



XXXIV Congresso AIAS  
Settembre 2005  
Politecnico di Milano



# ANALISI DEL CONTATTO DI BORDO IN INGRANAGGI CILINDRICI

Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Pisa.

Autori: Dr. V. Pinto, Dr. **C. Santus**.

Collaborazione fra:

DIMNP, Università di Pisa

AVIO, Propulsione Aerospaziale, Torino



# Definizione del problema

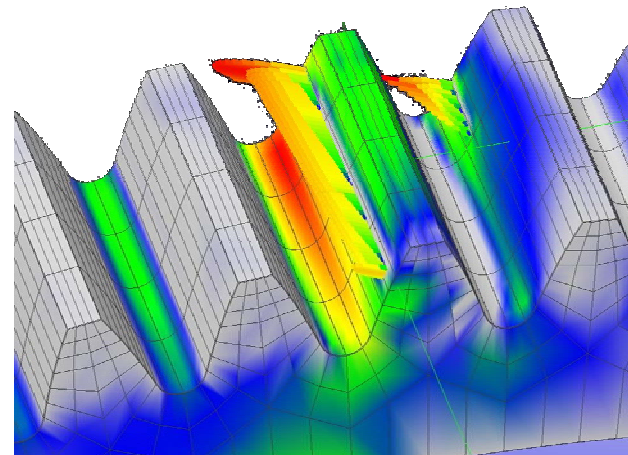
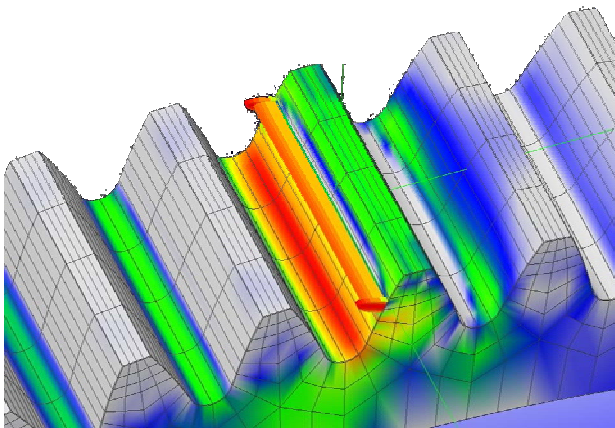
## Contatto di bordo fra denti di ingranaggi cilindrici

Definizione:

- **contatto completo** secondo la larghezza di fascia

Cause:

- **assenza di bombatura** o **bombatura insufficiente**
- aggravato da **errori di disallineamento** tra gli assi

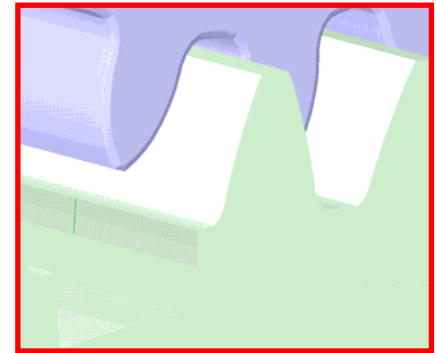
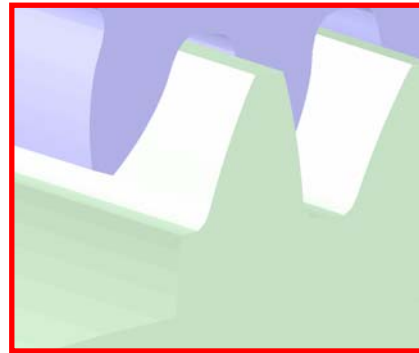
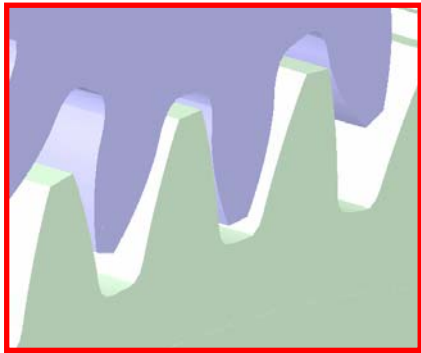


# Definizione del problema

## Obbiettivi del lavoro

Descrivere la **distribuzione della pressione di contatto** in corrispondenza del bordo, in particolare per tre casi di studio:

- superfici libere, della dentatura, **allineate**
- superfici **non allineate**
- superfici non allineate in presenza di **raccordo d'estremità**



Sfruttare l'analogia del **problema del contatto di bordo** con la **meccanica della frattura lineare elastica**

# Definizione del problema

## Ipotesi e limiti del modello

Contatto fra corpi **solidi elastici**

Non si considerano gli **effetti tribologici** :

- presenza di attrito
- microgeometria della superficie
- contatto mediato dal lubrificante

# Letteratura di base



K. L. Johnson. "Contact Mechanics". *Cambridge University Press*, 1985.

Ampia trattazione sul contatto, tuttavia non va oltre all'ipotesi di **Half-Space** (es. Contatto Hertziano)



M. Hetényi, "A general solution for the elastic quarter space". *Journal of Applied Mechanics*, 1970.

Mediante una tecnica di sovrapposizione viene trattato il problema del **Quarter-Space**



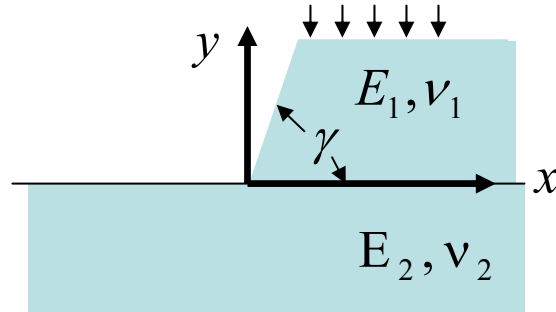
J. Dundurs, M. S. Lee. "Stress concentration at a sharp edge in contact problems". *Journal of Plasticity*, 1972.

