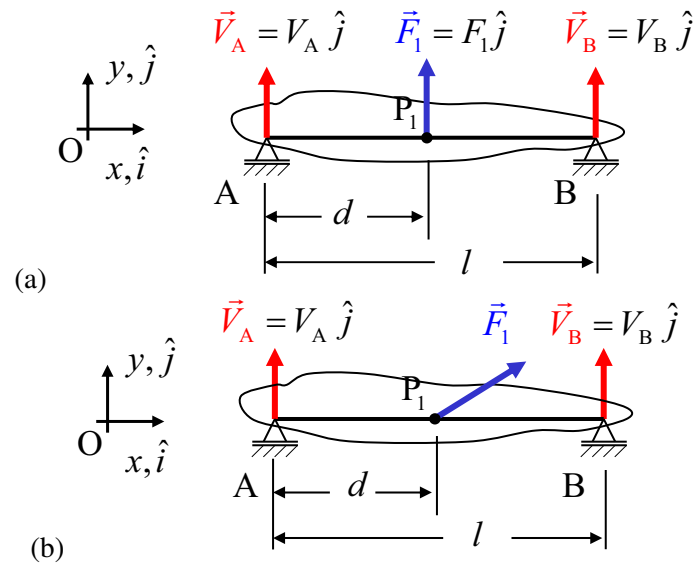


Figura 2: Schema di trave fra due appoggi: (a) caso in cui la forza attiva non interagisce con la labilità dello schema di vincolo. (b) caso in cui la labilità è interessata dall'azione delle forza attiva.

Determinare le reazioni vincolari incognite, che in accordo con lo schema, sono gli scalari  $V_A, V_B$ .



*Osservazioni:*

- il caso di Fig.2(a) ammette una ed una sola soluzione, per cui è isostatico;
- il caso di Fig.2(b) non ammette soluzione, per cui è labile;

In quanto per opportune condizioni di forze esterne il sistema è labile, lo schema di vincolo non può essere definito come intrinsecamente isostatico.

### 2.3 Trave fra due cerniere

In Fig.3 è mostrato lo schema di trave fra due cerniere sollecitata con un carico generico.

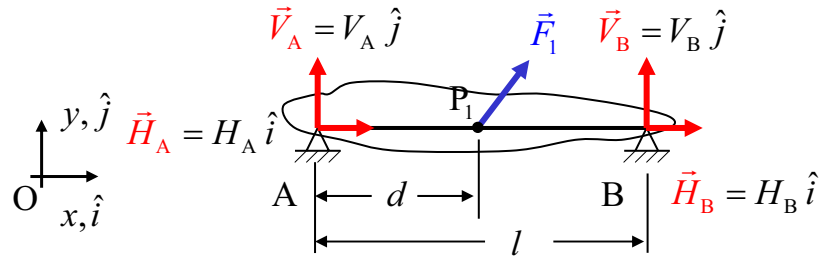


Figura 3: Schema di trave fra due cerniere.

Determinare le reazioni vincolari incognite, che in accordo con lo schema, sono gli scalari  $H_A, V_A, H_B, V_B$ .



*Osservazione:* In questo caso il sistema ammette  $\infty$  soluzioni, al variare di 1 parametro libero (ad esempio una delle due reazioni vincolari, componente orizzontale). In tal caso si dice che il sistema è iperstatico

## 2.4 Trave fra tre appoggi

In Fig.4 è mostrato lo schema di trave fra tre appoggi sollecitata in due modi diversi.

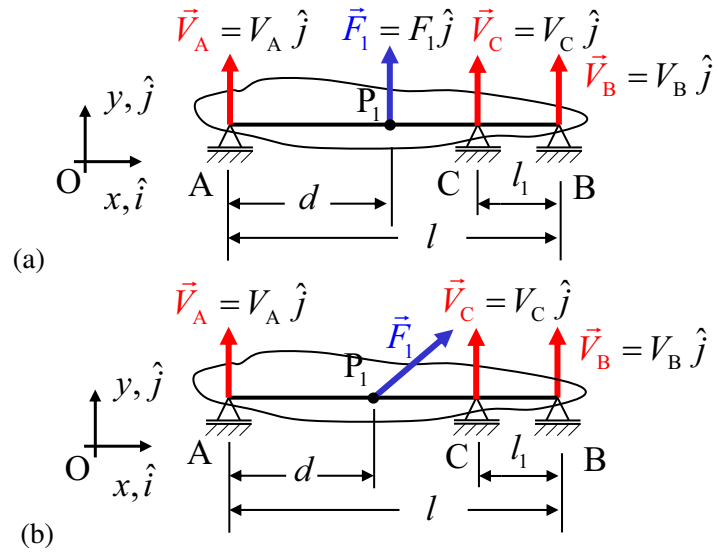


Figura 4: Schema di trave fra tre appoggi: (a) caso in cui la forza attiva non interagisce con la labilità dello schema di vincolo. (b) caso in cui la labilità è interessata dall'azione delle forze attive.

Determinare le reazioni vincolari incognite, che in accordo con lo schema, sono gli scalari  $V_A, V_B, V_C$ .



*Osservazioni:*

- il caso di Fig.4(a) ammette  $\infty$  soluzioni, al variare di 1 parametro libero (ad esempio una delle tre reazioni vincolari verticali);
- il caso di Fig.4(b) è invece labile, in quanto non ammette nessuna soluzione.

## 2.5 Principio di sovrapposizione degli effetti

Dato che le equazioni di equilibrio sono lineari, come visto in precedenza, si ottiene un sistema lineare che ammette come incognite le reazioni vincolari mentre il termine noto è lineare nelle forze attive.

Formalmente si può quindi scrivere:

$$\mathbf{A}_{e \times m} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} = \mathbf{b}_{e \times n} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

In cui:

- $e$  è il numero di equazioni da imporre (ad esempio 3 per un problema piano, come in precedenza; 6 per un problema tridimensionale);
- $m$  è il numero delle incognite, ossia delle *componenti* delle reazioni vincolari;
- $n$  è il numero delle *componenti* delle forze attive;
- $\mathbf{A}_{e \times m}$  è la matrice di statica;
- $\mathbf{b}_{e \times n}$  è la matrice del termine noto.

A partire da tale forma risulta quindi evidente la linearità delle reazioni vincolari (*effetto*) in funzione delle forze attive (*causa*).

---

Determinare i termini della forma di Eq.1 per lo schema di carico di Fig.1.



Risolvere lo schema di Fig.5, determinare le reazioni vincolari:  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $V_B$ , sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti.

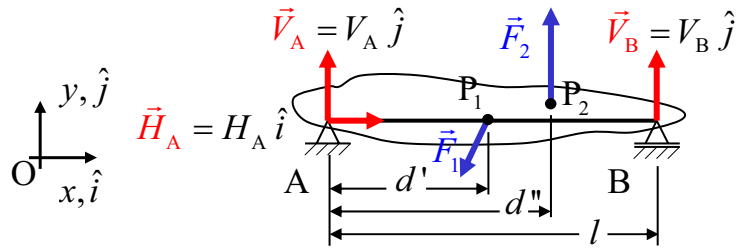


Figura 5: Schema di carico di trave fra cerniera ed appoggio con due forze esterne.

Dati:

- $l = 250 \text{ mm}$
- $d' = 140 \text{ mm}$
- $d'' = 180 \text{ mm}$
- $\vec{F}_1 = F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j}$
- $\vec{F}_2 = F_2\hat{j}$
- $F_{1x} = -10 \text{ N}$
- $F_{1y} = -120 \text{ N}$
- $F_2 = 150 \text{ N}$

*Suggerimento:* Notare che una base di soluzione è fornita dai casi riportati in Fig.6.

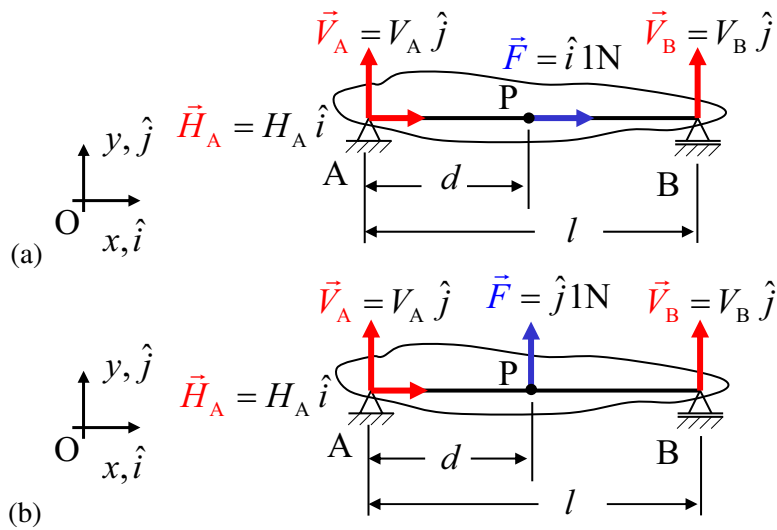


Figura 6: Soluzioni base mediante le quali è possibile risolvere il caso di carico di Fig.5, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.



*Soluzione:*

$$H_A = 10.0 \text{ N}$$

$$V_A = 10.8 \text{ N}$$

$$V_B = -40.8 \text{ N}$$

## Esercitazione 05:

# Statica del corpo rigido vincolato II

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Vincolo di appoggio inclinato</b>	<b>2</b>
1.1	Trave fra cerniera ed appoggio inclinato, carico concentrato . . . . .	2
1.2	Trave fra cerniera ed appoggio inclinato, carico concentrato, caso limite . . . . .	2
1.3	Trave fra cerniera ed appoggio inclinato, momento concentrato . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Vincolo di bi-pendolo</b>	<b>3</b>
2.1	Trave vincolata con bi-pendolo, carico concentrato . . . . .	3
2.2	Trave vincolata con bi-pendolo ed appoggio inclinato, carico concentrato . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Vincolo di doppio bi-pendolo</b>	<b>4</b>
3.1	Trave vincolata con doppio bi-pendolo e cerniera, carico concentrato . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Strutture a telaio</b>	<b>5</b>
4.1	Telaio vincolato con tre appoggi . . . . .	5
4.2	Telaio incastrato . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Semplice esempio di struttura tridimensionale</b>	<b>7</b>

# 1 Vincolo di appoggio inclinato

## 1.1 Trave fra cerniera ed appoggio inclinato, carico concentrato

In Fig.1 si rappresenta uno schema di trave vincolata con cerniera ed appoggio inclinato a cui viene applicato un carico concentrato in un punto.

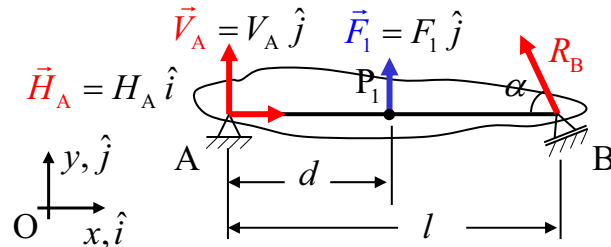


Figura 1: Schema di trave fra cerniera ed appoggio inclinato, carico concentrato.

Determinare le reazioni vincolari.

*Suggerimento:* scomporre la reazione  $\vec{R}_B$  in componente verticale ed orizzontale, ed imporre l'opportuna relazione geometrica.



## 1.2 Trave fra cerniera ed appoggio inclinato, carico concentrato, caso limite

Discutere il risultato nel caso limite, del problema di Fig.1, per  $\alpha \rightarrow 0$ .

Individuare quale caso di vincolo (vedi casistica esercitazione precedente) si ottiene per  $\alpha = 0$ .



### 1.3 Trave fra cerniera ed appoggio inclinato, momento concentrato

In Fig.2 si rappresenta uno schema di trave vincolata con cerniera ed appoggio inclinato, a cui viene applicato un momento concentrato in un punto.

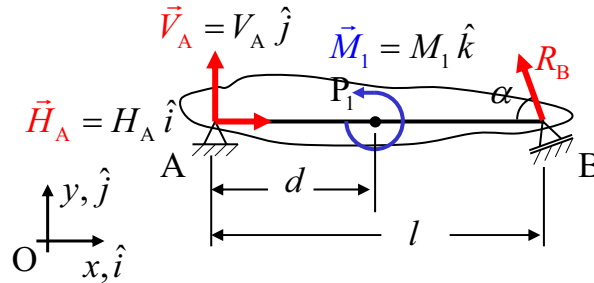


Figura 2: Schema di trave fra cerniera ed appoggio inclinato, momento concentrato.

Determinare le reazioni vincolari.

Notare come sia ininfluente il punto di applicazione del momento concentrato, motivare tale risultato.



## 2 Vincolo di bi-pendolo

### 2.1 Trave vincolata con bi-pendolo, carico concentrato

In Fig.3 si rappresenta uno schema di trave vincolata con bi-pendolo a cui viene applicato un carico concentrato.

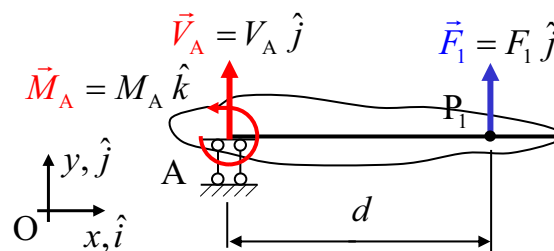


Figura 3: Schema di trave vincolata con bi-pendolo, carico concentrato.

Determinare le reazioni vincolari.

Individuare quale caso di vincolo si tratta (vedi casistica esercitazione precedente).



## 2.2 Trave vincolata con bi-pendolo ed appoggio inclinato, carico concentrato

In Fig.4 si rappresenta uno schema di trave vincolata con bi-pendolo ed appoggio inclinato, a cui viene applicato un carico concentrato.

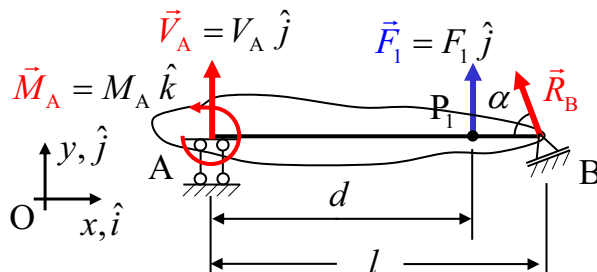


Figura 4: Schema di trave vincolata con bi-pendolo ed appoggio inclinato, carico concentrato.

Determinare le reazioni vincolari.

Individuare quale caso di vincolo si tratta (vedi casistica esercitazione precedente) in funzione dell'angolo  $\alpha$ .



## 3 Vincolo di doppio bi-pendolo

### 3.1 Trave vincolata con doppio bi-pendolo e cerniera, carico concentrato

In Fig.5 si rappresenta uno schema di trave vincolata con doppio bi-pendolo e cerniera, a cui viene applicato un carico concentrato.

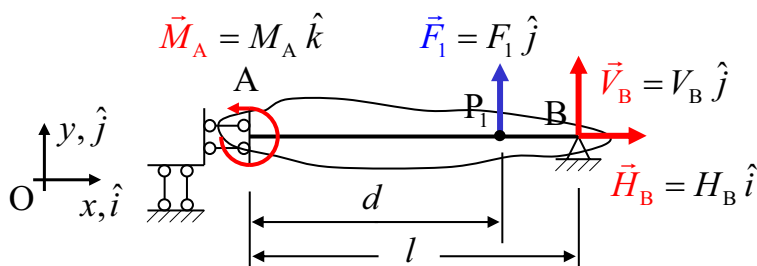


Figura 5: Schema di trave vincolata con doppio bi-pendolo e cerniera, carico concentrato.

Determinare le reazioni vincolari.

Individuare quale caso di vincolo si tratta (vedi casistica esercitazione precedente).



## 4 Strutture a telaio

### 4.1 Telaio vincolato con tre appoggi

In Fig.6 si rappresenta uno schema di telaio vincolato con tre appoggi, a cui viene applicato un carico concentrato.

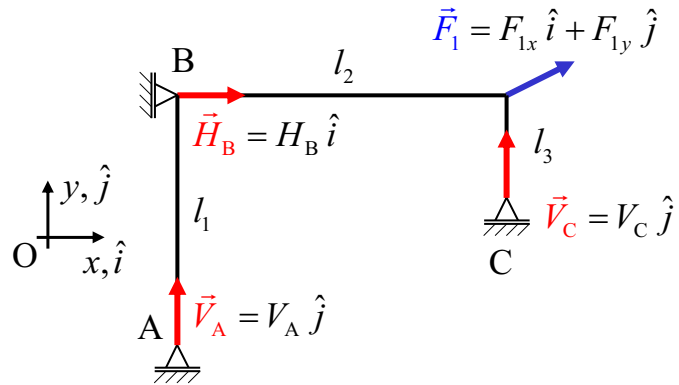


Figura 6: Schema di telaio fra tre appoggi, carico concentrato.

Determinare le reazioni vincolari.

Individuare quale caso di vincolo si tratta (vedi casistica esercitazione precedente).



## 4.2 Telaio incastrato

In Fig.7 si rappresenta uno schema di telaio incastrato, a cui viene applicato un carico concentrato.

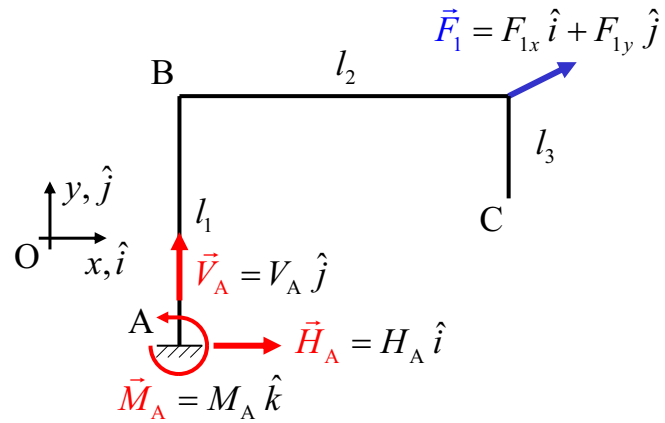


Figura 7: Schema di telaio incastrato, carico concentrato.

Determinare le reazioni vincolari.

Individuare quale caso di vincolo si tratta (vedi casistica esercitazione precedente).



## 5 Semplice esempio di struttura tridimensionale

In Fig.7 si rappresenta uno schema tridimensionale costituito da due travi soggette al loro peso (presenza dell'accelerazione di gravità  $\vec{g}$ ).

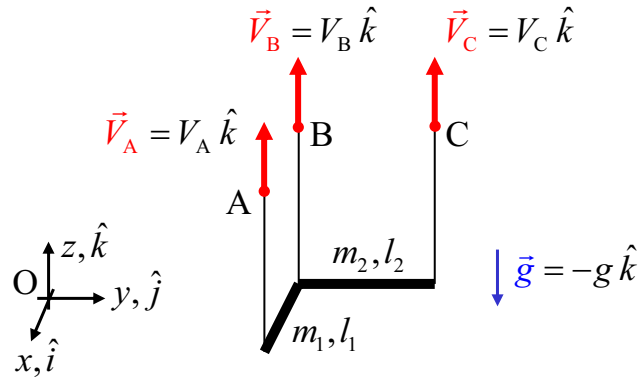


Figura 8: Struttura tridimensionale, sottoposta a peso proprio.

I fili di sostegno si comportano come un appoggi, offrendo quindi un'azione secondo la direzione del filo.

Ciascuno dei due tratti è sottoposto ad un'azione di carico distribuito pari a:

$$\vec{p}_1 = \frac{m_1}{l_1} \vec{g}$$

$$\vec{p}_2 = \frac{m_2}{l_2} \vec{g}$$
(1)

Determinare le reazioni vincolari.

Individuare quale caso di vincolo si tratta (vedi casistica esercitazione precedente).



## Esercitazione 06: Statica di più corpi rigidi vincolati

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Principio di Azione e Reazione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Arco a tre cerniere</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Competenza delle azioni esterne a ciascun corpo della struttura</b>	<b>3</b>
3.1	Possibilità di sostituire un sistema di forze equivalenti . . . . .	3
3.2	Trasferimento di una forza da un corpo ad un'altro, mantenendo il sistema equivalente . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Telaio come sequenza di travi incastrate</b>	<b>5</b>

### 1 Principio di Azione e Reazione

Nelle esercitazioni precedenti è sempre stato considerato l'equilibrio di un solo corpo rigido che riceve delle azioni vincolari da parte di un non precisato corpo esterno, ad esempio il suolo. A questo punto risulta importante notare che le reazioni vincolari cercate sono le azioni che il suolo esercita sulla trave (o telaio) in corrispondenza del punto di vincolo. Allo stesso tempo, per il principio di azione e reazione la trave esercita un'azione uguale ed opposta verso il suolo, Fig.1.

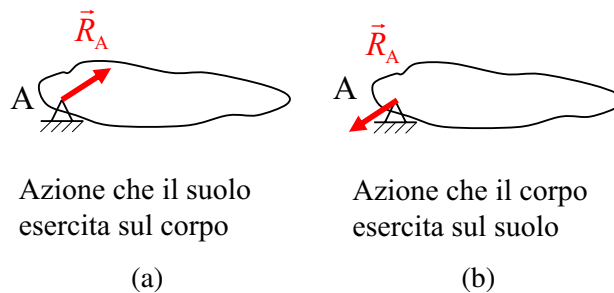


Figura 1: (a) Azione che il suolo esercita sulla trave. (b) Reazione che la trave esercita sul suolo.

È bene inoltre notare che l'azione reciproca non ammette un corpo preferenziale rispetto all'altro, per cui la distinzione fra azione  $\vec{R}_A$  e reazione  $-\vec{R}_A$  è solo convenzionale.

Tuttavia nel caso in cui uno dei due corpi sia il suolo è consuetudine indicare l'azione quella che quest'ultimo esercita sul corpo considerato.

Nella statica di più corpi rigidi si presentano invece dei vincoli relativi fra due (o più) corpi per cui sarebbe più rigoroso migliorare il formalismo come indicato in Fig.2.

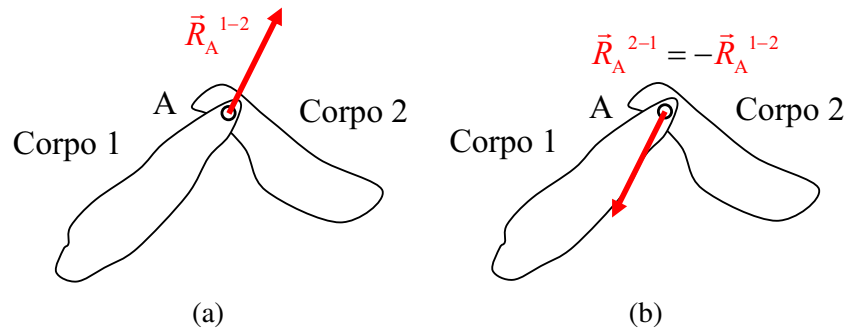


Figura 2: (a) Azione che il corpo 1 esercita su 2. (b) Azione uguale e contraria che il corpo 2 esercita su 1.

Negli schemi successivi verrà mostrata una delle due azioni, sottintendendo la presenza dell'altra uguale e contraria.

Nei problemi di statica di più corpi vincolati le incognite sono le reazioni vincolari con il suolo e le azioni mutue fra i corpi vincolati fra loro.

## 2 Arco a tre cerniere

Il più semplice esempio di statica di più corpi rigidi è il problema dell'arco a tre cerniere. In Fig.3 si riporta lo schema di tale struttura.

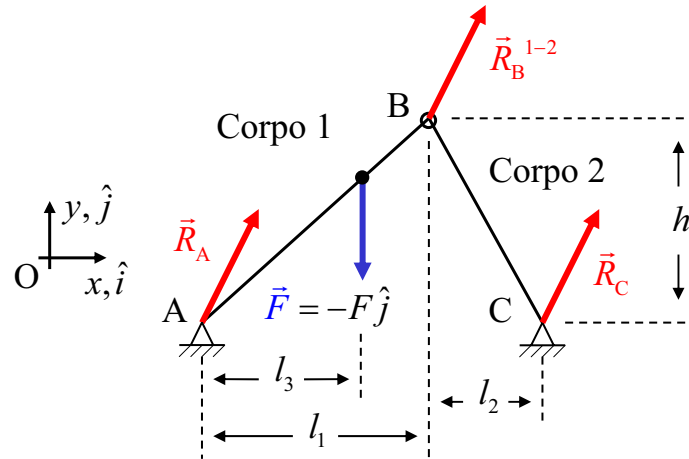


Figura 3: Schema dell'arco a tre cerniere, carico concentrato su di un corpo.

Determinare le reazioni vincolari con il suolo e di interazione fra i due corpi.

*Suggerimenti:*

- scomporre ciascuna azione in componente orizzontale (parallela a  $\hat{i}$ ) e verticale (parallela a  $\hat{j}$ );
- scrivere le equazioni di equilibrio (nel piano) per ciascuno dei due corpi, utilizzando le componenti di  $\vec{R}_B^{1-2}$  per l'equilibrio del corpo 2, mentre per l'equilibrio del corpo 1 utilizzare le stesse componenti *ma cambiate di segno*.



## 3 Competenza delle azioni esterne a ciascun corpo della struttura

### 3.1 Possibilità di sostituire un sistema di forze equivalenti

Nella statica di un solo corpo rigido può essere comodo sostituire alcune azioni esterne con un sistema di forze equivalente. Ad esempio un carico distribuito lungo una linea, può essere sostituito con il carico concentrato equivalente, senza che varino le reazioni vincolari, Fig.4.

Tale concetto non deve essere frainteso, nella statica a più corpi, con la possibilità di trasferire delle azioni da un corpo ad un'altro.

### 3.2 Trasferimento di una forza da un corpo ad un'altro, mantenendo il sistema equivalente

Si consideri lo schema di Fig.5, in cui sullo stesso sistema, diviso in due corpi da un incastro in C, si applica due sistemi equivalenti fra di loro, ma che differiscono per il corpo di competenza

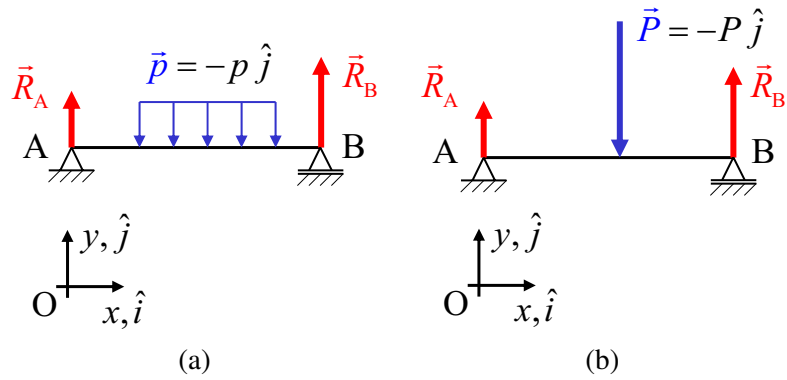


Figura 4: Possibilità di sostituire un sistema di forze con un sistema equivalente, le reazioni vincolari rimangono le stesse.