Viene introdotto un parametro che mette in relazione le **proprietà costitutive** dei due materiali a contatto, da cui dipende il carattere della singolarità in corrispondenza del bordo

# Risultato ottenuto da Dundurs



J. Dundurs, M. S. Lee. "Stress concentration at a sharp edge in contact problems". *Journal of Plasticity*, 1972.



$$\alpha = \alpha(E_1, \nu_1, E_2, \nu_2)$$

Al variare delle costitutive:  $-1 \leq \alpha \leq 1$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ E_2 / E_1 = \infty & E_2 / E_1 = 0 \end{array}$$

Attraverso la **trasformata di Mellin** si arriva all'eq. trascendente:

$$(1 + \alpha) \cos p\pi (p^2 \sin^2 \gamma - \sin^2 p\gamma) - \frac{1}{2} (1 - \alpha) \sin(p\pi) (p \sin 2\gamma + \sin 2p\gamma) = 0$$

$$\downarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p \in \mathfrak{R}; \quad 0.5 \leq p(\alpha) \leq 1$$

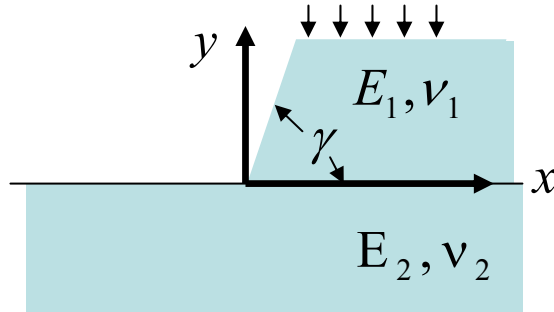
In tal caso lo **stato tensionale all'apice** è del tipo:

$$\sigma_{ij} = O(r^{-(1-p)})$$

# Risultato ottenuto da Dundurs



J. Dundurs, M. S. Lee. "Stress concentration at a sharp edge in contact problems". *Journal of Plasticity*, 1972.



$$\alpha = \alpha(E_1, \nu_1, E_2, \nu_2)$$

Al variare delle costitutive:  $-1 \leq \alpha \leq 1$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ E_2 / E_1 = \infty & E_2 / E_1 = 0 \end{array}$$

Casi notevoli:

Es. **materiale 1 inf. rigido** e angolo retto :  $\alpha \rightarrow 1, \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p = 0.5$   $\sigma_{ij} \propto 1$

sol. **singolare con ordine massimo = 0.5**

Es. **materiali uguali** e angolo retto :  $\alpha = 0, \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p = 0.774$   $\sigma_{ij} \propto \frac{1}{r^{0.226}}$

sol. **singolare**

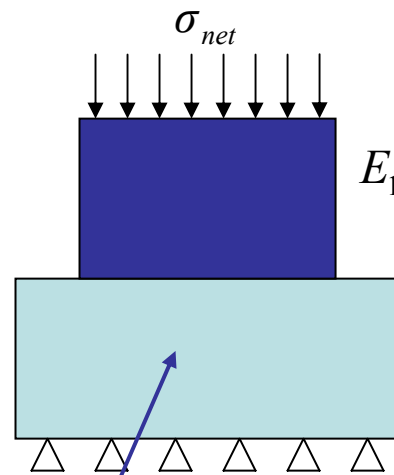
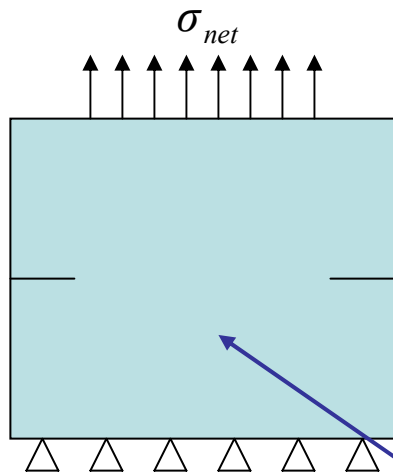
Es. **materiale 2 inf. rigido** e angolo retto :  $\alpha \rightarrow -1, \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p = 1$   $\sigma_{ij} \propto 1$

sol. **non** singolare !

# Analogia con la meccanica della frattura

Es. materiale 1 inf. rigido e angolo retto :  $\alpha \rightarrow 1, \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p = 0.5$

sol. **singolare con ordine massimo = 0.5**



$$E_2 / E_1 = 0$$

$$\sigma_{ij} \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

I due problemi hanno la **stessa soluzione**, a meno del segno, su tutto il semipiano inferiore !!

La soluzione è dominata dal  $K_I$  in corrispondenza dell'apice.

Si propone lo **stesso approccio** anche per combinazioni di materiali, e quindi **ordine di singolarità, diversi**

# Analogia con la meccanica della frattura

## Principali riferimenti bibliografici: similitudine Meccanica della Frattura - Contatto



A. E. Giannakopoulos, T. C. Lindley, S. Suresh. “Aspects of equivalence between contact mechanics and fracture mechanics: theoretical connections and life-prediction methodology for fretting fatigue”. *Acta Materialia*, 1998.