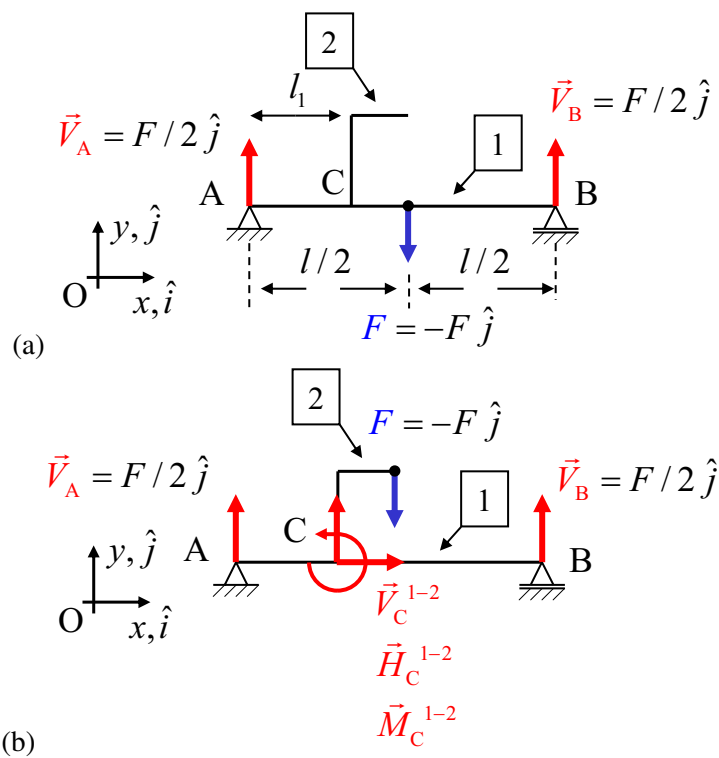


Figura 5: Struttura sottoposta a due sistemi di forze equivalenti ma in cui le forze sono applicate a corpi diversi.

della forza  $\vec{F}_1$ .

Pur essendo i sistemi di forze esterne equivalenti, le reazioni vincolari di mutua interazione fra i due corpi sono diverse nei due casi.

Determinare le reazioni in C, che il corpo 1 esercita su 2:  $\vec{V}_C^{1-2}$ ,  $\vec{H}_C^{1-2}$ ,  $\vec{M}_C^{1-2}$  per il caso di Fig.5(b).



#### 4 Telaio come sequenza di travi incastrate

In Fig.6 si rappresenta un telaio incastrato, sollecitato mediante un carico all'estremità.

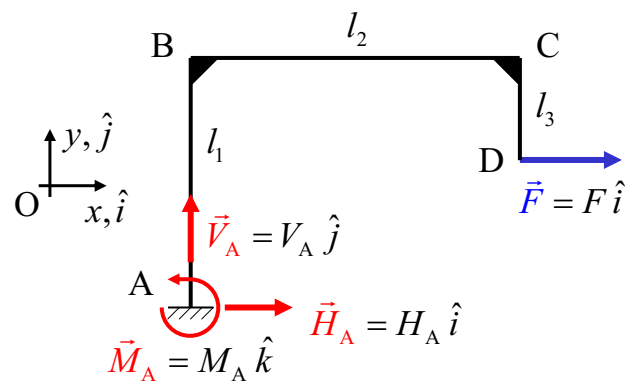


Figura 6: Struttura a telaio incastrato, sollecitato all'estremità da un carico concentrato.

È possibile interpretare i singoli elementi del telaio come singole travi: A-B, B-C e C-D con mutuo incastro nei punti B e C, oltre all'incastro al suolo in A.

Determinare le reazioni che le singole travi si scambiano nei punti B e C, e le reazioni vincolari in A.



# Esercitazione 07:

## Caratteristiche della sollecitazione

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Definizione delle caratteristiche della sollecitazione in una trave</b>	<b>1</b>
1.1	Come determinare le caratteristiche della sollecitazione . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Esempi notevoli di caratteristiche della sollecitazione</b>	<b>3</b>
2.1	Trave incastrata, carico generico all'estremità . . . . .	3
2.2	Trave fra due appoggi, con carico concentrato in un punto . . . . .	4
2.3	Trave fra due appoggi, con carico distribuito su tutta la lunghezza . . . . .	5
2.4	Trave fra due appoggi, con carico distribuito su una porzione di lunghezza . . . . .	7
2.5	Trave fra due appoggi caricata con una coppia di forze . . . . .	7

### 1 Definizione delle caratteristiche della sollecitazione in una trave

Data una trave (non necessariamente ad asse rettilineo) è possibile definire su di essa un'ascissa curvilinea  $\xi$ , vedi Fig.1.

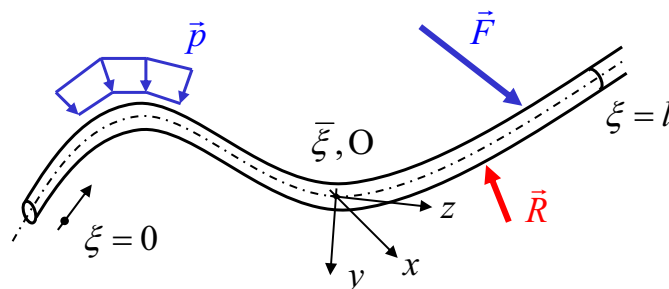


Figura 1: Definizione dell'ascissa curvilinea, e locale terna di riferimento.

Poniamo idealmente una sezione in corrispondenza della generica posizione  $\bar{\xi}$  che divide la trave in due corpi. Analogamente a quanto accennato nell'esercitazione precedente è possibile ritenere un qualsiasi punto di continuità della struttura (ad esempio i vertici di un telaio) come

un incastro reciproco fra due corpi.

Quindi è possibile suddividere idealmente la singola trave in:

- porzione *a valle* rispetto alla posizione  $\bar{\xi}$  (ossia la porzione di trave tale che  $\bar{\xi} < \xi \leq l$ );
- porzione *a monte* rispetto alla posizione  $\bar{\xi}$  (ossia la porzione di trave tale che  $0 \leq \xi \leq \bar{\xi}$ ).

Queste due porzioni di trave in corrispondenza del punto O (di ascissa curvilinea  $\bar{\xi}$ ) si scambiano delle mutue azioni (principio di azione e reazione). Il sistema di forze che uno dei corpi esercita sull'altro (ad esempio quello che la parte a valle esercita sulla parte a monte) può essere ridotto in corrispondenza del punto O, come una forza applicata in tale punto ed una coppia.

Infine è possibile definire le componenti (della forza applicata e della coppia) secondo il sistema locale  $x, y, z$ . Tali componenti vengono dette appunto le *caratteristiche della sollecitazione*.

### 1.1 Come determinare le caratteristiche della sollecitazione

Innanzitutto è necessario stabilire quale sistema di mutua interazione considerare, se quello che la parte a monte esercita sulla parte a valle o viceversa.

Premesso che tale distinzione è solo convenzionale, è tuttavia utile far riferimento sempre allo stesso criterio per non generare confusione.

Solitamente si considera come sistema di forze quello che *la parte a valle esercita sulla parte a monte*.

Stabilita questa convenzione, prendiamo in considerazione la porzione di trave a valle. Affinché quest'ultima sia in *equilibrio* è necessario che in corrispondenza dell'incastro in O, di coordinata  $\bar{\xi}$ , la parte a monte eserciti su quella a valle un sistema di forze equilibrante. Per il principio di azione e reazione il sistema di forze che la parte a valle esercita sulla parte a monte è uguale e contrario.

Per cui in definitiva per determinare le caratteristiche della sollecitazione è sufficiente considerare la parte a valle e ridurre il sistema di forze che agiscono su di essa in corrispondenza del punto O.

In Fig.2 si rappresenta un semplice esempio in cui una trave incastrata è sottoposta ad un carico concentrato in un punto.

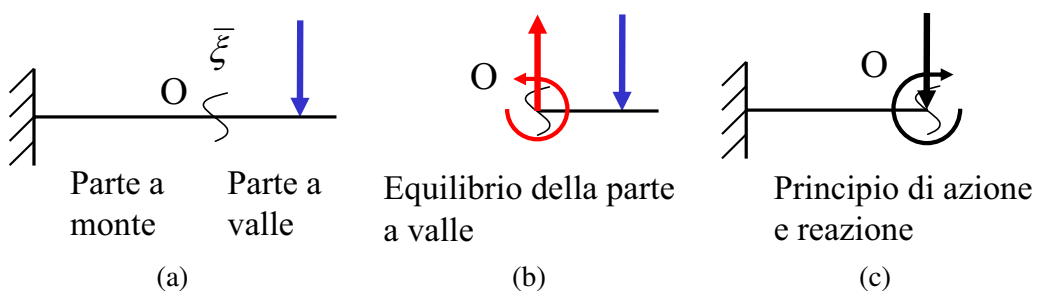


Figura 2: (a) Definizione di porzione *a valle* e *a monte*. (b) Equilibrio della parte a valle. (c) Principio di azione e reazione, per ottenere il sistema di forze che la parte a valle esercita su quella a monte.

Infine risultante e momento risultante vanno scomposti in componenti secondo un sistema di assi definito localmente con origine in O.

In molte situazioni può essere più comodo considerare l'equilibrio della parte a monte, piuttosto che quella a valle. Seguendo questa strada quindi è sufficiente ricordare di cambiare di segno alle caratteristiche trovate per riallinearsi con la convenzione in uso.

## 2 Esempi notevoli di caratteristiche della sollecitazione

Verranno di seguito presentati alcuni esempi classici di calcolo delle caratteristiche della sollecitazione in schemi di vincoli piani.

Verrà di seguito seguita la notazione di uso comune che prevede di posizionare l'asse  $z$  secondo la direzione della trave, l'asse  $y$  verso il basso e l'asse  $x$  uscente dal piano di rappresentazione. In problemi piani, le caratteristiche di sollecitazioni (non nulle) sono soltanto 3 (rispetto alle 6 in un problema tridimensionale generico) e sono:

- *Forza normale*  $N_z$ : componente della forza secondo l'asse della trave (asse  $z$ );
- *Taglio*  $T_y$ : componente della forza secondo l'asse  $y$ ;
- *Momento flettente*  $M_x$ : componente di momento in direzione  $x$ .

Sono invece identicamente nulle le componenti: taglio secondo  $x$  ( $T_x$ ), momento flettente secondo  $y$  ( $M_y$ ) e momento torcente secondo l'asse della trave ( $M_z$ ).

L'obiettivo quindi è determinare la distribuzione delle caratteristiche  $N_z, T_y, M_x$  della sollecitazione lungo l'asse della trave, ossia in funzione della variabile curvilinea  $\xi$  che percorre l'intera lunghezza della trave.

Infine è consuetudine rappresentare l'istogramma del momento flettente  $M_x$  positivo verso il basso (in accordo con la posizione delle fibre tese).

### 2.1 Trave incastrata, carico generico all'estremità

In Fig.3 si rappresenta lo schema di carico trave incastrata, sollecitata da un carico generico all'estremità, e le relative reazioni vincolari.

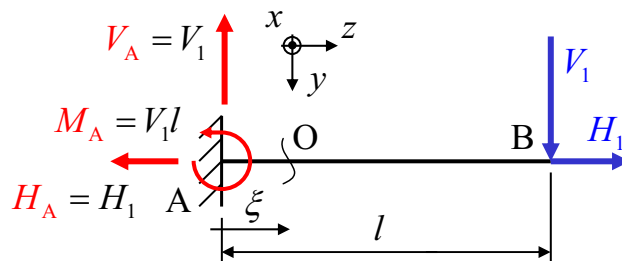
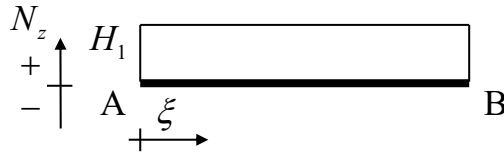


Figura 3: Trave incastrata, con un carico generico all'estremità.

Considerando una generica sezione in posizione  $\xi \in [0, l]$  è possibile determinare le seguenti distribuzioni di caratteristiche di sollecitazione:

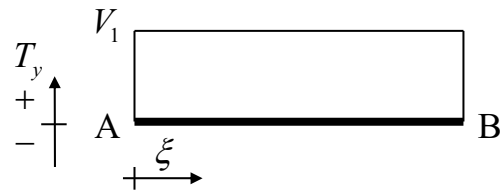
- *Forza normale*

$$N_z(\xi) = H_1$$



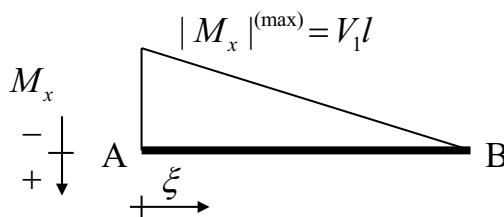
- *Taglio*

$$T_y(\xi) = V_1$$



- *Momento flettente*

$$M_x(\xi) = -V_1(l - \xi)$$



## 2.2 Trave fra due appoggi, con carico concentrato in un punto

In Fig.4 si rappresenta lo schema di carico trave fra due appoggi, con carico concentrato in un punto, e le relative reazioni vincolari.

Considerando una generica sezione in posizione  $\xi \in [0, l]$  è possibile determinare le seguenti distribuzioni di caratteristiche di sollecitazione:

- *Forza normale*

$$N_z(\xi) = 0$$

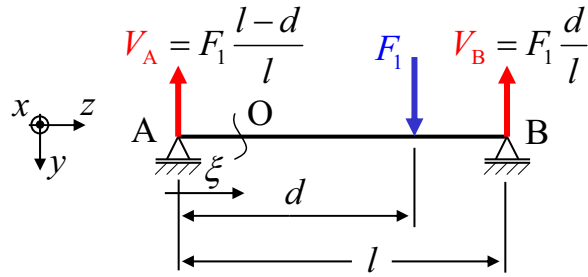
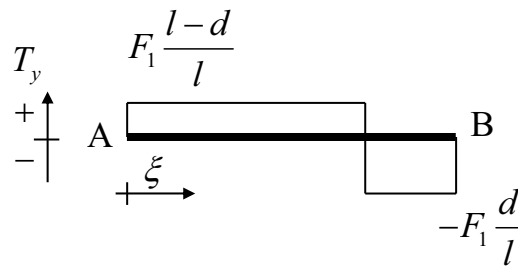


Figura 4: Trave fra due appoggi, con carico concentrato in un punto.

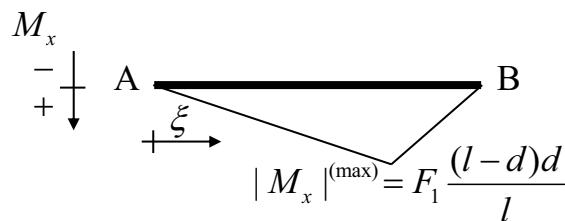
- *Taglio*

$$T_y(\xi) = \begin{cases} F_1 \frac{l-d}{l} & \text{per } 0 < \xi < d \\ -F_1 \frac{d}{l} & \text{per } d < \xi < l \end{cases}$$



- *Momento flettente*

$$M_x(\xi) = \begin{cases} F_1 \frac{l-d}{l} \xi & \text{per } 0 \leq \xi < d \\ F_1 \frac{d}{l} (l - \xi) & \text{per } d < \xi \leq l \end{cases}$$



### 2.3 Trave fra due appoggi, con carico distribuito su tutta la lunghezza

In Fig.5 si rappresenta lo schema di carico trave fra due appoggi caricata con carico distribuito su tutta la lunghezza, e le relative reazioni vincolari.

Considerando una generica sezione in posizione  $\xi \in [0, l]$  è possibile determinare le seguenti distribuzioni di caratteristiche di sollecitazione:

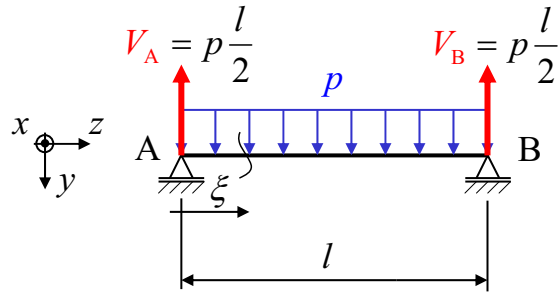


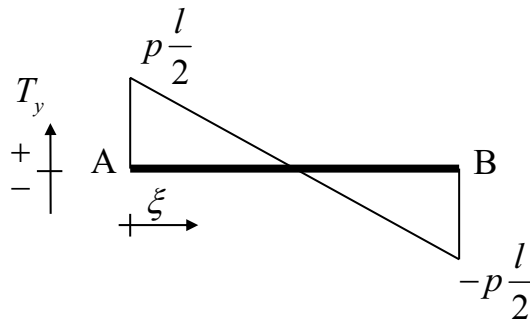
Figura 5: Trave fra due appoggi, con carico distribuito su tutta la lunghezza.

- *Forza normale*

$$N_z(\xi) = 0$$

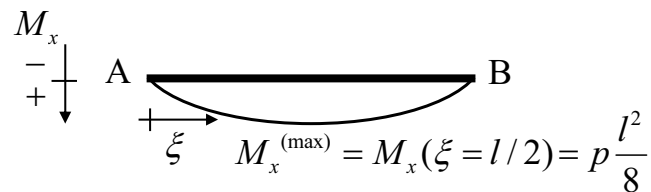
- *Taglio*

$$T_y(\xi) = p \frac{l}{2} - p\xi$$



- *Momento flettente*

$$M_x(\xi) = p \frac{l}{2} (l - \xi) - p(l - \xi) \frac{l - \xi}{2}$$



## 2.4 Trave fra due appoggi, con carico distribuito su una porzione di lunghezza

In Fig.6 si rappresenta lo schema di carico trave fra due appoggi, con carico distribuito su una porzione di lunghezza, e le relative reazioni vincolari.

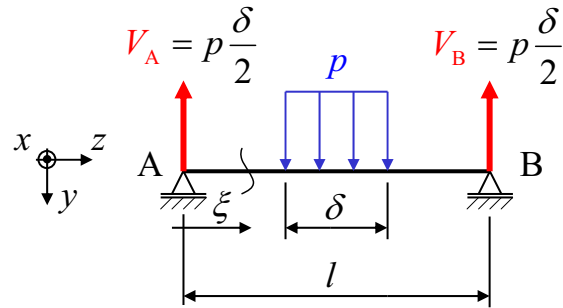


Figura 6: Trave fra due appoggi, con carico distribuito su una porzione di lunghezza.

Determinare le distribuzioni delle caratteristiche di sollecitazione  $N_z, T_y, M_x$ .



## 2.5 Trave fra due appoggi caricata con una coppia di forze

In Fig.7 si rappresenta lo schema di carico trave fra due appoggi caricata con una coppia di forze, e le relative reazioni vincolari.

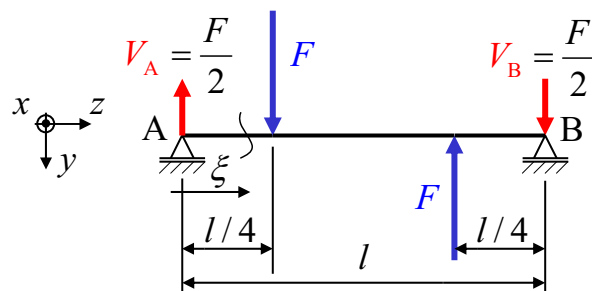


Figura 7: Trave fra due appoggi caricata con una coppia di forze.

Determinare le distribuzioni delle caratteristiche di sollecitazione  $N_z, T_y, M_x$ .



## Esercitazione 08: Caratteristiche della sollecitazione II

---

### Indice

1	Trave curvilinea, nel piano	1
2	Telaio come esempio di trave curvilinea	2
3	Telaio sviluppato nello spazio	4

### 1 Trave curvilinea, nel piano

Come accennato nella precedente esercitazione, non è strettamente necessario che l'asse della trave sia rettilineo, affinché sia possibile definire le caratteristiche della sollecitazione.

Da notare, tuttavia, che nel caso di trave ad asse curvilineo, la terna di riferimento, rispetto alla quale sono definite le caratteristiche della sollecitazione, varia da punto a punto lungo la lunghezza della trave, ossia al variare dell'ascissa curvilinea  $\xi$ . Tale aspetto rischia di non essere notato considerando solamente esempi con trave rettilinea, Fig.1.

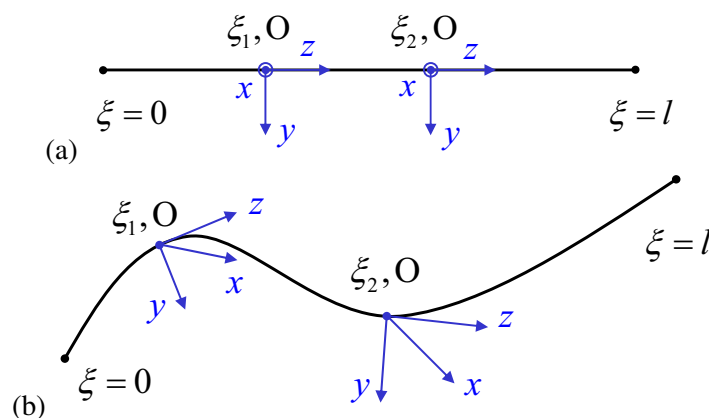


Figura 1: (a) Trave rettilinea, l'orientamento della terna  $x, y, z$  rimane lo stesso per tutta la lunghezza della trave. (b) Trave curvilinea necessita di ridefinire l'orientamento della terna  $x, y, z$  per ogni punto della trave.

In Fig.2 si mostra una trave ad arco di circonferenza incastrata all'estremità, sollecitata con carico orizzontale, sull'altra estremità.

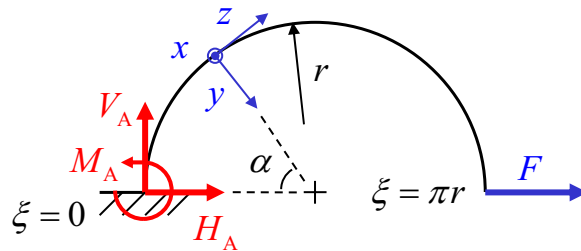


Figura 2: Trave ad arco di circonferenza incastrata all'estremità con carico orizzontale sull'altra estremità.

Determinare le caratteristiche della sollecitazione.

*Suggerimento:* essendo uno schema di trave nel piano (anche se di asse curvilineo) le caratteristiche della sollecitazione, non nulle, sono solo:  $N_z, T_y, M_x$  analogamente agli altri schemi di trave nel piano.



*Osservazione:* notare che definendo le caratteristiche della sollecitazione, considerando l'equilibrio della parte a valle, non è necessario risolvere dapprima le reazioni vincolari  $V_A, H_A, M_A$  dal momento che non intervengono lungo tutta la lunghezza della trave.

Notare inoltre che tali reazioni possono essere dedotte dalle caratteristiche della sollecitazione in corrispondenza del punto iniziale:

- $V_A = -N_z(\xi = 0)$
- $H_A = -T_y(\xi = 0)$
- $M_A = -M_x(\xi = 0)$

In quanto il vincolo si trova all'estremo della trave (definito da  $\xi = 0$ ).

## 2 Telaio come esempio di trave curvilinea

In Fig.3 si rappresenta un telaio, costituito da tre travi rettilinee (le reazioni vincolari sono state trovate in un'esercitazione precedente).

Per ciascuna singola trave rettilinea è necessario definire una terna  $x, y, z$  al fine di trovare le caratteristiche della sollecitazione.

Determinare le caratteristiche della sollecitazione di tutta la struttura.

*Osservazione:* da notare che nei punti B e C l'orientamento degli assi  $y$  e  $z$  varia bruscamente, questo giustifica la discontinuità che si trova se si rappresentano le caratteristiche  $T_y$  e  $N_z$  secondo un'unica ascissa curvilinea che percorre l'intera struttura. Al contrario, l'orientamento dell'asse

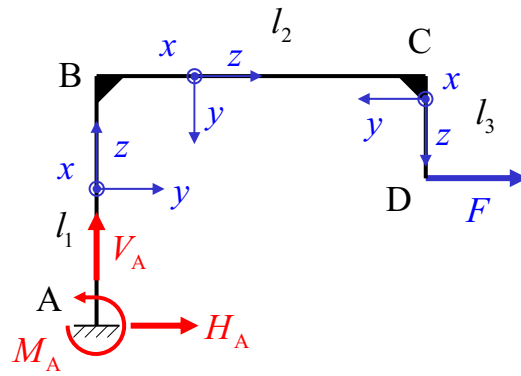


Figura 3: Telaio composto da più travi rettilinee.



$x$  non cambia lungo i tre tratti della struttura, per cui l'andamento della caratteristica  $M_x$ , al variare di  $\xi$ , è continuo (unito al fatto che non vengono applicati momenti concentrati).

### 3 Telaio sviluppato nello spazio

In Fig.4 si rappresenta un telaio incastrato con sviluppo nello spazio (a differenza di tutti gli altri casi definiti nel piano) e caricato all'estremità.

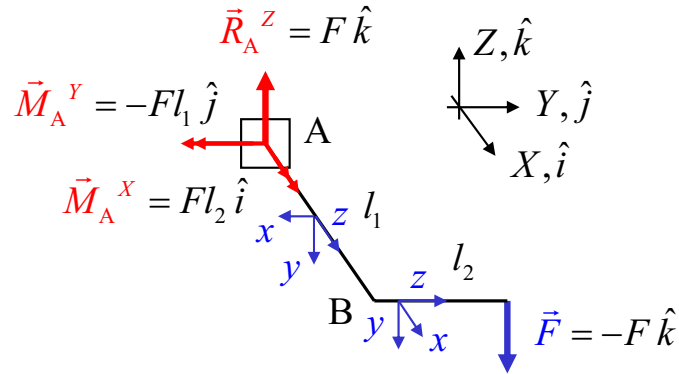


Figura 4: Telaio incastrato con sviluppo nello spazio e caricato all'estremità.

Notare che la terna  $X, Y, Z$  utilizzata per risolvere le reazioni vincolari dell'incastro in A è indipendente dal locale orientamento delle terne  $x, y, z$  definite su ciascuna trave del telaio.