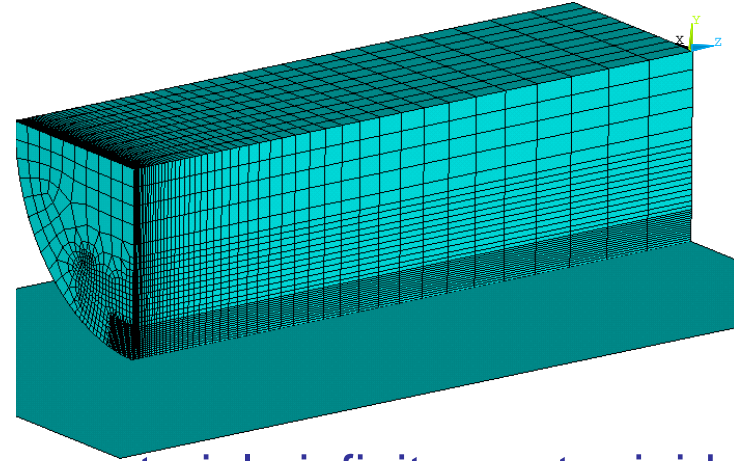
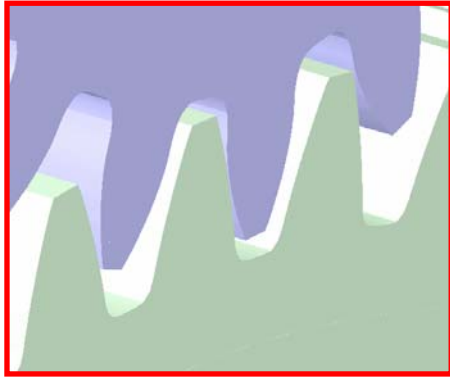
A. Mugadu, D. A. Hills. “A generalised stress intensity approach to characterising the process zone in incomplete fretting contacts”. *International Journal of Solids and Structures*, 2002.



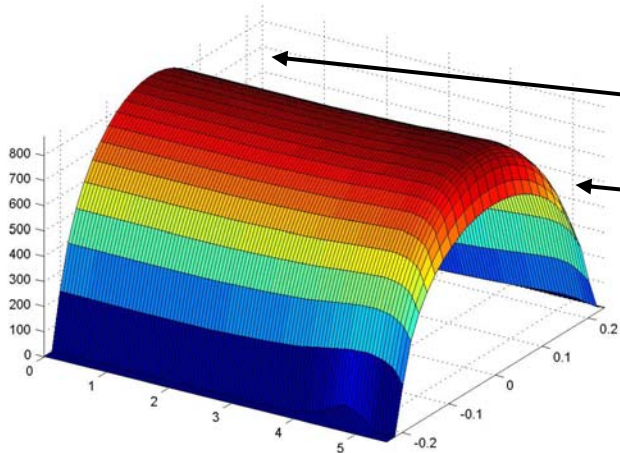
M. Ciavarella, G. Demelio. “A review of analytical aspects of fretting fatigue, with extension to damage parameters, and application to dovetail joints”. *International Journal of Solids and Structures*, 2001.

# Superfici libere ALLINEATE

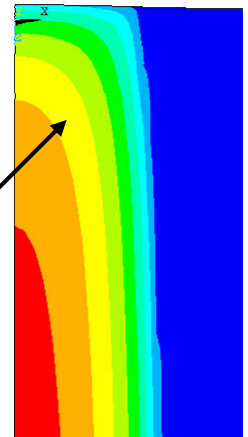
Il caso di sup. allineate può essere ricondotto al **contatto di cilindro contro piano rigido** (per simmetria, nel caso di materiali e curvature uguali)



Equivale al **contatto di bordo contro un materiale infinitamente rigido**, la soluzione al bordo è non singolare



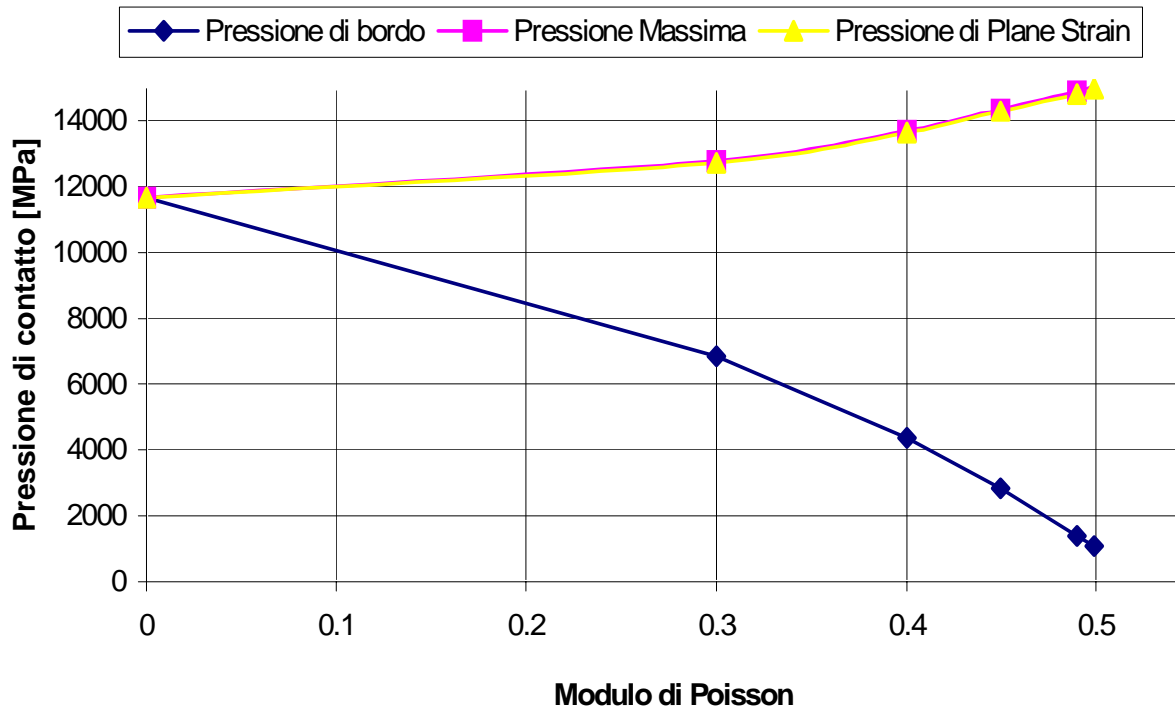
- press. Hertz lontana dal bordo
- diminuzione al bordo
- impronta di contatto ridotta all'estremità del cilindro