Determinare le caratteristiche della sollecitazione.



*Osservazioni:*

- pur essendo una struttura nello spazio, per la particolare geometria e carico, alcune caratteristiche della sollecitazione sono nulle.
- notare che per entrambi i due segmenti l'asse  $y$  ha lo stesso orientamento, per cui le componenti secondo tale direzione ( $T_y, M_y$ ) sono continue al variare di  $\xi$  (per avere ciò è anche necessario che non ci siano né momenti né forze concentrate lungo il telaio).

## Esercitazione 09:

# Caratteristiche della sollecitazione III

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Proprietà delle caratteristiche della sollecitazione</b>	<b>1</b>
1.1	Relazione fra le caratteristiche di taglio e momento flettente . . . . .	1
1.2	Caratteristiche della sollecitazione in corrispondenza delle estremità della trave	2
<b>2</b>	<b>Esempio di utilizzo delle proprietà delle caratteristiche della sollecitazione</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Strutture simmetriche e antisimmetriche</b>	<b>5</b>

## 1 Proprietà delle caratteristiche della sollecitazione

Esistono alcune semplici regole che possono essere molto utili per il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione, soprattutto in schemi di geometria e carichi più complessi.

### 1.1 Relazione fra le caratteristiche di taglio e momento flettente

Una regola molto utile per velocizzare la stesura dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione è la seguente:

$$T_y(\xi) = \frac{dM_x}{d\xi}(\xi) \quad (1)$$

$$T_x(\xi) = -\frac{dM_y}{d\xi}(\xi) \quad (2)$$

valida in tratti di trave rettilinei.

Di queste due equazioni, in un problema piano, la seconda non ha interesse, dal momento che  $T_x(\xi) = 0$  e  $M_y(\xi) = 0$ , per ogni valore di  $\xi$ .

Alcune delle implicazioni di questa regola sono (con riferimento alla Fig.1):

- in corrispondenza di un carico concentrato, il taglio subisce un salto (pari al carico concentrato stesso), in tal punto il diagramma del momento presenta un cambio di pendenza, Fig.1(a);

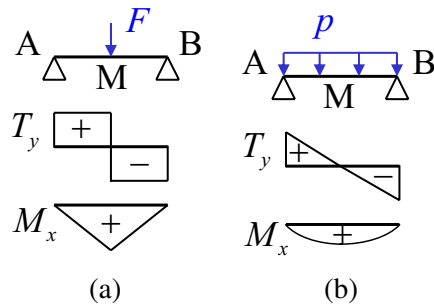


Figura 1: (a) Carico concentrato e tratti non caricati. (b) Carico distribuito uniformemente.

- in un tratto su cui non agiscono carichi, il taglio ha andamento costante, sullo stesso tratto il momento presenta un andamento lineare (la cui pendenza è appunto il valore del taglio), Fig.1(a);
- in un tratto su cui agisce un carico distribuito uniforme, il taglio ha andamento lineare, mentre il momento presenta un andamento parabolico, la cui concavità è data dal valore della derivata del taglio, Fig.1(b);
- il momento raggiunge il suo valore massimo in corrispondenza di un punto in cui il taglio si annulla, Fig.1(a),(b).

## 1.2 Caratteristiche della sollecitazione in corrispondenza delle estremità della trave

In corrispondenza delle estremità della trave è spesso possibile ricavare informazioni molto utili per il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

Infatti all'estremità finale della trave ( $\xi = l$ ) i carichi applicati coincidono con le caratteristiche in quel punto, mentre in corrispondenza dell'estremità iniziale ( $\xi = 0$ ) i carichi applicati coincidono con le caratteristiche cambiate di segno.

Da tener presente che se in una delle due estremità è applicato soltanto un carico distribuito, le caratteristiche della sollecitazione sono comunque nulle in tal punto, in quanto è necessaria una certa lunghezza di integrazione affinché un carico distribuito modifichi le caratteristiche della sollecitazione.

## 2 Esempio di utilizzo delle proprietà delle caratteristiche della sollecitazione

Tenendo conto delle proprietà appena elencate è possibile risolvere in modo agevole casi più complessi rispetto ai semplici esempi precedentemente riportati.

In Fig.2 si riporta lo schema di una trave appoggiata caricata a sbalzo da un carico distribuito. Applicando le regole precedenti è possibile in modo più spedito tracciare i grafici delle caratteristiche della sollecitazione.

Si consideri inizialmente l'estremo  $\xi = a + d$ :

- in corrispondenza dell'estremo  $\xi = a + d$  non agisce nessuna forza secondo  $z$ , per cui  $N_z(\xi = d + a) = 0$ ;

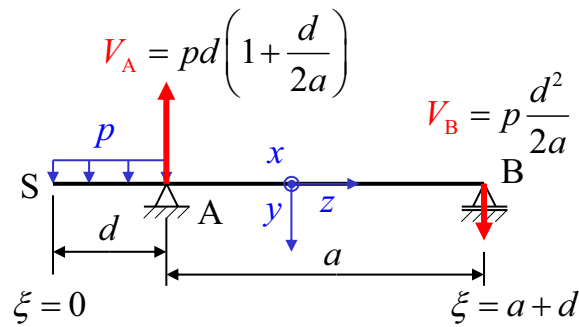


Figura 2: Trave appoggiata caricata a sbalzo da un carico distribuito.

- in corrispondenza dell'estremo  $\xi = a + d$  agisce un carico in direzione  $y$ , per cui  $T_y = V_B = p \frac{d^2}{2a}$ ;
- in corrispondenza dell'estremo  $\xi = a + d$  non agisce nessun momento concentrato, per cui  $M_x = 0$ .

Successivamente è possibile notare che tutto il tratto A-B è scarico, per cui sforzo normale e taglio rimangono costanti.

Per quanto riguarda il momento flettente si conosce che il suo andamento varia linearmente (tratto A-B scarico) per cui è sufficiente calcolare il momento in corrispondenza del punto A:  $M_x(\xi = a) = -pd^2/2$ .

A questo punto il tratto A-B è completamente risolto. In Fig.3 si riportano gli andamenti del taglio  $T_y$  e del momento flettente  $M_x$  per tale tratto.

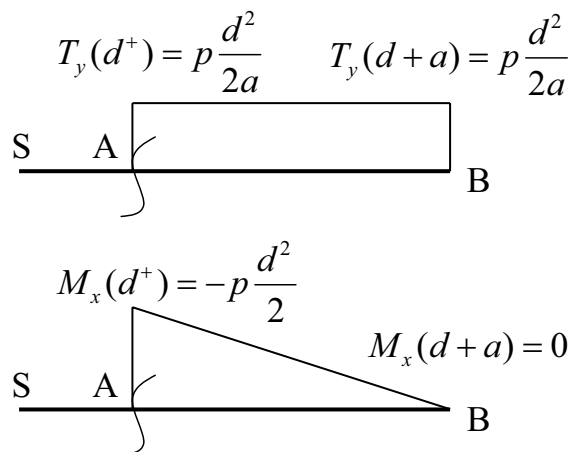


Figura 3: Andamenti del taglio  $T_y$  e del momento flettente  $M_x$  per il tratto A-B.

Per quanto riguarda il tratto S-A è possibile fare le seguenti osservazioni:

- in corrispondenza dell'estremo S tutte le caratteristiche della sollecitazione sono nulle, in quanto in tal punto non agiscono carichi concentrati ed inoltre è un punto di estremità della struttura;
- l'andamento del taglio è lineare, per cui rimane da calcolare il valore del taglio in A (avvicinandosi da sinistra, dato che  $T_y$  subisce un salto in A per la presenza di un carico concentrato);

- per calcolare il valore di  $T_y(d^-)$  (ossia avvicinandosi da sinistra) è possibile valutare il contributo delle azioni di taglio della porzione a monte (ricordandosi di cambiare di segno, per coerenza con la convenzione), si ottiene quindi  $T_y(d^-) = -pd$ ;
- per quanto riguarda l'andamento del momento flettente è noto che si tratta di un andamento parabolico (carico uniformemente distribuito) inoltre, come precedentemente notato  $M_x(0) = 0$ ;
- dato che  $T_y(0) = 0$ , la pendenza dell'andamento di  $M_x$  in  $\xi = 0$ , per cui il diagramma di  $M_x$  è a tangenza orizzontale in S.
- per definire completamente l'andamento parabolico, è necessario determinare una terza informazione, ad esempio il valore di  $M_x$  in corrispondenza di A. Dato che in A non ci sono momenti concentrati l'andamento di  $M_x$  è continuo, nonostante il cambio di pendenza, per cui è sufficiente ricordare che  $M_x(d) = p\frac{d^2}{2a}$ .

A questo punto è possibile completare i diagrammi di  $T_y$  e  $M_x$ , vedi Fig.4 (lo sforzo normale è nullo su tutta la struttura).

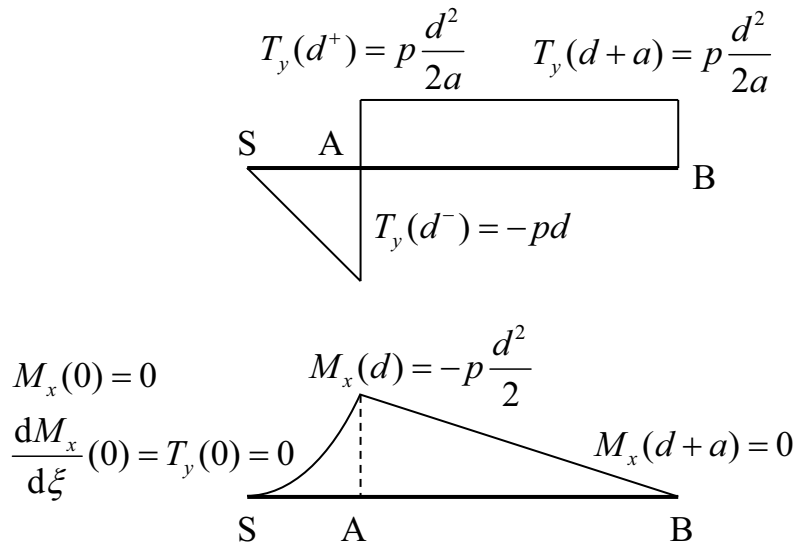


Figura 4: Andamenti del taglio  $T_y$  e del momento flettente  $M_x$  su tutta la trave.

Determinare le caratteristiche della sollecitazione, sfruttando le proprietà appena mostrate, per le strutture di Fig.5(a)(b).

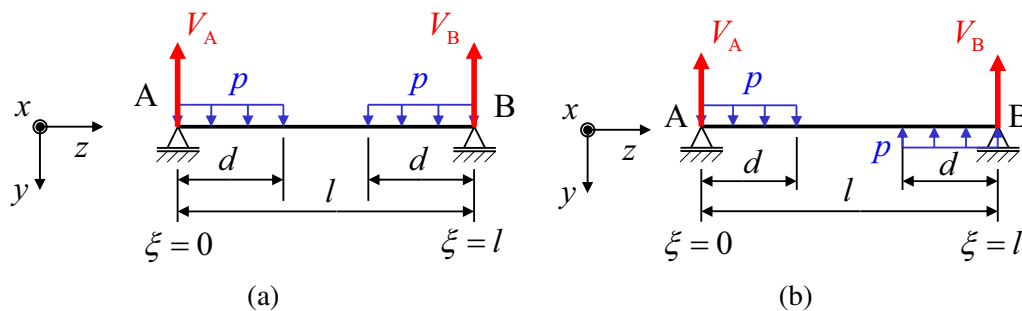


Figura 5: (a) Carico distribuito su due tratti. (b) Carico distribuito su due tratti, con inversione del segno.



### 3 Strutture simmetriche e antisimmetriche

In alcuni casi le strutture presentano un piano di simmetria geometrica, vale a dire un piano rispetto al quale si può ottenere la restante parte della struttura per riflessione, ad esempio Fig.6(a) e (b).

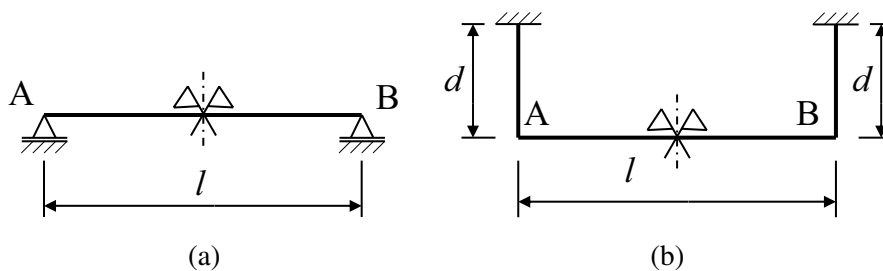


Figura 6: Esempi di strutture (nel piano) geometricamente simmetriche (forma della struttura e vincoli) rispetto ad un piano.

Strutture di questo tipo possono essere caricate nel modo più generico, tuttavia è possibile distinguere due tipi di carico notevoli:

- carico simmetrico, ossia la distribuzione delle forze di una porzione può essere ottenuta dall'altra per riflessione;
- carico anti-simmetrico, ossia la distribuzione delle forze di una porzione può essere ottenuta dall'altra per riflessione e cambio di segno;

In Fig.7 si riportano due esempi di strutture simmetriche caricate in modo: (a) simmetrico, (b) antisimmetrico.

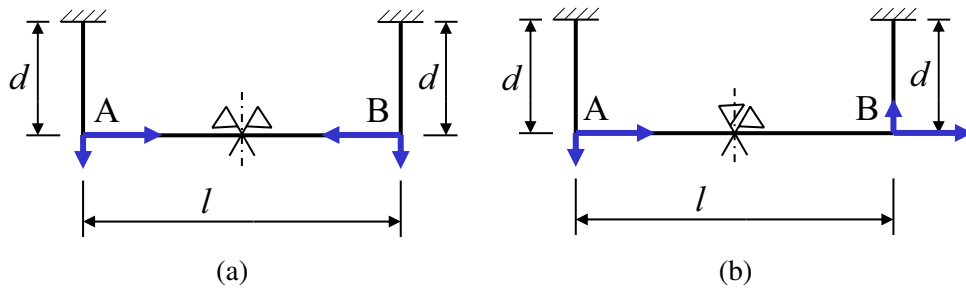


Figura 7: Esempi di strutture (nel piano) geometricamente simmetriche, (a) carico simmetrico, (b) carico antisimmetrico.

Esiste la possibilità di scomporre una qualsiasi condizione di carico (in modo univoco) in componente simmetrica e componente antisimmetrica, per cui applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile ottenere la soluzione come composizione delle due soluzioni date dalle due porzioni di carico, Fig.8.

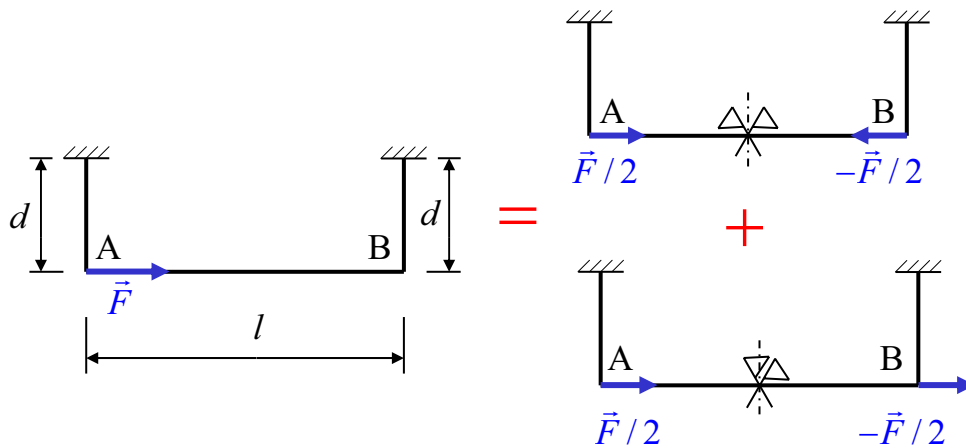


Figura 8: Scomposizione di un generico carico in componente simmetrica ed asimmetrica, possibilità di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Notare che il carico è generico, ma geometria e vincoli sono simmetrici

I diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione, in schemi simmetrici ed antisimmetrici, godono di proprietà di *simmetria* che permettono quindi di analizzare soltanto metà struttura e successivamente dedurre l'altra.

Gli schemi di carico *simmetrici* godono delle seguenti proprietà:

- il diagramma dello sforzo normale è simmetrico (quindi è possibile ottenere l'altra porzione per riflessione della prima);
- il diagramma del taglio è antisimmetrico (quindi è possibile ottenere l'altra porzione per riflessione della prima, con cambio di segno), come diretta conseguenza di ciò segue che il taglio si annulla in corrispondenza del piano di simmetria;
- il diagramma del momento flettente è simmetrico (quindi è possibile ottenere l'altra porzione per riflessione della prima);

In modo duale è immediato dedurre le proprietà per il caso di strutture *antisimmetriche*:

- il diagramma dello sforzo normale è antisimmetrico (quindi si annulla in corrispondenza del piano di simmetria);

- il diagramma del taglio è simmetrico;
- il diagramma del momento flettente è antisimmetrico (quindi si annulla in corrispondenza del piano di simmetria);

Notare che gli schemi di Fig.5 sono rispettivamente simmetrico (a) ed antisimmetrico (b).

---

Verificare la validità delle proprietà appena citate dei diagrammi della sollecitazione per gli schemi di carico di Fig.5.




---

Dedurre le caratteristiche della sollecitazioni per il caso di Fig.9 utilizzando i risultati relativi agli schemi di carico di Fig.5 e il principio di sovrapposizione degli effetti.

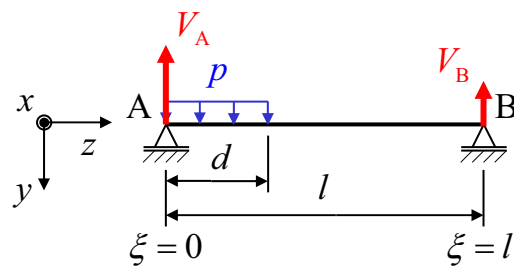


Figura 9: Struttura geometricamente (e relative condizioni di vincolo) simmetrica, a cui viene applicato un carico generico.

*Suggerimento:* scomporre il carico distribuito in parte simmetrica e antisimmetrica.



# Esercitazione 10:

## Travature reticolari

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Definizione di travatura reticolare, nel piano</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Tipo di sollecitazione a cui è sottoposta ogni singola asta della travatura</b>	<b>1</b>
2.1	Forma dell'asta non necessariamente rettilinea . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Soluzione della travatura reticolare 2D: metodo dei nodi</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Semplice esempio di travatura reticolare 3D</b>	<b>4</b>

## 1 Definizione di travatura reticolare, nel piano

Si definisce *travatura reticolare* una struttura costituita da più travi, (che in questo contesto vengono indicate come *aste*) tali che:

- siano connesse fra di loro solo attraverso cerniere applicate alle estremità, tali punti vengono detti *nodi* della travatura;
- siano vincolate con il suolo soltanto mediante cerniere ed appoggi applicati in corrispondenza dei nodi;
- siano caricate da carichi concentrati, solo in corrispondenza dei nodi.

In Fig.1 si riporta un esempio (semplice) di travatura reticolare.

Si indicano con  $A_i$  le aste e con  $n_i$  i nodi della travatura.

## 2 Tipo di sollecitazione a cui è sottoposta ogni singola asta della travatura

Ciascuna singola asta, essendo caricata soltanto alle estremità, affinché sia in equilibrio, necessariamente è sottoposta ad una coppia di braccio nullo Fig.2.

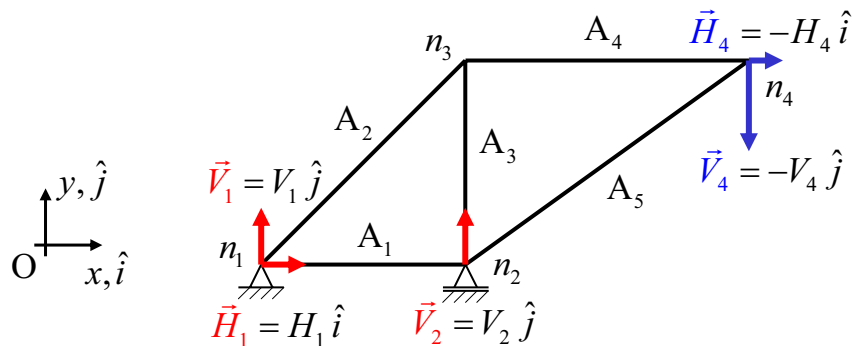


Figura 1: Schema di travatura reticolare piana.

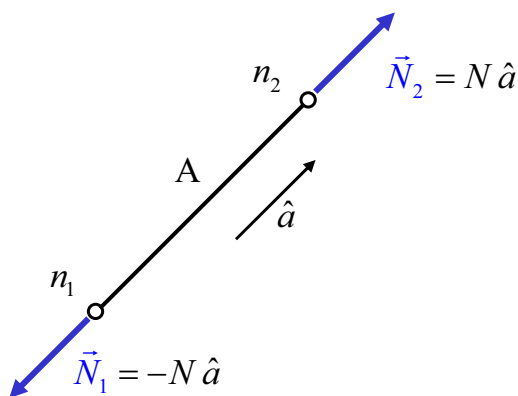


Figura 2: Modo di caricamento della singola asta: coppia di braccio nullo.

Le azioni a cui è sottoposta alle estremità  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  sono orientate secondo la direzione della congiungente dei due nodi. L'intero stato di sollecitazione viene quindi definito da un solo scalare  $N$  che convenzionalmente viene considerato positivo se l'asta è sottoposta a trazione (come il caso di figura) e negativo se viceversa l'asta è sottoposta a compressione.

### 2.1 Forma dell'asta non necessariamente rettilinea

In Fig.2 si rappresenta, come è consuetudine fare, l'asta di forma rettilinea. Tuttavia è bene precisare che affinché lo stato di sollecitazione sia una coppia di braccio nullo è sufficiente la condizione che un corpo sia caricato solo in corrispondenza di due cerniere, come mostrato in Fig.3.

Per motivi che potranno essere chiariti in seguito, è utile realizzare aste di forma rettilinea.

## 3 Soluzione della travatura reticolare 2D: metodo dei nodi

In corrispondenza di ciascun estremo l'asta subisce un'azione dagli altri corpi che convergono sul nodo, per il principio di azione e reazione l'asta esercita sul nodo un'azione uguale e contraria. Per l'equilibrio del nodo la risultante di tali forze deve essere nulla, Fig.4.

Imponendo tale condizione su ciascun nodo è possibile risolvere la travatura, qualora il problema sia isostatico.

---

Risolvere la travatura di Fig.1.

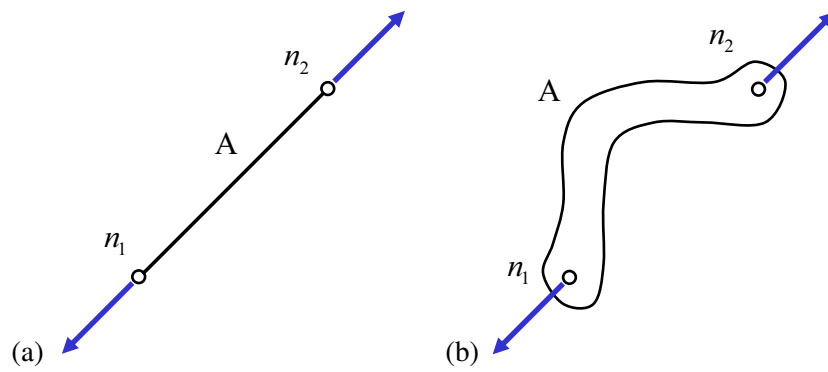


Figura 3: La forma dell'asta non determina la condizione di carico, che è imposta dall'equilibrio.

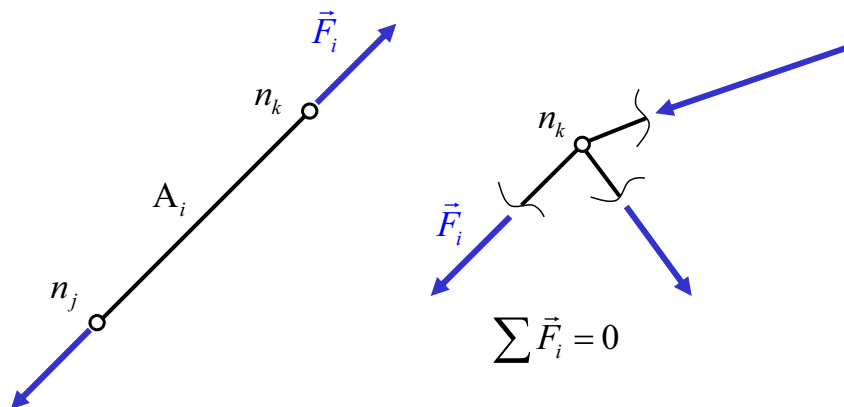


Figura 4: Metodo dei nodi. La condizione di equilibrio fra le forze che convergono su ciascun nodo permette di risolvere lo stato di azione su ogni asta.

Dati del problema:

- lunghezza n1-n2 = 3 m
- lunghezza n2-n3 = 3 m
- lunghezza n3-n4 = 5 m
- $H_4 = 3 \text{ kN}$
- $V_4 = 10 \text{ kN}$

Incognite del problema:  $V_1, H_1, V_2, N1, N2, N3, N4, N5$ .

*Suggerimento:* anche se non strettamente necessario, può essere utile determinare inizialmente le reazioni vincolari  $V_1, H_1, V_2$ , risolvendo la struttura come un unico corpo rigido.



Soluzione:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= -19.64 \text{ kN} \\
 H_1 &= -3.00 \text{ kN} \\
 V_2 &= 29.64 \text{ kN} \\
 N_1 &= -16.64 \text{ kN} \\
 N_2 &= 27.77 \text{ kN} \\
 N_3 &= -19.64 \text{ kN} \\
 N_4 &= 19.64 \text{ kN} \\
 N_5 &= -19.41 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

I segni riportati sono da intendere compatibilmente con i versi ipotizzati in Fig.1 per quanto riguarda le reazioni vincolari  $\vec{V}_1, \vec{H}_1, \vec{V}_2$ , mentre per gli sforzi nelle aste sono da intendere di trazione se positivi e di compressione se negativi.

#### 4 Semplice esempio di travatura reticolare 3D

Risolvere la travatura con sviluppo tridimensionale, rappresentata in Fig.5.