# Superfici libere ALLINEATE

## Caratteristiche della soluzione analizzate

La soluzione al bordo è fortemente influenzata dal **modulo di Poisson**



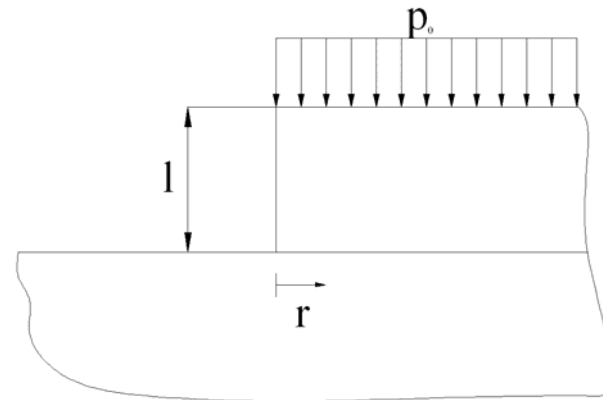
Sol. uniforme  
*Plane Strain*

←  $0 \leq \nu < 0.5$  →

Incomprimibile  
**No contatto** al  
bordo

# Superfici libere NON allineate

Caratteristiche della soluzione analizzate



Ipotesi di **Plane Strain**, valida al limite, da cui la possibilità di applicare la soluzione di Dundurs

(La componente di deformazione ortogonale al piano rimane limitata, a differenza delle altre che tendono a infinito, in corrispondenza dell'apice)

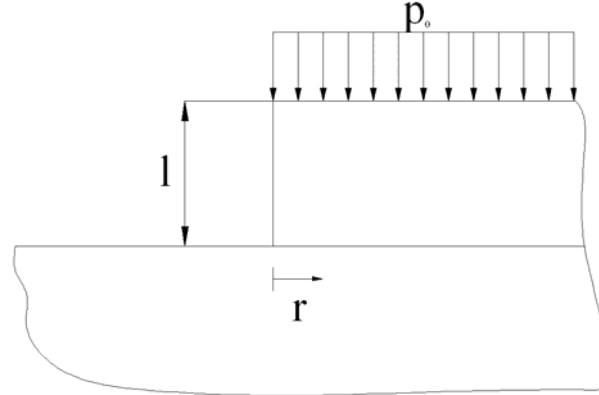
$$\sigma_{ij} = O\left(r^{-(1-p)}\right) \longrightarrow p_{cont}(r) = \frac{K_p}{r^{1-p}}$$

$K_p$  **Fattore di Intensificazione della distribuzione di Pressione**

# Superfici libere NON allineate

## Analisi dimensionale

$$p_{cont}(r) = \frac{K_p}{r^{1-p}}$$



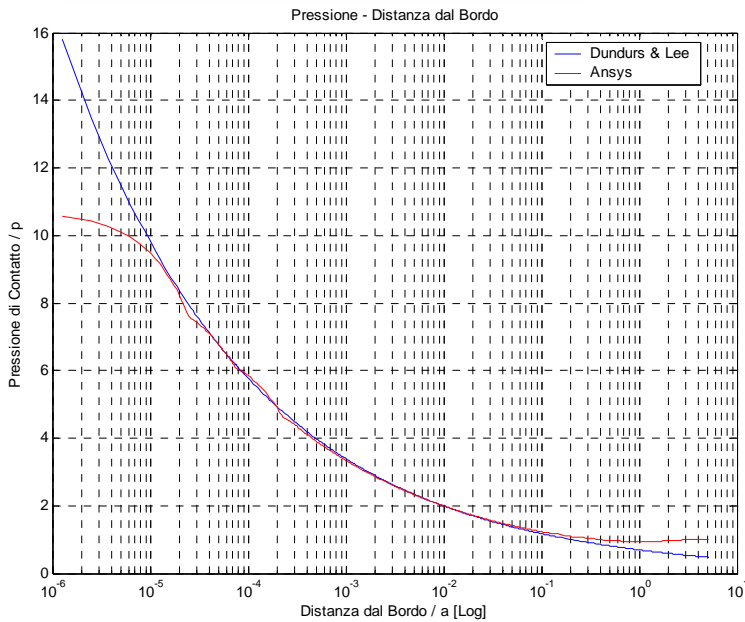
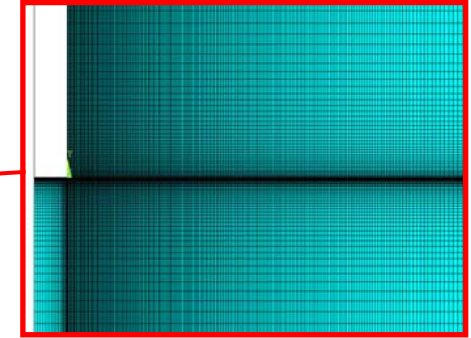
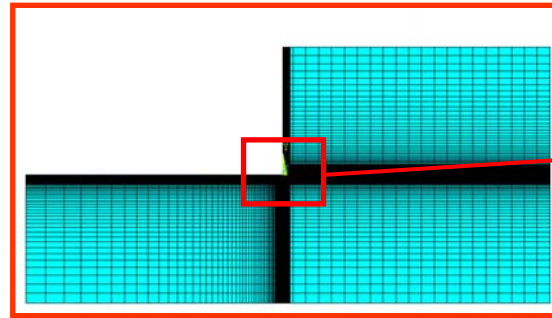
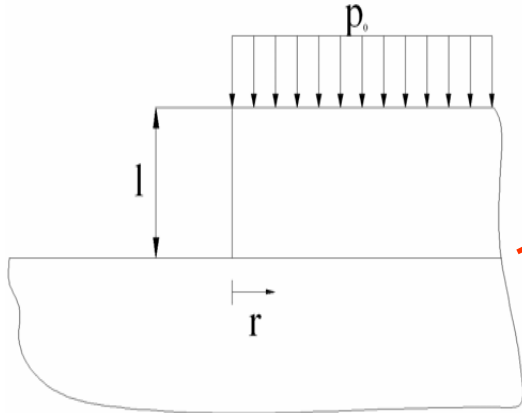
$$[K_p] = \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2 \cdot \text{mm}^{p-1}} \right] = \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^{p+1}} \right]$$