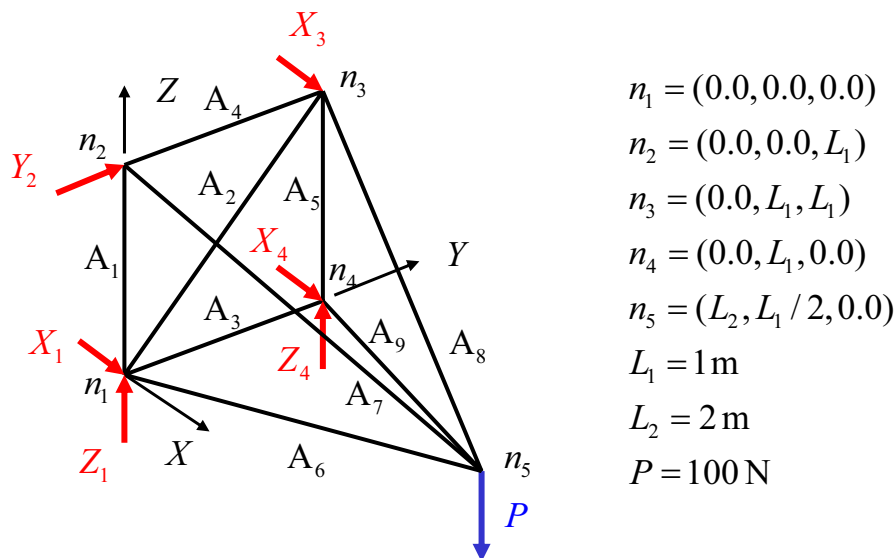


Figura 5: Travatura con sviluppo tridimensionale.

*Suggerimento:* Risolvere prima le reazioni vincolari. Determinare i coseni direttori delle varie aste, al fine di scrivere gli equilibri dei nodi in modo più agevole.



*Soluzione:*

$$N_1 = 0.00 \text{ N}$$

$$N_2 = -70.71 \text{ N}$$

$$N_3 = 50.00 \text{ N}$$

$$N_4 = 0.00 \text{ N}$$

$$N_5 = -50.00 \text{ N}$$

$$N_6 = 0.00 \text{ N}$$

$$N_7 = 0.00 \text{ N}$$

$$N_8 = 229.13 \text{ N}$$

$$N_9 = -206.16 \text{ N}$$

# Esercitazione 11:

## Stato di tensione nella sezione di trave

---

### Indice

<b>1 Forza normale</b>	<b>1</b>
<b>2 Flessione retta</b>	<b>3</b>
2.1 Calcolo del momento secondo e del modulo di flessione per alcune sezioni notevoli	4
2.2 Teorema del trasporto per il calcolo del momento secondo di area . . . . .	5
<b>3 Forza normale eccentrica</b>	<b>6</b>
<b>4 Flessione deviata</b>	<b>7</b>
<b>5 Torsione</b>	<b>8</b>
5.1 Torsione di una sezione circolare . . . . .	8
5.2 Torsione di sezioni a parete sottile, modello di Bredt . . . . .	10
<b>6 Taglio, formula di Jourawski</b>	<b>11</b>

### 1 Forza normale

Nel caso di una trave sollecitata a forza normale, si sviluppano delle tensioni normali in direzione dell'asse della trave (generalmente indicato come asse  $z$ ) di distribuzione uniforme, Fig.1.

Lo stato di sollecitazione pertanto è semplicemente:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Inoltre per equilibrio è immediato che:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} \quad (2)$$

In cui  $N_z$  è la caratteristica di trazione in corrispondenza della generica posizione  $\xi$  lungo l'asse della trave.

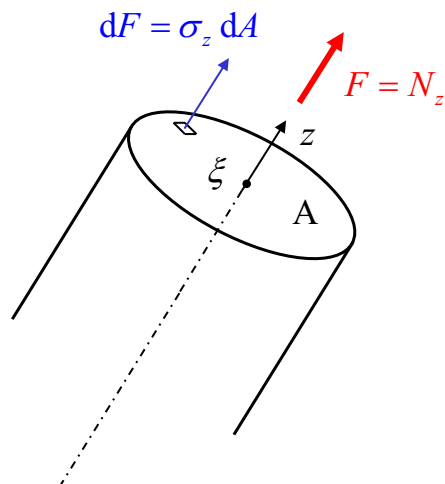


Figura 1: Stato di sollecitazione in una sezione di trave sollecitata a forza normale.  $\sigma_z$  uniformemente distribuita su tutta la sezione  $A$ .

In Fig.2(a) si mostra un prisma soggetto a peso proprio, mentre in Fig.2(b) una sequenza di blocchi di massa  $m = 10 \text{ kg}$  (accelerazione di gravità  $g = 9.81 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ) e collegati da elementi di filo di sezione  $d = 10 \text{ mm}$ .

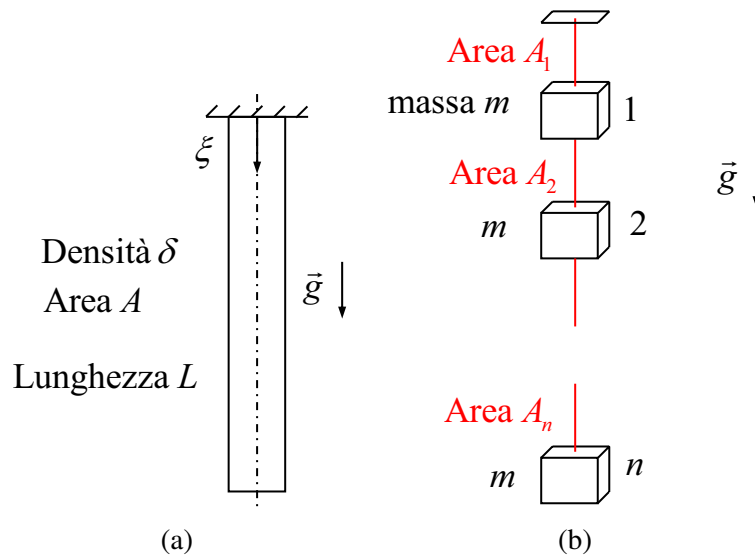


Figura 2: (a) Prisma soggetto a peso proprio. (b) Sequenza di blocchi soggetti a peso proprio, elementi di filo in trazione.

Determinare lo tensione di trazione: (a) nelle varie sezioni del prisma, (b) su ciascun elemento di filo.



## 2 Flessione retta

Ogni sezione ammette due assi principali. Ad esempio, sezioni a doppia simmetria (Fig.3) hanno come assi principali gli stessi assi di simmetria.

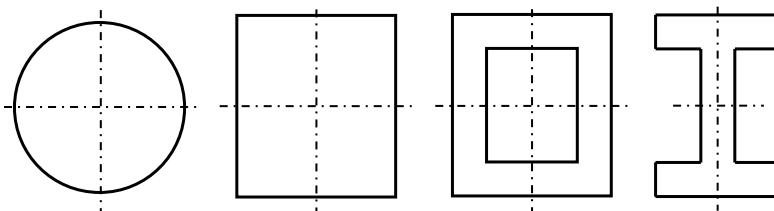


Figura 3: Esempi di sezione a doppia simmetria.

Si parla di flessione *retta* nel caso in cui, in corrispondenza della sezione della trave considerata, agisce un momento flettente con retta d'azione coincidente con uno dei due assi principali (ad esempio asse  $x$  di Fig.4).

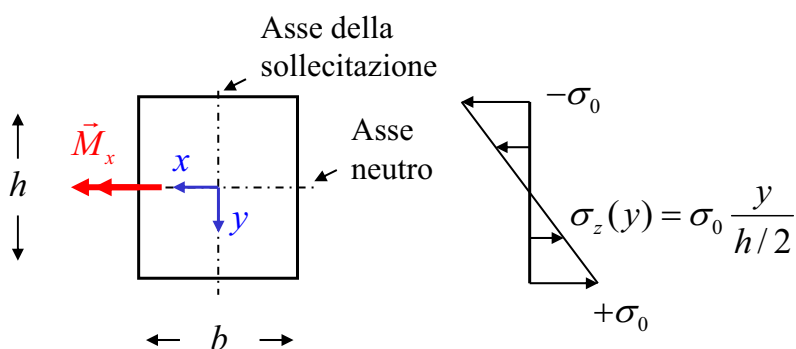


Figura 4: Sezione a doppia simmetria sottoposta ad un momento flettente, secondo una direzione principale.

In tali condizioni si sviluppa uno stato di tensione triangolare, detto *a farfalla* (o *di Navier*) di tensioni normali secondo la direzione  $z$  e l'asse neutro di tale distribuzione è lo stesso asse principale baricentrico.

Lo stato di tensione ammette solo la componente secondo  $\sigma_z$ :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & 0 & 0 \\ & & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

La distribuzione di  $\sigma_z$  non è uniforme ma segue la legge:

$$\sigma_z = \sigma_0 \frac{y}{h/2} \quad (4)$$

Rimane infine da legare il parametro  $\sigma_0$  alla sollecitazione esterna  $M_x$ .

Per l'equilibrio a momento secondo  $x$ :

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A \sigma_0 \frac{y}{h/2} y dA = \sigma_0 \frac{\int_A y^2 dA}{h/2} \quad (5)$$

Il termine  $\int_A y^2 dA$  è per definizione il momento secondo dell'area  $A$  rispetto all'asse *baricentrale* parallelo ad  $x$ , indicato come  $I_x$ , di unità di misura [ mm<sup>4</sup> ]. Esistono semplici formule (come

vedremo) per determinare  $I_x$  per le sezioni più semplici.

Infine  $h/2$  è l'ingombro della sezione secondo la direzione dell'asse della sollecitazione, vedi Fig.4.

Risulta spesso conveniente ridefinire il termine:

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} \quad (6)$$

che viene indicato come modulo di flessione, rispetto ad  $x$ , della sezione. Per cui si ha:

$$\sigma_0 = \frac{M_x}{W_x} \quad (7)$$

Di seguito verranno presentati semplici esempi di calcolo di  $I_x$  e  $W_x$  per sezioni notevoli.

## 2.1 Calcolo del momento secondo e del modulo di flessione per alcune sezioni notevoli

Consideriamo la semplice sezione rettangolare di Fig.4 di altezza  $h$  e base  $b$ , per semplice integrazione segue che:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 \quad (8)$$

quindi il modulo di flessione

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 \quad (9)$$

Un'altra sezione di notevole interesse è la sezione circolare di diametro  $d$ .

Si trova che il momento secondo di area è:

$$I_x = \frac{\pi}{64}d^4 \quad (10)$$

ed inoltre:

$$W_x = \frac{\pi}{32}d^3 \quad (11)$$

---

Determinare  $I_x$  e  $W_x$  per le sezioni cave di Fig.5.

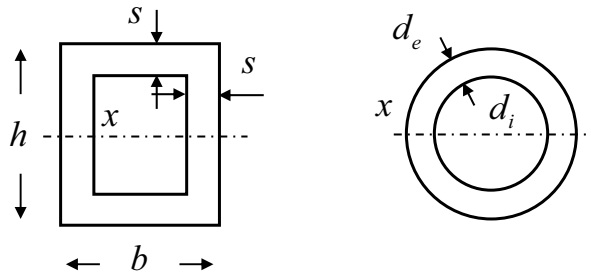


Figura 5: Sezioni rettangolare circolare cave.

*Suggerimento:* notare che la proprietà di sezione  $I_x$  è additiva (in quanto è definita come un integrale), considerare per cui le aree mancanti come contributo da sottrarre al momento secondo dovuto dell'area esterna.



## 2.2 Teorema del trasporto per il calcolo del momento secondo di area

Nei casi presentati fino ad ora, è stato sempre calcolato il momento secondo di area rispetto ad un suo asse baricentrico. Esistono dei casi in cui per una porzione di area è necessario calcolare il momento secondo di area rispetto ad un asse non passante per il baricentro.

Il teorema del trasporto permette di calcolare il momento secondo di area rispetto ad un asse non baricentrico, di una sezione, conoscendo quello rispetto ad un asse baricentrico parallelo, Fig.6.

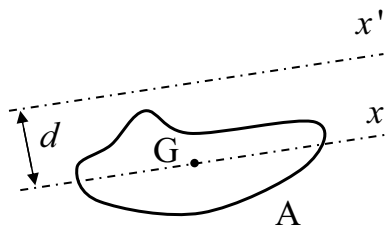


Figura 6: Sezione generica, asse baricentrico  $x$ , asse non baricentrico  $x'$ .

Per il teorema del trasporto vale la relazione:

$$I_{x'} = I_x + Ad^2 \quad (12)$$

Si consideri la sezione 'a doppio T' (molto spesso utilizzata nelle costruzioni, in particolare civili) le cui dimensioni sono riportate in fig.7

Determinare  $I_x$ , nei seguenti tre modi:

1. utilizzare il contributo negativo delle aree mancanti, come nell'esercitazione precedente;

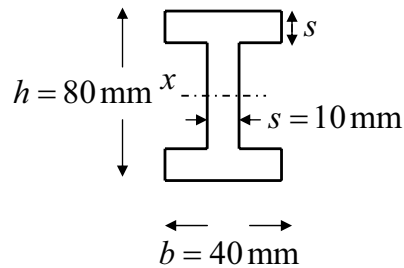


Figura 7: Sezione generica 'a doppio T'.

- considerare separatamente tre aree, le due laterali (dette ali) e quella centrale (detta anima) come singole aree rettangolari. Utilizzare quindi il teorema del trasporto per le due aree delle ali, al fine di valutare il momento secondo di area rispetto all'asse  $x$  dell'intera sezione.