Gli unici parametri di **tensione** e **lunghezza** che si distinguono nel problema, sono rispettivamente  $p_0$ ,  $l$ , rimane da determinare la **costante**  $\beta$  che dipende solo dalle proprietà costitutive, per il Th. di Buckingham

$$K_p = \beta \cdot p_0 \cdot l^{1-p} \quad \longrightarrow \quad p_{cont}(r) = \beta \cdot p_0 \cdot \left( \frac{l}{r} \right)^{1-p}$$

# Superfici libere NON allineate

Individuazione della costante mediante simulazioni F.E.M.



Ottima **sovrapposizione** della soluzione numerica con quella analitica.

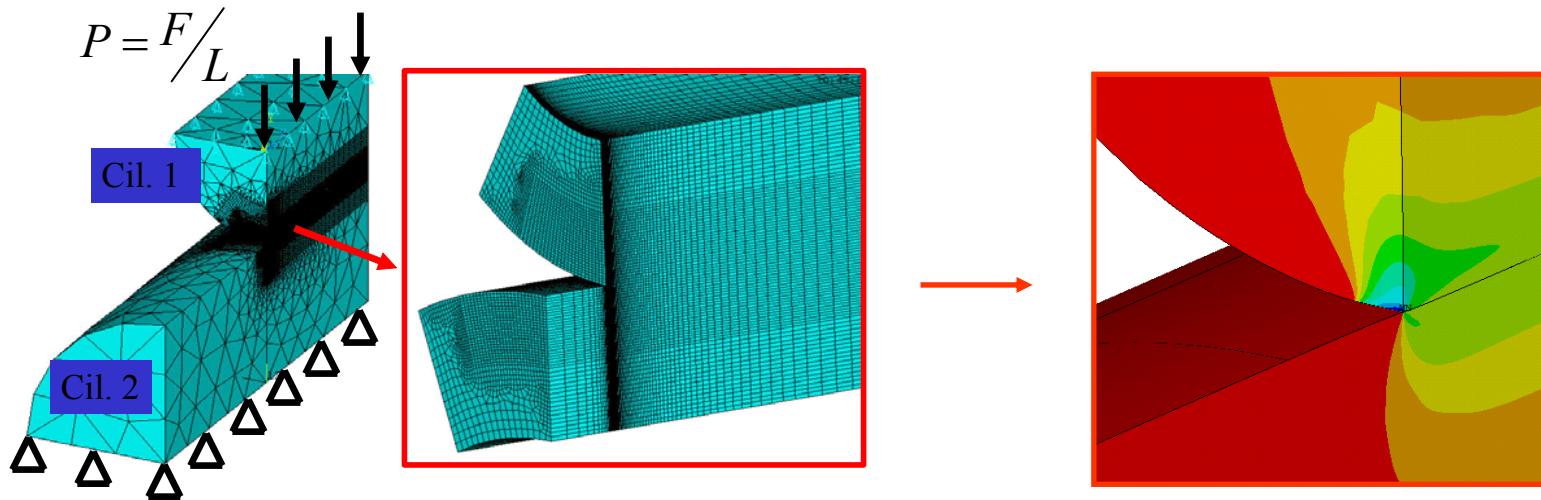
Su 20 combinazioni di materiali **err.<4%** su un intervallo di 4 decadi di distanza dal bordo.

$$\beta = \left( \frac{1 - \nu^{*2}}{11.1} \right)^{1-p} \quad \frac{1}{\nu^*} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}$$

Si ottiene in definitiva:  $p_{cont}(r) = p_0 \left( \frac{1 - \nu^{*2}}{11.1} \cdot l \right)^{1-p} \left( \frac{1}{r} \right)^{1-p}$

# Superfici libere NON allineate

Estensione al caso tridimensionale



Diversa **lunghezza caratteristica** del problema

$$b = \sqrt{\frac{4 \cdot P \cdot R^*}{\pi \cdot E^*}} \quad \downarrow \quad \text{Semi-impronta di contatto della soluzione di Hertz}$$

Diversa **pressione caratteristica** del problema

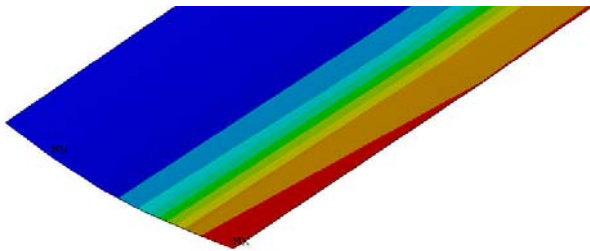
$$P_{HzMax} \quad \downarrow \quad = \frac{2 \cdot P}{\pi \cdot b} \quad \text{Pressione Hertziana lontano dal bordo}$$

# Superfici libere NON allineate

Estensione al caso tridimensionale

$$p_{cont}(r) = \underbrace{\beta' \cdot p_{HzMax} \cdot b^{1-p}}_{K_p} \cdot \left(\frac{l}{r}\right)^{1-p}$$
$$K_p = \beta' \cdot p_{HzMax} \cdot b^{1-p}$$

Necessità di definire la **costante**, in funzione delle costitutive



La dipendenza dalle costitutive è legata alla **variazione dell'impronta di contatto** in prossimità del bordo

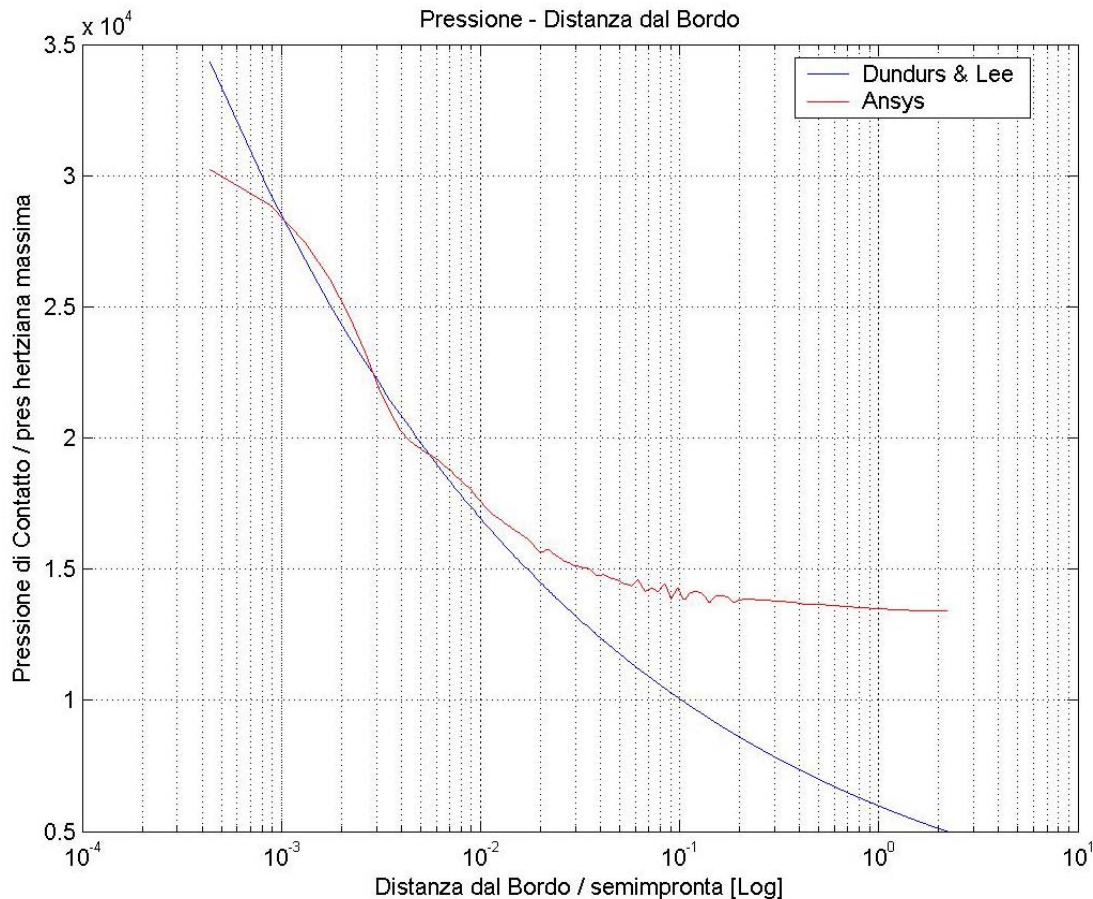
Si introducono due fattori di correzione su  $\beta$ :  $\beta' = \beta \cdot \beta_E(E_1, E_2) \cdot \beta_\nu(\nu_1)$

$$\beta_E(E_1, E_2) = \left(1 + \frac{E_1 - E_2}{10 \cdot E_1}\right) = \left(1.1 - \frac{E_2}{10 \cdot E_1}\right) \quad \beta_\nu(\nu_1) = 1 - (\nu_1 - 0.3)$$

# Superfici libere NON allineate

## Estensione al caso tridimensionale

$$p(r) = K_p \cdot \left(\frac{l}{r}\right)^{1-p} = \left(\frac{l-v^{*2}}{11.1}\right)^{1-p} \cdot \left(1.1 - \frac{E_2}{10 \cdot E_1}\right) \cdot [1 - (v_1 - 0.3)] \cdot p_{HzMax} \cdot b^{1-p} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{1-p}$$