*Soluzione:*

$$I_x = 1.167 \times 10^6 \text{ mm}^4.$$

### 3 Forza normale eccentrica

Come ben noto sulla stessa sezione della trave possono agire allo stesso tempo due o più caratteristiche della sollecitazione non nulle.

Nell'ipotesi di comportamento lineare del materiale è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. Per cui lo stato di sollecitazione non è altro che quello ottenuto sovrapponendo i singoli contributi delle singole caratteristiche della sollecitazione.

In particolare per quanto riguarda la composizione fra forza normale e flessione la distribuzione di tensioni secondo  $z$  generata dalla forza normale.

---

In Fig.8 si rappresenta il classico problema del gancio, in cui il carico  $\vec{F}$  presenta un'eccentricità  $r$  rispetto all'asse dello stelo.

Determinare, nella generica sezione dello stelo, lo stato di sollecitazione.

Individuare il punto che subisce la tensione  $\sigma_z$  massima.

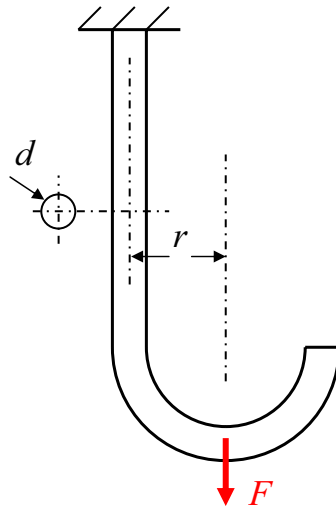


Figura 8: Problema del gancio, tipico caso di forza normale eccentrica.



#### 4 Flessione deviata

Si ha flessione deviata nel caso in cui il momento flettente agisce secondo una direzione *non* principale. In tal caso l'asse neutro non ha la stessa direzione della retta d'azione del momento flettente (come invece avviene per la flessione retta, Fig.4). Tuttavia, è possibile scomporre il momento flettente in due componenti secondo le due direzioni principali e applicare il principio di sovrapposizione degli effetti (valido nell'ipotesi di non linearità).

In Fig.9 la sezione a doppio T (dimensioni di Fig.7) è sollecitata con un momento flettente secondo una direzione non principale. Determinare la tensione di flessione  $\sigma_{zz}$  nei punti: A, B, C, D, e la direzione dell'asse neutro (angolo  $\beta$ ).

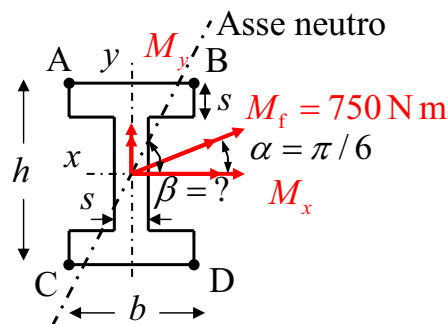


Figura 9: Sezione doppio T, sollecitazione di flessione deviata.



Soluzione:

- Componenti di momento:  $M_x = 649\,519 \text{ N mm}$ ,  $M_y = 375\,000 \text{ N mm}$ .
- Momenti secondi:  $I_x = 1.167 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ,  $I_y = 0.1667 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .
- Moduli di flessione:  $W_x = I_x/(h/2) = 29.167 \times 10^3 \text{ mm}^3$ ,  $W_y = I_y/(b/2) = 8.333 \times 10^3 \text{ mm}^3$ .
- Componenti di tensione:  $M_x/W_x = 22.3 \text{ MPa}$   
 $M_y/W_y = 45.0 \text{ MPa}$
- Tensione ai vertici della sezione:
 

A	$\sigma_{zz} = 67.3 \text{ MPa}$
B	$\sigma_{zz} = -22.7 \text{ MPa}$
C	$\sigma_{zz} = 22.7 \text{ MPa}$
D	$\sigma_{zz} = -67.3 \text{ MPa}$
- Angolo  $\beta$  che individua la direzione dell'asse neutro:  $\beta = 76.1^\circ$ .

## 5 Torsione

### 5.1 Torsione di una sezione circolare

Sia data una trave a sezione circolare sottoposta a torsione di momento  $M_z$ , Fig.10.

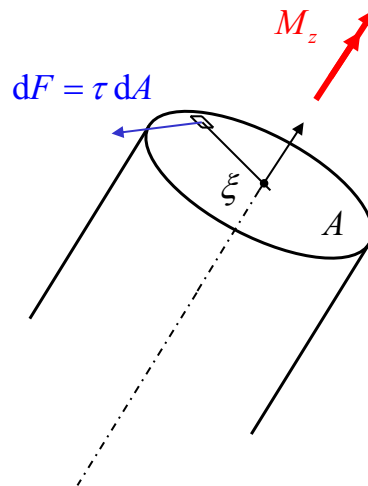


Figura 10: Stato di tensione generato da torsione.

Per equilibrare la torsione si sviluppano nel piano di sezione una distribuzione di tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  tali che:

$$M_z = \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dA \quad (13)$$

Inoltre, per la sezione circolare, la distribuzione di tensioni  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  gode delle seguenti due proprietà:

1.  $\tau$  è orientata in direzione tangenziale, ossia ortogonale ad  $\vec{r}$ ;
2.  $\tau$  è proporzionale alla distanza dal centro della sezione.

La distribuzione di tensioni tangenziali, in accordo con queste due proprietà è mostrata in Fig.11.

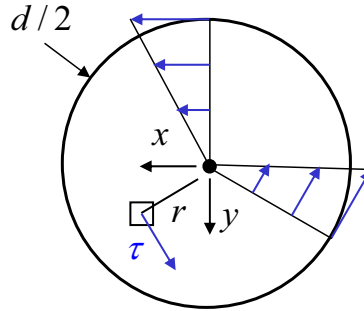


Figura 11: Direzione circonferenziale e proporzionalità al raggio delle tensioni generate dalla torsione su una sezione circolare.

È bene sottolineare che queste proprietà non valgono per le distribuzioni di tensioni generate da una sollecitazione di torsione su una sezione qualsiasi.

Sfruttando la seconda delle due proprietà è possibile scrivere:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{d/2} \quad (14)$$

ed infine sfruttando la prima proprietà e la relazione di equilibrio:

$$M_z = \int_A \tau_0 \frac{r}{d/2} r dA = \tau_0 \frac{\int_A r^2 dA}{d/2} = \tau_0 \frac{I_p}{d/2} \quad (15)$$

In cui  $\tau_0$  è la tensione tangenziale in periferia della sezione circolare (e quindi la massima, analogamente a  $\sigma_0$  nel caso di flessione) mentre  $I_p$  è il momento secondo polare dell'area della sezione.

Analogamente al caso di flessione è possibile definire il modulo di torsione (o polare) come:

$$W_p = \frac{I_p}{d/2} \quad (16)$$

in modo da ottenere direttamente il parametro di tensione  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{M_z}{W_p} \quad (17)$$

Per ogni sezione  $I_p = I_x + I_y$ , per cui per la sezione circolare:

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4 \quad (18)$$

ed infine:

$$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 \quad (19)$$

La particolare regolarità della distribuzione delle tensioni, generate dalla torsione, è valida anche per una sezione anulare (ad esempio la sezione di un tubo).

Anche in questo caso vale la relazione:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{d_e} \quad \text{per } r \in [d_e/2, d_i/2] \quad (20)$$

in cui  $d_e$  e  $d_i$  sono rispettivamente diametro esterno ed interno.

---

Determinare le proprietà di sezione  $I_p$  e  $W_p$  per una sezione anulare di diametri  $d_e$  e  $d_i$ .

*Suggerimento:* considerare, come in precedenza, il contributo della zona cava come negativo.



## 5.2 Torsione di sezioni a parete sottile, modello di Bredt

Si consideri una sezione generica chiusa a parete sottile, Fig.12.

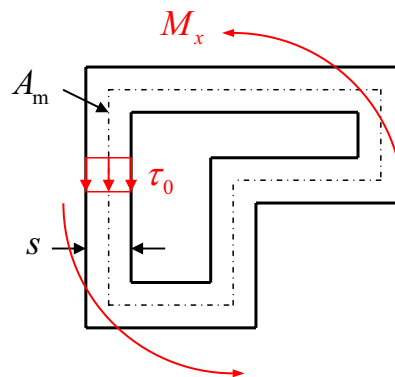


Figura 12: Generica sezione chiusa, a parete sottile.  $A_m$  è l'area racchiusa dalla linea media.

Indicando con  $A_m$  l'area racchiusa dalla linea media, ossia che passa in corrispondenza di metà spessore, il modello di Bredt (ipotizzando tensione  $\tau_0$  uniforme su ogni tratto della sezione) prevede che:

$$\tau_0 = \frac{M_x}{2A_m s} \quad (21)$$

da cui è possibile ricavare  $\tau_0$  nota la sezione e  $M_x$ .

Il modello di Bredt è generalizzabile anche per tratti a parete sottile con spessori diversi, ed inoltre è tanto più corretto quanto più la parete è effettivamente sottile rispetto alle dimensioni di ingombro della sezione.

Determinare l'errore che si commette sulla tensione massima di torsione considerando il modello di Bredt, per una sezione anulare in cui lo spessore di parete sia 1/4 del diametro esterno.



*Soluzione:*

Indicando  $\tau_{0,B}$  la tensione prevista dal modello di Bredt, e  $\tau_0$  la tensione corretta, segue che:

$$\frac{\tau_{0,B}}{\tau_0} = \frac{5}{6} = 0.833$$

## 6 Taglio, formula di Jourawski

Il modello di Jourawski permette di prevedere la distribuzione delle tensioni tangenziali generata dalla sollecitazione di taglio.

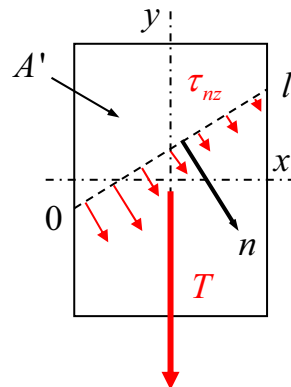


Figura 13: Sezione sollecitata a taglio.

Nell'ipotesi di azione di taglio  $T$  secondo una direzione principale vale la seguente relazione (la formula di Jourawski è generalizzabile anche per taglio  $T$  non necessariamente secondo una direzione principale della sezione):

$$\int_0^l \tau_{zn} d\xi = T \frac{S'_x}{I_x} \quad (22)$$

dove  $I_x$  è il momento *secondo* di area della sezione ( $x$  è la direzione principale ortogonale al taglio  $T$ ), mentre  $S'_x$  è il momento *primo* ma della sola *porzione*  $A'$  della sezione:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dS \\ S'_x &= \int_{A'} y dS \end{aligned} \quad (23)$$

Infine  $n$  è la direzione nel piano perpendicolare al percorso di integrazione.

L'eq.22 assume particolare interesse nel caso in cui su tutto il tratto  $0-l$  la tensione  $\tau_{zn}$  si possa assumere pressoché uniforme.

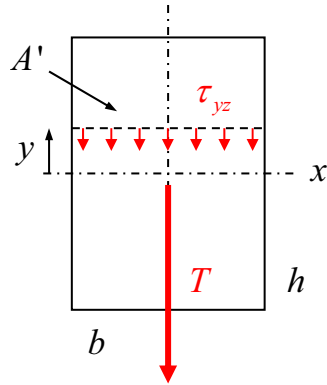


Figura 14: Sezione rettangolare, tensione  $\tau_{yz}$ .

Ad esempio, nel caso di una sezione rettangolare, considerando  $n$  orientato secondo  $y$ , si può stimare la tensione  $\tau_{yz}$  lungo una generica linea parallela all'asse  $x$ , Fig.14.

Si può quindi calcolare  $\tau_{yz}$  secondo Jourawski:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 \quad (24)$$

$$S'_x = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right)$$

quindi dalla Eq.22 si ottiene:

$$\tau_{yz} = \frac{TS'_x}{bI_x} = \frac{3}{2} \frac{T(h^2 - 4y^2)}{bh^3} \quad (25)$$

In particolare, si ha il massimo taglio in mezzeria:

$$\tau_{yz}(y = 0) = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \quad (26)$$

Da notare che il termine  $T/(bh)$  rappresenta la tensione di taglio “nominale” ossia la forza di taglio per unità di area della sezione. Quindi, la tensione massima è pari a  $3/2$  volte la tensione nominale.

Determinare le tensioni di taglio nelle sezioni 1 e 2 della travatura a sezione rettangolare cava di Fig.15.

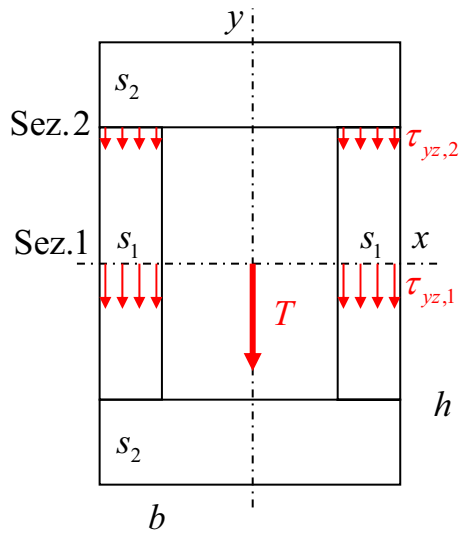


Figura 15: Sezione rettangolare cava, sollecitata a taglio.