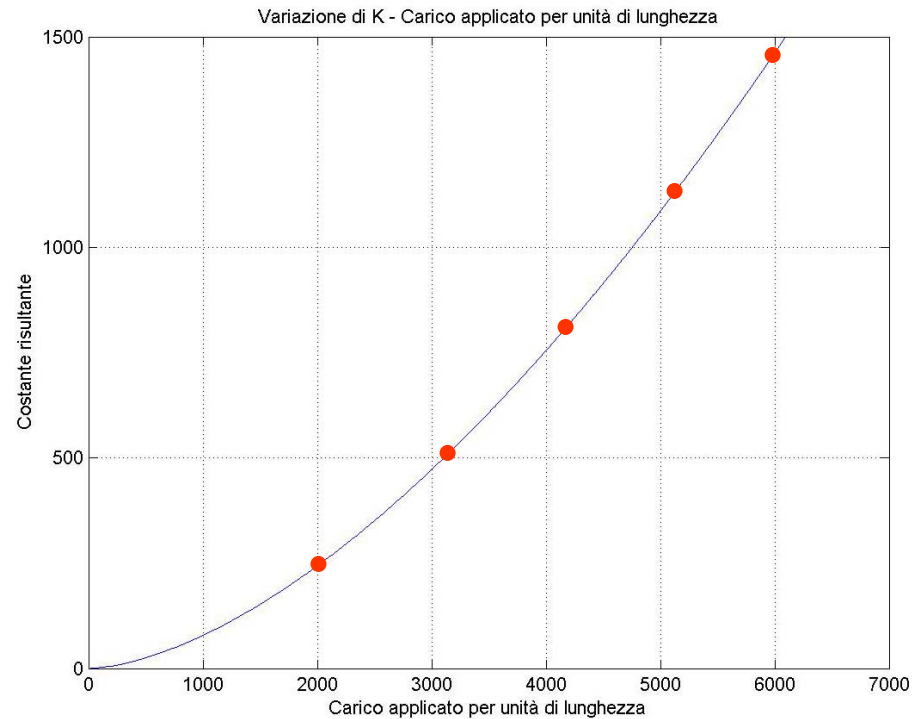
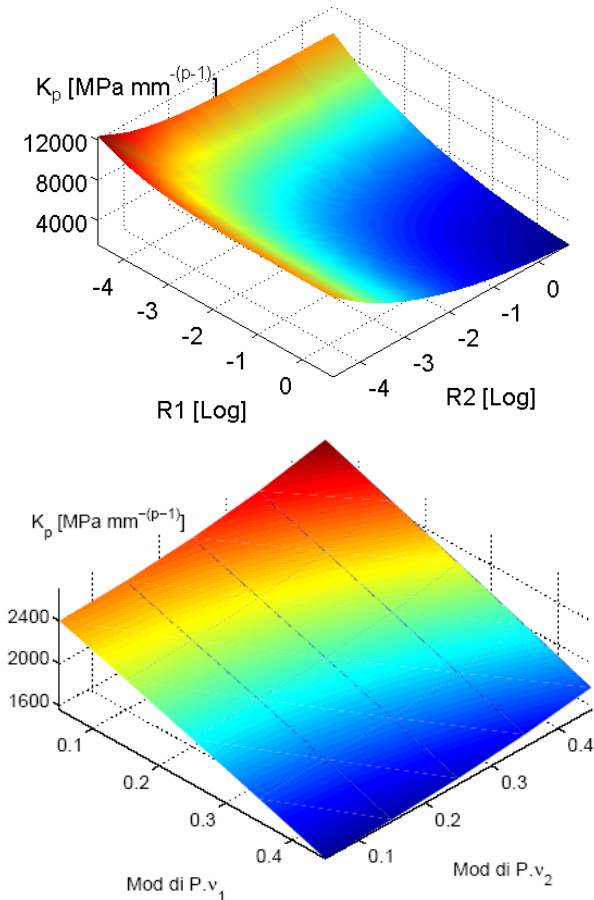
Su 40 combinazioni di materiali **err.<10%** su un intervallo di 1 decade di distanza dal bordo

(difficoltà numerica di eseguire un **infittimento adeguato** vicino al bordo)

# Superfici libere NON allineate

## Estensione al caso tridimensionale

$$p(r) = K_p \cdot \left(\frac{l}{r}\right)^{1-p} = \left(\frac{l-v^{*2}}{11.1}\right)^{1-p} \cdot \left(1.1 - \frac{E_2}{10 \cdot E_1}\right) \cdot [1 - (v_l - 0.3)] \cdot p_{HzMax} \cdot b^{1-p} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{1-p}$$



La dipendenza dal carico è non lineare con il carico per unità di lunghezza



# Presenza di raccordo d'estremità

Riferimenti bibliografici: soluzione in presenza di raccordo,  
*Plane Strain*



M. Ciavarella. “Indentation by nominally flat or conical indenters with rounded corners”. *International Journal of Solids and Structures*, 1998.



M. Ciavarella, G. Macina. “New results for fretting-induced stress concentration on Hertzian and flat rounded contacts”. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2003.



A. E. Giannakopoulos, T. C. Lindley, S. Suresh, C. Chenut.  
“Similarities of stress concentrations in contact at round punches and fatigue at notches: implications to fretting fatigue crack initiation”.  
*Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2000.

# Presenza di raccordo d'estremità

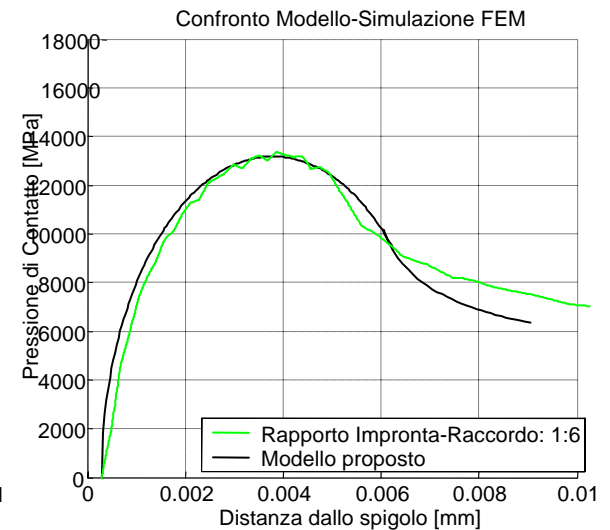
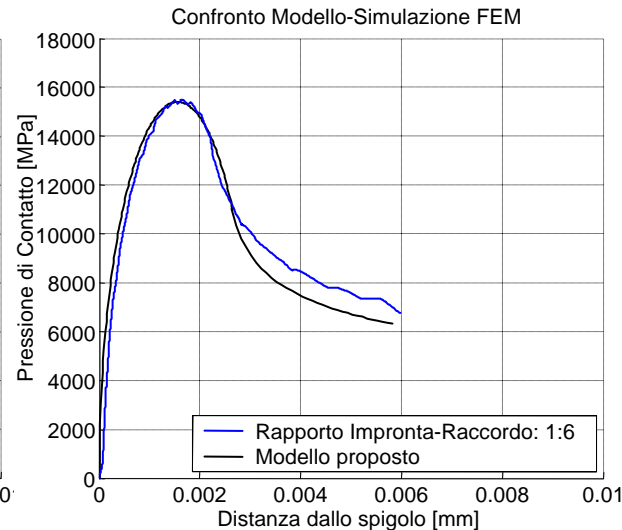
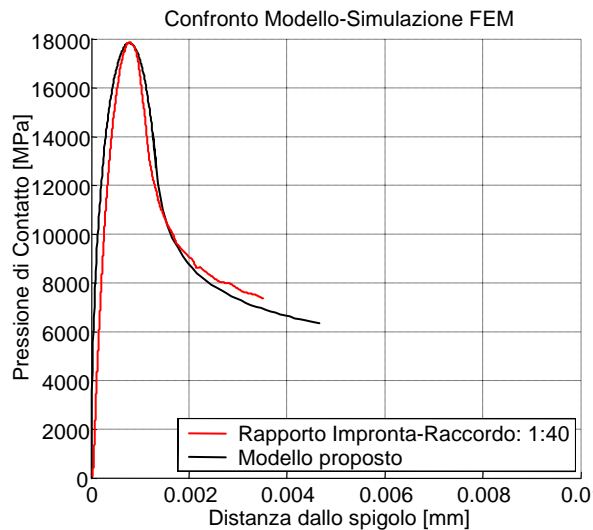
## Modello proposto, contatto al bordo con raccordo

$$p_{cont}(r) = K_0 \cdot p_{HzMax} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)^2} \quad \text{per } 0 = r = r_1 (< 2 \cdot r_0)$$

$$p_{cont}(r) = K_p \cdot \left(\frac{1}{r - r_2}\right)^{1-p} \quad \text{per } r > r_1 (> r_2)$$

Sol. **Hertz** nell'intorno del bordo

Sol. **asintotica**, a breve distanza dal bordo



----->

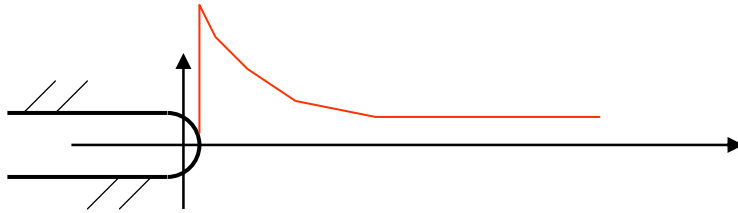
Raggio di raccordo  $R_e$  crescente rispetto l'impronta di contatto  $b$

# Discussione

## Confronto Meccanica della Frattura – Contatto in presenza di una geometria raccordata



S. Suresh. “**Fatigue of materials**”. *Cambridge University Press*. 1991.



La soluzione della cricca con raccordo (materiale elastico) è **dominata da  $K_I$**  e conserva la posizione della massima tensione in corrispondenza dell'apice

La distribuzione di pressione nel contatto in presenza di raccordo è dominata dalla soluzione di **Hertz** e quindi la pressione è nulla in corrispondenza del vertice.

Contatto con raccordo **completo!** Contatto senza raccordo **incompleto!**

# Conclusioni

## Risultati del presente lavoro:

- Si propone la similitudine fra Meccanica della Frattura e Meccanica del Contatto, definendo un Fattore di Intensificazione della Pressione  $K_p$
- Mediante un approccio dimensionale si determina la dipendenza dalle costitutive di  $K_p$
- Inquadramento nella teoria di Dundurs dei casi di contatto tridimensionale fra denti di ingranaggi cilindrici con sup. libere Allineate e Non allineate
- Analisi dell'influenza di un raccordo d'estremità: l'andamento asintotico della soluzione viene eliminato